习 题 解 答

第九章　坐标变换与点变换

习 题 9–1

1. 两直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 与 $[O;\eta_1',\eta_2']$ 有公共原点. 在原坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 下, 新坐标系的基向量为:

$$\eta_1'=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \eta_2'=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

(1) 写出坐标变换公式;

(2) 写出原坐标系中的基向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在新坐标系下的坐标分量;

(3) 已知向量 $\overrightarrow{v}$ 在 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 的分量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, 求它在新坐标系 $[O;\eta_1',\eta_2']$ 下的分量.

解: (1) 因为 $(\eta_1',\eta_2')=(\eta_1,\eta_2)T$, 其中 $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 所以坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

(2) 由 (1) 知: $(\eta_1,\eta_2)=(\eta_1',\eta_2')T^{-1}$, 其中 $T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 所以 $\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1'-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_2'$, $\eta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1'+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_2'$, 即: $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

(3) 从 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 可推知 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. 现在 $\overrightarrow{v}=\eta_1-\eta_2$, 所以

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

这就是 $\overrightarrow{v}$ 在新坐标系下的分量.

2. 在平面直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中, 已知新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 的原点 O' 的坐标为 $(3,2)$, 点 $M(5,3)$ 在新坐标系的 x' 轴上, 且点 M 的新坐标 $x'>0$. 试用矩阵形式写出从 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 到 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 的坐标变换公式.

解: 因为 $X_0=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, 且由题意知 $\overrightarrow{O'M}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 故 $\overrightarrow{O'M}$ 的单位向量是 $\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 即 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 $T=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$. 因此变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 3\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

3. 设二次曲线 C 在直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中的方程是:

$$x^2-xy+y^2+2x-4y+1=0.$$

(1) 取新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$, 使 O' 在旧坐标系下的坐标为 $(0,2)$, 且有

$$\begin{cases}\eta_1'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_2\\ \eta_2'=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_2,\end{cases}$$

试用矩阵形式写出坐标变换公式;

(2) 求曲线 C 在新坐标系下的方程.

解: (1) 据题设, $X_0=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 且行列式 $|T|=1$. 所以坐标变换公式为:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

(2) C 的方程为 $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{2}=1$.

4. 设有平面直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$, 若新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 满足: x' 轴和 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x-2y+2=0$ 和 $2x+y+4=0$.

(1) 求从旧坐标系到新坐标系的变换公式;

(2) 求直线 $x-y+2=0$ 在新坐标系中的方程;

(3) 求直线 $3x'+y'+1=0$ 在旧坐标系中的方程.

解: (1) 因 O' 点的坐标 (x_0,y_0) 是方程组 $\begin{cases}x-2y+2=0\\2x+y+4=0\end{cases}$ 的解, 即 $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

显然 $x-2y+2=0$ 的方向系数为 $2:1$, $2x+y+4=0$ 的方向系数为 $-1:2$. 所以 $\eta_1'=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\eta_1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\eta_2$, $\eta_2'=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\eta_1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\eta_2$, 即 $(\eta_1',\eta_2')=(\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$. 由于 $\begin{vmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{vmatrix}=1$, η_1',η_2' 构成右手系. 所以坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -2\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

(2) $x-y+2=0$ 在新坐标系中的方程为:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-\frac{\sqrt{5}}{5}y'-2\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x'+\frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)+2=0,$$

即 $x'-3y'=0$.

(3) 由 (1) 的坐标变换公式可以得到

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},$$

故 $3x'+y'+1=0$ 在旧坐标系下的方程为:

$$3\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}y+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+1=0,$$

即 $5x+5y+10+\sqrt{5}=0$.

习 题 9–2

1. 化简二次曲线的方程

$$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+12=0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-12\\-6\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=7>0$, $I_2=|A|=6>0$, $I_3=\begin{vmatrix}5&2&-12\\2&2&-6\\-12&-6&12\end{vmatrix}=-108<0$. 此曲线是椭圆. A 的特征值是方程 $\lambda^2-7\lambda+6=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$. 故简化后的方程为 $6x'^2+y'^2-\dfrac{108}{6}=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{3}+\dfrac{y'^2}{18}=1$.

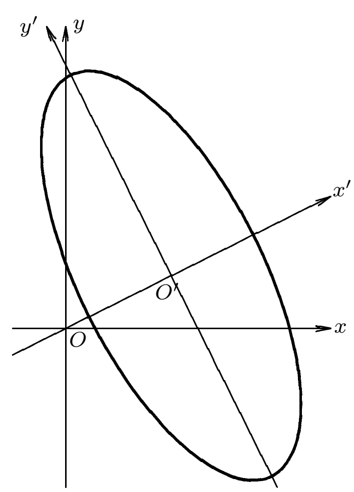
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 6 与 1 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$. 再求曲线的中心 (即新坐标系的原点) $O'(x_0,y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases}5x_0+2y_0-12=0\\2x_0+2y_0-6=0\end{cases}$$

得 $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{5}}{5}&2\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{5}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x-2y=0$ (即 $y'=0$) 与 $2x+y-5=0$ (即 $x'=0$).



第 1 题图

2. 化简二次曲线方程

$$x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=-1<0$, $I_2=|A|=-6<0$, $I_3=\begin{vmatrix}1&-2&5\\-2&-2&2\\5&2&0\end{vmatrix}=6>0$. 此曲线是双曲线. A 的特征值是方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. 故简化后的方程为 $2x'^2-3y'^2-1=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{y'^2}{\frac{1}{3}}=1$.

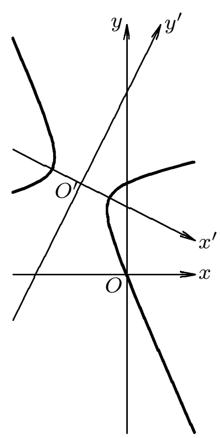
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 2 与 -3 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{2\sqrt5}{5},-\dfrac{\sqrt5}{5}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt5}{5},\dfrac{2\sqrt5}{5}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt5}{5}&\dfrac{\sqrt5}{5}\\-\dfrac{\sqrt5}{5}&\dfrac{2\sqrt5}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$. 再求曲线的中心 (即新坐标系的原点) $O'(x_0,y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases}x_0-2y_0+5=0\\-2x_0-2y_0+2=0\end{cases}$$

得 $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt5}{5}&\dfrac{\sqrt5}{5}&-1\\-\dfrac{\sqrt5}{5}&\dfrac{2\sqrt5}{5}&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x+2y-3=0$ 与 $2x-y+4=0$.



第 2 题图

3. 化简二次曲线方程

$$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0,$$

并作出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=2>0$, $I_2=|A|=-\dfrac{5}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix}1&-\dfrac{3}{2}&5\\-\dfrac{3}{2}&1&-5\\5&-5&21\end{vmatrix}=-\dfrac{5}{4}<0$. 此曲线是双曲线. A 的特征值是方程 $\lambda^2-2\lambda-\dfrac{5}{4}=0$ 的根, 解得

$\lambda_1=\dfrac{5}{2}$, $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. 故简化后的方程为 $\dfrac{5}{2}x'^2-\dfrac{1}{2}y'^2+1=0$, 即 $\dfrac{y'^2}{2}-\dfrac{x'^2}{\frac{2}{5}}=1$.

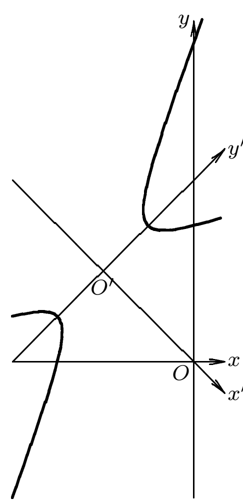
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 $\dfrac{5}{2}$ 与 $-\dfrac{1}{2}$ 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$. 再求曲线的中心(即新坐标系的原点) $O'(x_0,y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases} x_0-\dfrac{3}{2}y_0+5=0\\ -\dfrac{3}{2}x_0+y_0-5=0\end{cases}$$

得 $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -2\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x+y=0$ 与 $x-y+4=0$.



第3题图

4. 化简二次曲线方程

$$4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=5>0$, $I_2=|A|=0$, $I_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -4\\ 3 & -4 & 3\end{vmatrix}=-25<0$. 此曲线是抛物线. A的特征值是方程$\lambda^2-5\lambda=0$的根, 解得$\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$. 对应于特征根0与5的单位特征向量分别是$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$与$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以$T=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

即 $b_1' = -\sqrt{5}$, $b_2' = -2\sqrt{5}$. 取

$$X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2'^2 - \lambda_2 c}{2b_1'\lambda_2} \\ -\dfrac{b_2'}{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

用 X_0 作平移坐标变换

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix},$$

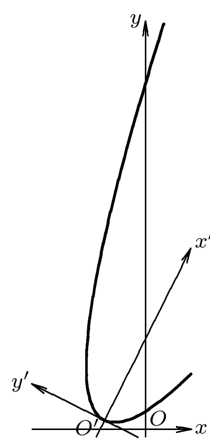
可得

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即方程化简为 $5y''^2 - 2\sqrt{5}x'' = 0$. 其简化方程为 $y''^2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x''$. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & TX_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{9}{10} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这条抛物线的顶点坐标是 $TX_0 = \left(-\dfrac{9}{10}, \dfrac{1}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. 新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $2x - y + 2 = 0$ 与 $2x + 4y + 1 = 0$.



第 4 题图

5. 化简下列二次曲线的方程, 并指出它们是什么曲线:

(1) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y = 0$;

(2) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$.

解: (1) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 因此 $I_1 = \mathrm{Tr}(A) = 5 > 0$, $I_2 = |A| = 0$, $I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. 为确定曲线的类型需要进一步计算. A 的特征值是方程 $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ 的根, 解得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. 对应于特征根 0 与 5 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以

$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -\sqrt{5}\\ 0 & -\sqrt{5} & 0\end{pmatrix}.$$

即 $b_1'=0$, $b_2'=-\sqrt{5}$. 取 $X_0=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{b_2'}{\lambda_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 用 X_0 作平移坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ X_0^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -\sqrt{5}\\ 0 & -\sqrt{5} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & X_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

即方程化简为 $5y''^2-1=0$, 即 $y''=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, 这是一对平行直线. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}X\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & TX_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X''\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ 1\end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=2>0$, $I_2=|A|=0$, $I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$. 为确定曲线的类型需要进一步计算. A 的特征值是方程 $\lambda^2-2\lambda=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. 对应于特征根 0 与 2 的单位特征向量分别是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & -3\end{pmatrix}.$$

即 $b_1'=0$, $b_2'=-\sqrt{2}$. 取 $X_0=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{b_2'}{\lambda_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 用 X_0 作平移坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ X_0^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & X_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

方程化简为 $2y''^2-4=0$, 即 $y''=\pm\sqrt{2}$, 这是一对平行直线. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}X\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & TX_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X''\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ 1\end{pmatrix}.$$

6. 求下列二次曲线的渐近线:

(1) $6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$;

(2) $2xy-4x-2y+3=0$.

解: (1) 矩阵$A=\begin{pmatrix}6 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 因此$I_2=|A|=-\frac{25}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix}6 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=\frac{25}{4}>0$. 此曲线是双曲线. 曲线的中心$(x_0,y_0)$满足线性方程组

$$\begin{cases}6x_0-\frac{1}{2}y_0+\frac{3}{2}=0\\ -\frac{1}{2}x_0-y_0+\frac{1}{2}=0\end{cases}$$

得$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$. 渐近线方程为

$$6\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{3}{5}\right)-\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=0.$$

上式可分解为

$$\left(3\left(x+\frac{1}{5}\right)+\left(y-\frac{3}{5}\right)\right)\left(2\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(y-\frac{3}{5}\right)\right)=0,$$

所以渐近线方程为$3x+y=0$和$2x-y+1=0$.

(2) 矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}$, 因此$I_2=|A|=-1<0$, $I_3=\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=1>0$. 此曲线是双曲线. 曲线的中心$(x_0,y_0)$满足线性方程组

$$\begin{cases}y_0-2=0\\ x_0-1=0\end{cases}$$

得$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. 渐近线方程为$2(x-1)(y-2)=0$, 即$x=1$和$y=2$.

7. 就λ的值讨论方程

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$$

所表示的曲线形状.

解: 矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, 因此$I_1=\mathrm{Tr}(A)=2\lambda$, $I_2=|A|=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $I_3=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & 5\end{vmatrix}=(5\lambda+3)(\lambda-1)$. 分几种情况来讨论.

(i) 当$\lambda\neq\pm1$时, $I_2\neq0$. 又可分为两种情况. (a) $\lambda>1$或$\lambda<-1$, 此时$I_2>0$. 当$\lambda>1$时, I_1与I_3同号, 曲线是虚椭圆; 当$\lambda<-1$时, I_1与I_3异号, 曲线是椭圆. (b) $-1<\lambda<1$, 此时$I_2<0$. 当$\lambda=-\frac{3}{5}$时, $I_3=0$, 曲线为一对相交直线; 而当$\lambda\neq-\frac{3}{5}$时, 曲线总是双曲线.

(ii) 当$\lambda=-1$时, $I_2=0$, $I_3\neq0$, 曲线是抛物线.

(iii) 当$\lambda=1$时, $I_2=I_3=0$, 利用半不变量$K_1=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10\lambda-2=8>0$, 可知曲线是一对虚平行直线.

8. 就λ的值讨论方程

$$\lambda x^2+2\lambda xy+y^2-2x-2\lambda y+\lambda=0$$

所表示曲线的形状.

解: 矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ -\lambda\end{pmatrix}$, 因此$I_1=\mathrm{Tr}(A)=1+\lambda$, $I_2=|A|=\lambda(1-\lambda)$, $I_3=$

$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(2\lambda+1)$. 分几种情况来讨论.

(i) 当 $\lambda \neq 1, 0$ 时, $I_2 \neq 0$. 又可分为两种情况. (a) $0<\lambda<1$, 此时 $I_2>0$, $I_1>0$, $I_3<0$, 曲线是椭圆; (b) $\lambda<0$ 或 $\lambda>1$, 此时 $I_2<0$. 仅当 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 时, $I_3=0$, 曲线为一对相交直线; 而当 $\lambda\neq-\dfrac{1}{2}$ 时, 曲线总是双曲线.

(ii) 当 $\lambda=0$ 时, $I_2=0$, $I_3\neq 0$, 曲线是抛物线.

(iii) 当 $\lambda=1$ 时, $I_2=I_3=0$, 利用半不变量 $K_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, 可知曲线是一对重合直线.

9. 已知方程 $(A_1x+B_1y+C_1)^2+2(A_2x+B_2y+C_2)=0$, 其中 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, $A_1A_2+B_1B_2=0$.

(1) 证明此方程表示一条抛物线;

(2) 求出对称轴的方程.

解: (1) 设此曲线方程是关于直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 的. 由于 $A_1A_2+B_1B_2=0$, 因此直线 $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 互相正交. 不妨设 $A_1B_2-A_2B_1>0$, 令 $\Delta_1=\sqrt{A_1^2+B_1^2}$, $\Delta_2=\sqrt{A_2^2+B_2^2}$, 则 L_1, L_2 的单位方向向量 $\eta_1'=\left(\dfrac{A_1}{\Delta_1},\dfrac{B_1}{\Delta_1}\right)$ 与 $\eta_2'=\left(\dfrac{A_2}{\Delta_2},\dfrac{B_2}{\Delta_2}\right)$ 构成一个规范正交组. 令 $T=\begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{\Delta_1} & \dfrac{A_2}{\Delta_2} \\ \dfrac{B_1}{\Delta_1} & \dfrac{B_2}{\Delta_2} \end{pmatrix}$, 则有 $(\eta_1',\eta_2')=(\eta_1,\eta_2)T$, T 是一个正交矩阵, 且 $|T|=1$. 因此 η_1',η_2' 构成一个右手系.

如果令

$$\begin{cases} x'=\dfrac{A_1}{\Delta_1}x+\dfrac{B_1}{\Delta_1}y+\dfrac{C_1}{\Delta_1} \\ y'=\dfrac{A_2}{\Delta_2}x+\dfrac{B_2}{\Delta_2}y+\dfrac{C_2}{\Delta_2}, \end{cases}$$

就有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{\Delta_1} & \dfrac{B_1}{\Delta_1} & \dfrac{C_1}{\Delta_1} \\ \dfrac{A_2}{\Delta_2} & \dfrac{B_2}{\Delta_2} & \dfrac{C_2}{\Delta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

这是一个直角坐标变换公式. 在新的坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 中, 曲线的方程化简为 $\Delta_1^2x'^2+2\Delta_2Y'=0$. 显然 $\Delta_1\neq 0$, 因此 $x'^2+\dfrac{2\Delta_2}{\Delta_1^2}y'=0$, 这是一条抛物线.

(2) 此抛物线的对称轴是 y' 轴, 方程为 $x'=0$, 即 $A_1x+B_1y+C_1=0$.

10. 设二次曲线方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

证明:

(1) 二次曲线为一条等轴双曲线或两条相互垂直的直线的充分必要条件是 $I_1=0$;

(2) 二次曲线为圆的充分必要条件是 $I_1^2=4I_2$, $I_1I_3<0$;

(3) 二次曲线若表示一个椭圆, 试求该椭圆面积.

证明: (1) 若此二次曲线为等轴双曲线, 则由于 I_1 是正交不变量, 从等轴双曲线的标准方程易知 $I_1=0$; 若是两条互相垂直的直线, 则其标准方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=0$, 且 $\lambda_1\lambda_2<0$, 即 $y'=\pm\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}x'$ 表示两条互相垂直的直线, 因此 $\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\right)=-1$, 推得 $\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}=1$, 即 $I_1=0$.

反之, 若 $I_1=0$, 则因 $I_1=\lambda_1+\lambda_2=0$, 可知 $\lambda_2=-\lambda_1(\neq 0)$, 并且 $I_2=-\lambda_1^2<0$. 由简化方程 $\lambda_1(x'^2-y'^2)+\dfrac{I_3}{I_2}=0$ 可知, 当 $I_3\neq 0$ 时曲线是等轴双曲线; 当 $I_3=0$ 时曲线是两条互相垂直的直线.

(2) 若此二次曲线是圆, 则必有 $I_2>0$, $I_1\cdot I_3<0$ (椭圆型), 经过适当选择直角坐标系知简化方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{I_3}{I_2}=0$. 因为是圆, 所以 $\lambda_1=\lambda_2$, 于是 $I_1=2\lambda_1$, $I_2=\lambda_1^2$, 所以 $I_1^2=4I_2$.

反之, 若 $I_1\cdot I_3<0$, $I_1^2=4I_2$, 可知 $I_2>0$, 曲线是椭圆. 又因 $I_1=\lambda_1+\lambda_2$, $I_2=\lambda_1\lambda_2$, 由 $I_1^2=4I_2$ 可得 $\lambda_1=\lambda_2$, 故此曲线是圆.

(3) 在标准椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 中, 椭圆的面积 $S=\pi ab$. 若曲线表示一个椭圆, 则适当选择坐标系之后可得它的简化方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{I_3}{I_2}=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{\dfrac{-I_3}{I_2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_1}}+\dfrac{y'^2}{\dfrac{-I_3}{I_2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_2}}=1$. 所以面积 $S=\pi\sqrt{\dfrac{I_3^2}{I_2^2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}}=\dfrac{\pi|I_3|\sqrt{I_2}}{I_2^2}$.

11. 已知椭圆长轴和短轴分别在直线 $x+y-1=0$ 和 $x-y+1=0$ 上, 且长短轴长分别为 4 与 2. 求此椭圆的方程.

解: 不妨设长轴在 x' 轴 (即 $y'=0$) 上, 短轴在 y' 轴 (即 $x'=0$) 上, 作变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

其左上角的子矩阵 $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 是行列式等于 1 的正交矩阵, 因此这是右手直角坐标系间的坐标变换. 在新的坐标系里曲线的方程应为 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{1}=1$. 利用坐标变换公式, 可得在旧坐标系下的方程: $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$, 即为 $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$.

习 题 9–3

1. 判别下列对应法则是否为实数域 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 并指出哪些是单射? 满射?

(1) $x\mapsto x^2$;　　(2) $x\mapsto x^3$;　　(3) $x\mapsto |x|$;

(4) $x\mapsto 2^x$;　　(5) $x\mapsto \sin(x^2)$;　　(6) $x\mapsto \tan x$.

解: (1)–(5) 都是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 其中 (2), (4) 是单射, (2) 是满射, (6) 不是映射.

2. 设 S 表示平面上所有点组成的集合. L 是一条直线, 把平面上每个点 $P(x,y)$ 对应到它关于 L 的对称点 $P'(x',y')$, 这是 S 到自身的一个变换, 称为关于直线 L 的反射, 称 L 是反射轴.

(1) 求出平面关于直线 $y=x$ 的反射公式;

(2) 设反射轴为 $Ax+By+C=0$. 求出这时的反射公式;

(3) 设 $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2$ 是关于平面上两条平行直线 L_1,L_2 的反射. 证明 $\mathscr{S}_2\mathscr{S}_1$ 是一个平移.

解: (1) 已知 $P(x,y)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(x',y')$. 则

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=\dfrac{y+y'}{2} \\ \dfrac{y-y'}{x-x'}=-1, \end{cases}$$

解得反射公式为

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$

(2) 点 $P(x,y)$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点为 $P'(x'y')$. 则

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)+B\left(\dfrac{y+y'}{2}\right)+C=0 \\ A(y-y')=B(x-x'), \end{cases}$$

解得反射公式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{A^2+B^2}\left((B^2-A^2)x-2ABy-2AC\right) \\ y' = \dfrac{1}{A^2+B^2}\left(-2ABx+(A^2-B^2)y-2BC\right). \end{cases}$$

(3) 以 L_1 作为 x 轴建立坐标系, 则 L_1, L_2 的方程分别为 $y=0$ 与 $y+C=0$, 其中 $C\neq 0$. 记 $\mathscr{S}_1(P)=P'(x',y')$, $\mathscr{S}_2(P')=P''(x'',y'')$. 由 (2) 知,

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y'-2C. \end{cases}$$

代入后算得

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y-2C. \end{cases}$$

可见 $\mathscr{S}_2\mathscr{S}_1$ 是一个平移.

3. 设 $\mathscr{M}$ 是变换 $(x,y)\mapsto(x',y')$:

$$\begin{cases} x' = 2x+3y+2 \\ y' = -x+2y-3 \end{cases}$$

问:

(1) 点 $(-1,1)$ 被变成了什么点?

(2) 直线 $y=2$ 被变成了什么图形?

(3) 点 $(9,-3)$ 是由哪个点变过来的?

解: (1) 点 $(-1,1)$ 被变为 $(3,0)$.

(2) 直线 $y=2$ 上的点是 $(t,2)$ $(t\in\mathbb{R})$. 而 $\mathscr{M}((t,2))=(2t+8,-t+1)$, 因此变换后的点成一条直线, 其参数方程为 $\begin{cases} x=8+2t \\ y=1-t, \end{cases}$ 或 $x+2y-10=0$.

(3) 解方程组 $\begin{cases} 2x+3y+2=9 \\ -x+2y-3=-3 \end{cases}$ 得 $x=2$, $y=1$. 故 $\mathscr{M}((2,1))=(9,-3)$.

4. 在直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中, 求出平面绕点 $M_0(x_0,y_0)$ 旋转 θ_0 角的变换公式.

解: 以 $M_0(x_0,y_0)$ 为原点建立新直角坐标系 $[M_0;\eta_1,\eta_2]$, 则绕点 M_0 旋转 θ_0 角的变换在新坐标下的变换公式为

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \cos\theta_0\tilde{x}-\sin\theta_0\tilde{y} \\ \tilde{y}' = \sin\theta_0\tilde{x}+\cos\theta_0\tilde{y}. \end{cases}$$

设点 $P(x,y)$ 经旋转变为 $P'(x',y')$, 根据平移坐标变换的公式, P, P' 点的新坐标应为 $(x-x_0,y-y_0)$, $(x'-x_0,y'-y_0)$. 代入上面的公式即得

$$\begin{cases} x' = \cos\theta_0(x-x_0)-\sin\theta_0(y-y_0)+x_0 \\ y' = \sin\theta_0(x-x_0)+\cos\theta_0(y-y_0)+y_0. \end{cases}$$

5. 若把曲线 $2xy=a^2$ 绕原点旋转 $\dfrac{\pi}{4}$, 求新的曲线方程.

解: 若 $P(x,y)$ 点旋转到了 $P'(x',y')$ 点, 则 P 点可由 P' 点经旋转 $-\frac{\pi}{4}$ 得到. 因此

$$\begin{cases} x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)x'-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ y=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)x'+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y'), \end{cases}$$

代入原方程 $2xy=a^2$ 即得 $y'^2-x'^2=a^2$.

6. 平面的等距变换 $\mathscr{M}$ 若有两个不动点 A,B. 则直线 AB 上每个点都是不动点.

解: 设 C 点在直线 AB 上, 则根据 C 是否位于线段 AB 上, 有 $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$ 或 $|d(C,A)-d(C,B)|=d(A,B)$. 令 $\mathscr{M}(C)=C'$, 则因 A,B 是 $\mathscr{M}$ 的不动点, 有 $d(A,C')+d(C',B)=d(A,B)$ 或 $|d(C',A)-d(C',B)|=d(A,B)$. 如果 A,B,C' 不共线, 则它们构成一个三角形, 而三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 与上述等式矛盾.

7. 求下述仿射变换的不动点:

$$\begin{cases} x'=3x-y-5 \\ y'=2x+y+1. \end{cases}$$

解: 解方程组 $\begin{cases} x=3x-y-5 \\ y=2x+y+1, \end{cases}$ 得 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-6$, 即不动点仅有 $\left(-\frac{1}{2},-6\right)$ 一个.

8. 若在仿射变换 $\mathscr{A}$ 下一条直线的象与其自身重合, 则称这条直线为 $\mathscr{A}$ 的不变直线. 求下述仿射变换的不变直线:

$$\begin{cases} x'=7x-y+1 \\ y'=4x+2y+4. \end{cases}$$

解: 仿射变换把直线变成直线. 设不变直线为 $L: Ax+By+C=0$. 若 $P(x,y)\in L$, 则 $P'(x',y')=\mathscr{A}(P)\in L$, 即 $Ax'+By'+C=0$. 代入化简后得

$$(7A+4B)x+(2B-A)y+(A+4B+C)=0.$$

因为 L 上的任意点都满足此方程, 说明这个方程也是 L 的方程. 因此有

$$\frac{7A+4B}{A}=\frac{2B-A}{B}=\frac{A+4B+C}{C}=k.$$

解得 $k=6$ 或 $k=3$. 所以

$$\begin{cases} A=-4B \\ C=0 \end{cases} \quad \equiv \quad \begin{cases} A=-B \\ C=\frac{3}{2}B, \end{cases}$$

故不变直线有两条: $-4x+y=0$ 和 $-2x+2y+3=0$.

9. 设在平面上给出了两个三角形 ABC 和 DEF. 问有几个仿射变换把 $\triangle ABC$ 变成 $\triangle DEF$?

解: 由命题 3.3(9) 可知有 $3!=6$ 个不同的仿射变换.

10. 证明: 平面上任给两个直角标架 (I) 和 (II), 总存在唯一的等距变换把 (I) 变成 (II).

证明: 命题 3.2(6) 已经蕴含了满足条件的等距变换的唯一性. 设有直角标架 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 与 $[O';\eta_1',\eta_2']$, 则规范正交基 η_1,η_2 与 η_1',η_2' 可以确定唯一的正交变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}(\eta_i)=\eta_i'$, $i=1,2$. 设向量 $\delta=\overrightarrow{OO'}$, 又可定义一个平移变换 $\mathscr{T}_\delta$. 于是复合变换 $\mathscr{T}_\delta\mathscr{A}$ 是一个等距变换, 它把直角标架 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 映到 $[O';\eta_1',\eta_2']$. 存在性获证.

习 题 9–4

1. 证明: 平面上绕一个固定点转 90°、180°、270° 的三个旋转 $\mathscr{R}_1$、$\mathscr{R}_2$、$\mathscr{R}_3$ 和恒同变换 $\mathscr{E}$ 组成一个变换群.

证明: 记 $\mathscr{R}_0=E$, 则因 $\mathscr{R}_i\mathscr{R}_j=\begin{cases}\mathscr{R}_{i+j} & 若\ i+j\leqslant 3,\\ \mathscr{R}_{i+j-4} & 若\ i+j\geqslant 4,\end{cases}$ 群的性质 (1) 被满足; 性质 (2) 则是显然的; 又因 $\mathscr{R}_i^{-1}=\mathscr{R}_{4-i}$, 性质 (3) 也被满足, 所以这是一个群.

2. 当 a,b 取为任意的不全为零的数时. 下列所有的仿射变换组成的集合是否为一个群?

$$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=bx+ay.\end{cases}$$

解: 这个仿射变换对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$. 设 $A_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$, 则 $A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2\\ a_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2+b_1b_2\end{pmatrix}$ 也是这个集合的元素, 因此性质 (1) 被满足; 当 $a=1,\ b=0$ 时就是恒同变换, 因此 (2) 也满足; $A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a^2-b^2} & -\dfrac{b}{a^2-b^2}\\ -\dfrac{b}{a^2-b^2} & \dfrac{a}{a^2-b^2}\end{pmatrix}$ 也是集合的元素, 因此 (3) 也满足. 这个集合确实是群.

习 题 9–5

1. 求二次曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点 $(8,0)$ 的直径方程, 并求出其共轭直径的方程.

解: 该二次曲线方程可写成

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{21}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}}=1,$$

是椭圆.

作变换

$$\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{42}}{21}(x-2)\\ y'=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}\left(y-\dfrac{1}{2}\right),\end{cases}\qquad 即: \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{42}}{2}x'+2\\ y=\dfrac{\sqrt{21}}{2}y'+\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

则此变换将圆 $x'^2+y'^2=1$ 变为椭圆

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{21}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}}=1,$$

且将点 $\left(\dfrac{2\sqrt{42}}{7},-\dfrac{\sqrt{21}}{21}\right)$ 变成 $(8,0)$. 所以此变换将圆的直径 $y'=-\dfrac{\sqrt{2}}{12}x'$ 变为椭圆的过点 $(8,0)$ 的直径: $x+12y-8=0$.

与圆直径 $y'=-\dfrac{\sqrt{2}}{12}x'$ 垂直的直径 $y'=6\sqrt{2}x'$ 被此变换变成与椭圆的直径 $x+12y-8=0$ 共轭的直径 $12x-2y-23=0$.

2. 设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

试求直径 $y=\dfrac{kb}{a}x\ (|k|<1)$ 的共轭直径 (所给直径的平行弦的中点连线).

解: 根据对称性, 双曲线的中心是所有通过它的弦的中点, 因此所有的直径一定通过它的中心. 为确定共轭直径, 只需再找一个点. 作一条平行弦 $y=\dfrac{kb}{a}x+t$, 它与双曲线的交点满足 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{\left(\frac{kb}{a}x+t\right)^2}{b^2}=1$, 化简为 $b^2(1-k^2)x^2-2abktx-a^2(b^2+t^2)$. 因此平行弦的中点的横坐标是 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{akt}{b(1-k^2)}$. 纵

坐标为 $\frac{kb}{a}\cdot\frac{akt}{b(1-k^2)}+t=\frac{t}{1-k^2}$. 得到共轭直径的斜率为 $\frac{t}{1-k^2}\cdot\frac{b(1-k^2)}{akt}=\frac{b}{ak}$, 共轭直径的方程为 $y=\frac{b}{ak}x$. 可见双曲线的直径与共轭直径的斜率的乘积等于常数 $\frac{b^2}{a^2}$.

3. 已知曲线 $xy-y^2-2x+3y-1=0$ 的直径与 y 轴平行, 求它的方程, 并求出这直径的共轭直径.

解: 因为 $I_2=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\\ -1 & \frac{3}{2} & -1\end{vmatrix}\neq 0$, 所以该曲线是双曲线. 为求它的中心, 解以下方程组:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}y_0-1=0\\ \frac{1}{2}x_0-y_0+\frac{3}{2}=0,\end{cases}$$

得 $x_0=1$, $y_0=2$. 由于已给直径与 y 轴平行, 它的方程是 $x=1$.

作一条平行弦 $x=t$, 它与双曲线的交点坐标应满足 $ty-y^2-2t+3y-1=0$, 因此交点的中点的纵坐标等于 $\frac{t+3}{2}$, 而横坐标为 t. 故共轭直径的方程为 $y=\frac{\frac{3+t}{2}-2}{t-1}(x-1)+2$, 即 $x-2y+3=0$.

4. 试证明: 抛物线的所有直径构成与对称轴平行的直线束.

证明: 设此抛物线的标准方程是 $y^2=2px$ $(p>0)$. 设抛物线的直径是由平行于 $y=kx$ 的平行弦的中点构成的. 设平行弦的方程是 $y=kx+t$, 则它与抛物线交点的横坐标满足方程 $(kx+t)^2=2px$, 即 $k^2x^2+2(kt-p)x+t^2=0$. 由此可得中点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{p-kt}{k^2}$, 纵坐标为 $k\cdot\frac{p-kt}{k^2}+t=\frac{p}{k}$, 是一个常数. 即直径平行于 x 轴.

习 题 9–6

1. 已知 3 个平面:

$$\begin{aligned}\Pi_1:&\quad x+2y-2z+3=0,\\ \Pi_2:&\quad 2x+y+2z-1=0,\\ \Pi_3:&\quad 2x-2y-z-3=0,\end{aligned}$$

分别取为 $O'x'y'$, $O'y'z'$, $O'x'z'$ 平面. 求直角坐标变换公式, 并写出新原点的旧坐标与旧原点的新坐标.

解: 设 $P(x,y,z)$ 在新坐标系下的坐标是 (x',y',z'), 则 P 到 3 个坐标平面的距离等于这 3 个坐标的绝对值, 即

$$\begin{cases}|x'|=\frac{|2x+y+2z-1|}{3}\\ |y'|=\frac{|2x-2y-z-3|}{3}\\ |z'|=\frac{|x+2y-2z+3|}{3}.\end{cases}$$

设 $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 由于 T 是正交矩阵且 $|T|=1$, 我们可以把坐标变换公式取为:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}.$$

这是右手系之间的直角坐标变换. 显然旧坐标原点 O 的新坐标是 $\left(-\frac{1}{3},-1,1\right)$.

旧坐标用新坐标表示的公式为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{11}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此新坐标原点 O' 的旧坐标是 $\left(\frac{5}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

2. 化简二次曲面的方程:

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 10 = 0,$$

并指出这是什么曲面.

解: 由题设,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

矩阵 A 的特征多项式是 $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36$, A 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. 与这 3 个特征值对应的单位特征向量 (因特征值不同, 它们互相正交) 分别是 $\xi_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\xi_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\xi_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

以这 3 个特征向量的坐标作为列向量构造矩阵

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

则 T 一定是正交矩阵, 又因 $|T| = 1$, T 满足我们的要求. 即有 $T^{\mathrm{T}}AT = \mathrm{diag}(6, 3, -2)$.

再求 $AX + B = 0$ 的解 Δ, 相当于解线性方程组

$$\begin{cases} x - 3y - z = 3 \\ -3x + y + z = -3 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$$

得 $\Delta = (1\ \ -1\ 1)^{\mathrm{T}}$. 因此作直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

可使原方程化简为:

$$6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 + 1 = 0.$$

这是一个双叶双曲面.

3. 化简二次曲面的方程:

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0,$$

并指出这是什么曲面.

解: 由题设,

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix},$$

矩阵 A 的特征多项式是 $\chi_A(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda$, A 的特征值为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=0$. 与这 3 个特征值对应的单位特征向量 (因特征值不同, 它们互相正交) 分别是 $\xi_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\xi_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\xi_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

以这 3 个特征向量的坐标作为列向量构造矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{pmatrix},$$

则 T 一定是正交矩阵, 可是 $|T|=-1$, 因此必须使其中某一列变号, 重取

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{pmatrix},$$

T 满足我们的要求. 即有 $T^{\mathrm{T}}AT=\mathrm{diag}(5,2,0)$.

由于 A 退化, 并且 $2=\mathrm{rank}\,A<\mathrm{rank}(A\ B)=3$, 我们先作旋转坐标变换 $\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\1\end{pmatrix}$ 得到:

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&2&0&\frac{\sqrt{6}}{2}\\0&0&0&\frac{5\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{6}}{2}&\frac{5\sqrt{2}}{2}&3\end{pmatrix}.$$

即 $5x'^2+2y'^2+\sqrt{6}y'+5\sqrt{2}z'+3=0$. 配方为 $5x'^2+2\left(y'+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+5\sqrt{2}\left(z'+\frac{9\sqrt{2}}{40}\right)=0$. 因此再作平移坐标变换

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\0&0&1&-\frac{9\sqrt{2}}{40}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\\1\end{pmatrix}$$

可把方程化简为

$$5x''^2+2y''^2+5\sqrt{2}z''=0.$$

这是一个椭圆抛物面.

相应的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{40}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{19}{40}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\\1\end{pmatrix}.$$