习 题 解 答

第八章　线性空间上的函数

习 题 8–1

1. 设 V 是区间 $[-1,1]$ 上全体连续实函数所组成的线性空间. 证明:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f(x) & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

是 V 上的一个线性函数.

证明: 显然 ψ 是 V 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 且对任意的 $f(x), g(x) \in V$, $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\psi(f(x)+g(x)) = \int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \psi(f(x)) + \psi(g(x)),$$

$$\psi(kf(x)) = \int_{-1}^{1} kf(x)\mathrm{d}x = k\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = k\psi(f(x)).$$

所以 ψ 是 V 上的一个线性函数.

2. 设 V 是数域 K 上的一个 3 维线性空间, η_1, η_2, η_3 是它的一个基, f 是 V 上的一个线性函数, 且

$$f(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) = 2,\ f(\eta_1 + \eta_3) = 2,\ f(-\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = -1.$$

求 $f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3)$.

解: 令

$$\begin{cases} \alpha_1 = \eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 \\ \alpha_2 = \eta_1 + \eta_3 \\ \alpha_3 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \end{cases}$$

则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned} f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) &= (f(\eta_1), f(\eta_2), f(\eta_3))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3))A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (2, 2, -1)\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3. \end{aligned}$$

3. V 及 η_1, η_2, η_3 同上题. 试求一线性函数 g, 使

$$g(3\eta_1 + \eta_2) = 2,\ g(\eta_2 - \eta_3) = 1,\ g(2\eta_1 + \eta_3) = 2.$$

解: 设

$$g(\eta_1) = a, \quad g(\eta_2) = b, \quad g(\eta_3) = c,$$

则由已知得

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ b - c = 1 \\ 2a + c = 2. \end{cases}$$

解得 $a=-1$, $b=5$, $c=4$. 从而所求的线性函数为

$$g(x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3)=-x_1+5x_2+4x_3.$$

4. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是它的一个基, $a_1,\cdots,a_n$ 是 K 中任意 n 个数. 证明: 存在 V 上唯一的线性函数 f, 使

$$f(\eta_i)=a_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

证明: (存在性) 设 $\alpha=x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n\in V$. 令

$$\begin{aligned} f:\ V &\longrightarrow K \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha)=\sum_{i=1}^n a_ix_i \end{aligned}$$

容易证明 f 是 V 上线性函数, 且满足所需条件.

(唯一性) 设 g 为 V 的线性函数, 使

$$g(\eta_i)=a_i,\qquad i=1,\cdots,n.$$

则对任意的 $\alpha=x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n\in V$ 有

$$g(\alpha)=\sum_{i=1}^n x_ig(\eta_i)=\sum_{i=1}^n x_ia_i=f(\alpha).$$

这就证明了唯一性.

5. 设 $V=K^3$, $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$, $\beta=(y_1,y_2,y_3)$, 判断下列二元函数 f 是否为 V 上的双线性函数:

(1) $f(\alpha,\beta)=2x_1y_1+x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$;

(2) $f(\alpha,\beta)=(x_1-y_2)^2+x_2y_1$;

(3) $f(\alpha,\beta)=c,\quad c\in K$;

(4) $f(\alpha,\beta)=(2x_1+x_2-3x_3)(y_1-y_2+y_3)$.

解: (1) 是.

(2) 否.

(3) 当 $c\neq 0$ 时, 否; 当 $c=0$ 时, 是.

(4) 是.

6. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 令

$$W_1=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\},$$

$$W_2=\{\alpha\in V\mid f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in V\}.$$

证明: W_1 与 W_2 都是 V 的线性子空间, 且 $\dim W_1=\dim W_2$.

证明: (1) 由于对任意的 $\beta\in V$ 有 $f(0,\beta)=0$, 因此 $0\in W_1$, W_1 非空. 又对任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in W_1$, $k\in K$ 以及任意的 $\beta\in V$ 有

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=0,$$

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0,$$

因此

$$\alpha_1+\alpha_2\in W_1,\qquad k\alpha_1\in W_1.$$

所以 W_1 是 V 的线性子空间. 同理可证 W_2 也是 V 的线性子空间.

(2) 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的基, f 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为 B. 则对任意的向量

$$\alpha=(x_1\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\qquad \beta=(y_1\ \cdots\ y_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

$$f(\alpha,\beta)=(x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

从而

$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\eta_i\in W_1 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=0\ \ \forall(y_1,\cdots,y_n)\in K^n \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B=0 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)$ 为齐次线性方程组 $XB=0$ 的解.

所以 $\dim W_1=$ 齐次线性方程组 $XB=0$ 的解空间的维数 $=n-\operatorname{rank}B$.

同理可证 $\dim W_2=n-\operatorname{rank}B$, 所以 $\dim W_1=\dim W_2$.

7. 设 f 为 K^n 上的一个二元函数, 证明: f 为 K^n 上的双线性函数的充分必要条件是存在矩阵 $A\in M_n(K)$, 使

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\quad X,Y\in K^n.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 设 f 为 K^n 上双线性函数, 取 f 的度量矩阵 A, 则 $A\in M_n(K)$, 且

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n.$$

$(\Leftarrow)$ 如二元函数满足

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n,$$

则 f 显然是 K^n 上双线性函数.

8. 对于第 5 题中的双线性函数, 试求相应的度量矩阵.

解: (1) $\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(3) 当 $c=0$ 时, 度量矩阵 $=0$.

(4) $\begin{pmatrix}2&-2&2\\1&-1&1\\-3&3&-3\end{pmatrix}$.

9. 设 $V=K^4$, 如下定义 V 的二元函数 f:

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4,$$

其中

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad \beta=(y_1,y_2,y_3,y_4).$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(0,2,1,0),$$
$$\eta_3=(1,1,-2,1),\quad \eta_4=(0,0,1,2)$$

下的度量矩阵;

(3) 找出一个满足 $f(\alpha,\alpha)=0$ 的向量 $\alpha\neq 0$.

解: (1) 代入验证即可. 证略.

(2) 我们有

$$(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&2&1&0\\-1&1&-2&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}$$

而 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

因此 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&2&1&0\\1&1&-2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&2&1&0\\-1&1&-2&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&0&-1\\3&3&4&-1\\0&4&-3&0\\-1&-1&0&-5\end{pmatrix}.$$

(3) 取 $\alpha=(1,1,1,1)$, 显然有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

10. 设 $V=K^4$, $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,

$$f(\alpha,\beta)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3.$$

(1) 求 f 在基

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(1,2,1,-1),$$
$$\eta_3=(-1,1,2,1),\quad \eta_4=(1,-1,1,2)$$

下的度量矩阵;

(2) 另取 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)T,$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

求 f 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵.

解: (1) 把 f 在自然基下的度量矩阵记为 B, 把由自然基到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵记为 A, 则

$$B=\begin{pmatrix}0&3&0&0\\-5&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-4&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&-1\\-1&-1&2&1\\1&-1&1&2\end{pmatrix},$$

于是 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$C=A^{\mathrm{T}}BA=\begin{pmatrix}-1&4&2&-17\\-20&-1&22&-7\\-7&-17&-4&-2\\22&2&-17&-4\end{pmatrix}.$$

(2) f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$D = T^{\mathrm{T}}CT = \begin{pmatrix} -45 & 9 & 39 & -27 \\ 9 & -45 & 9 & -117 \\ -39 & -9 & 5 & 3 \\ 27 & 117 & 3 & 45 \end{pmatrix}.$$

11. 设 f 是 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 证明: f 非退化的充分必要条件是: 从

$$f(\alpha,\beta)=0,\quad 对所有的\ \alpha\in V,$$

可以推出 $\beta=0$.

证明: $(\Rightarrow)$ 令

$$W_1=\{\alpha\in V \mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\},$$
$$W_2=\{\alpha\in V \mid f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in V\}.$$

如 f 非退化, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 $W_1=0$, 从而由习题 6 得 $W_2=0$. 因此由 $f(\alpha,\beta)=0\forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$.

$(\Leftarrow)$ 如 $f(\alpha,\beta)=0\ \ \forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$, 则 $W_2=0$, 同理可得 $W_1=0$, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 f 非退化.

12. 设 $A\in M_m(K)$, $V=M_{m,n}(K)$. 定义 V 上的二元函数 f 如下:

$$f(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY),\quad X,Y\in V.$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵;

(3) 在什么条件下, f 是非退化的.

解: (1) 设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, $Y=(y_{ij})_{m\times n}$, $A=(a_{ij})_m$, 则

$$f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}x_{li}a_{lk}y_{ki},$$

从而知 f 是双线性的.

(2) 由于 $f(E_{st},E_{uv})=\delta_{tv}a_{su}$, 因此 f 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}E & \cdots & a_{1m}E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}E & \cdots & a_{mm}E \end{pmatrix},$$

其中 E 是 n 阶单位方阵.

(3) 由于 $|B|=|A|^n$, 所以 f 非退化 $\iff$ $|B|\neq 0$ $\iff$ $|A|\neq 0$. 即 f 非退化的充分必要条件是 A 是可逆矩阵.

13. 证明: $M_n(K)$ 上的双线性函数

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}\,AB,\quad A,B\in M_n(K)$$

是非退化的.

证明: 设 $A=(a_{ij})\in M_n(K)$. 如果

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}\,AB=0\qquad \forall B\in M_n(K)$$

则 $f(A,E_{ij})=0\ \forall i,j=1,\cdots,n$. 而

$$f(A,E_{ij})=\mathrm{Tr}\,AE_{ij}=a_{ji},$$

所以 $a_{ji}=0$ 对 $i,j=1,\cdots,n$, 即 $A=0$. 因此 f 非退化.

另证: 因为

$$f(A,B)=\operatorname{Tr}AB=\operatorname{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}B)=\operatorname{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}EB),$$

由习题 12(3) 可知 f 非退化.

习 题 8–2

1. 设 f 是线性空间 V 上的对称或反称双线性函数, W 是 V 的真子空间.

证明: 对 $\xi\notin W$, 必有非零向量 $\eta\in W+L(\xi)$, 使对所有的 $\alpha\in W$, 都有 $f(\eta,\alpha)=0$.

证明: 如 $W=0$, 则结论显然成立. 现设 $W\neq 0$. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 则因 $\xi\notin W$, $\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 考察线性方程组

$$\begin{cases} x_0f(\xi,\alpha_1)+x_1f(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_1)=0\\ x_0f(\xi,\alpha_2)+x_1f(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_2)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_0f(\xi,\alpha_s)+x_1f(\alpha_1,\alpha_s)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_s)=0 \end{cases} \tag{*}$$

此齐次线性方程组的方程个数 s 小于未知量个数 $s+1$, 故 (*) 有非零解 $(a_0,a_1,\cdots,a_s)$. 令

$$\eta=a_0\xi+a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s,$$

则 $\eta\in W+L(\xi)$, 且 $\eta\neq 0$ (因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且 $a_0,a_1,\cdots,a_s$ 不全为零). 且由 (*) 知

$$f(\eta,\alpha_i)=0,\qquad i=1,2,\cdots,s.$$

又因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 故对任意的 $\alpha\in W$ 都有 $f(\eta,\alpha)=0$.

2. V 与 f 同上题, W 是 V 的线性子空间, 令

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}.$$

证明: (1) $W^{\perp}$ 是 V 的线性子空间;

(2) 如果 $W\cap W^{\perp}=\{0\}$, 则 $V=W\oplus W^{\perp}$.

证明: (1) 由 $f(0,\beta)=0\ \forall\beta\in W$, 可得 $0\in W^{\perp}$, 因此 $W^{\perp}$ 非空.

对任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in W^{\perp}$, $k\in K$, 则 $\forall\beta\in W$, 有

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=0,$$

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0,$$

因此 $\alpha_1+\alpha_2\in W^{\perp}$, $k\alpha_1\in W^{\perp}$, 故 $W^{\perp}$ 是 V 的线性子空间.

(2) 对任意的 $\xi\notin W$, 由上题所证, 存在 $\eta\neq 0\in W+L(\xi)$, 使得 $f(\eta,\alpha)=0\ \ \forall\alpha\in W$, 即 $\eta\in W^{\perp}$. 记 $\eta=\alpha+a\xi$, 则因 $W\cap W^{\perp}=0$, 必有 $a\neq 0$. 所以

$$\xi=a^{-1}\eta-a^{-1}\alpha\in W^{\perp}+W.$$

证得 $V\subseteq W^{\perp}+W$.

3. 求可逆矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形. 其中 A 为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

解: (1) 取 $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(2) 取 $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(3) 取 $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

(4) 取 $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

4. 证明:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$$

相合, 其中 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排列.

证明: 考察 n 维线性空间 V. 设 f 为 V 上的对称双线性函数, 它在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

易知 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 仍是 V 的基, 且 f 在 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

因此这两个矩阵相合.

5. 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表为 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明: 设 A 是秩为 r 的对称矩阵, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}, \qquad a_i\neq 0.$$

令

$$A_i = T^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_i & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

则 A_i 也是对称矩阵, $\operatorname{rank} A_i = 1$ 且 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$.

6. 设 A 为实矩阵, 证明: $A^{\mathrm{T}}A$ 与 A 的秩相等.

证明: 易知, $A^{\mathrm{T}}A$ 是实对称矩阵. 考察实数域上的齐次线性方程组

$$A^{\mathrm{T}}AX = 0 \tag{1}$$

与

$$AX = 0. \tag{2}$$

显然 (2) 的解都是 (1) 的解.

设 $X \in \mathbb{R}^n$ 为 (1) 的一个解. 令

$$Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则

$$Y^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX = 0,$$

从而

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0.$$

由于 y_i 均为实数, 因此 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, $Y = 0$, 即

$$AX = 0.$$

从而 (1) 的解也都是 (2) 的解. (1) 与 (2) 同解. 由齐次线性方程组解的性质知

$$\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}}A = \operatorname{rank} A.$$

7. 设 A 为正定矩阵, 证明: A^{-1} 与 A^* 都是正定矩阵.

证明: 易知 A^{-1} 与 A^* 都是实对称矩阵. 且 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$. 因 A 正定, 存在可逆实矩阵 C 使 $C^{\mathrm{T}}C = A$. 从而 $A^{-1} = C^{-\mathrm{T}}C^{-1}$ 也正定. 由 $|A| > 0$ 可知 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$ 也正定.

8. 证明: 任意一个双线性函数都可唯一表为一个对称双线性函数和一个反称双线性函数之和.

证明: (1) 设 $f(\alpha, \beta)$ 是一个双线性函数, 易知

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$$

是对称双线性函数,

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)]$$

为反称双线性函数, 且

$$f(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta).$$

(2) 又设

$$f(\alpha, \beta) = g'(\alpha, \beta) + h'(\alpha, \beta),$$

其中 $g'(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数, $h'(\alpha,\beta)$ 是反称双线性函数, 则

$$f(\beta,\alpha)=g'(\beta,\alpha)+h'(\beta,\alpha)=g'(\alpha,\beta)-h'(\alpha,\beta).$$

从而

$$g'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)]=g(\alpha,\beta),$$
$$h'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha)]=h(\alpha,\beta).$$

***9.** 证明: 双线性函数 f 具有正交对称性的充分必要条件是 f 为对称或反称双线性函数.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性.

(1) 如对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则对任意的 $\alpha,\beta\in V$,

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)+f(\beta,\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha).$$

因此 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, f 是反称双线性函数.

(2) 如果存在 $\gamma\in V$ 使 $f(\gamma,\gamma)\neq 0$. 则对任意的 $\alpha\in V$, 由于

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\gamma\right)=f(\alpha,\gamma)-f(\alpha,\gamma)=0,$$

所以 $f\left(\gamma,\alpha-\frac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=0$. 因此

$$f(\alpha,\gamma)=f(\gamma,\alpha). \tag{*}$$

对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 以下再分两种情况讨论:

(a) 如果 $f(\alpha,\gamma)\neq 0$, 则

$$f\left(\alpha,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)-f(\alpha,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma,\alpha\right)=0$, 从而

$$\begin{aligned}0&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\gamma,\alpha)\\&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\alpha,\gamma)\quad\text{由 (*)}\\&=f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

即 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

(b) 如果 $f(\alpha,\gamma)=0$, 则

$$f\left(\alpha+\gamma,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\frac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\alpha+\gamma\right)=0$. 从而

$$f(\beta,\alpha)+f(\beta,\gamma)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0.$$

由 (*) 知 $f(\beta,\gamma)=f(\gamma,\beta)$, 因此 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

由 (a) 和 (b) 可得 f 为对称双线性函数.

***10.** 设 V 是复数域上的线性空间, 其维数 $n\geqslant 2$, f 是 V 上的一个对称双线性函数. 证明:

(1) V 中有非零向量 ξ, 使 $f(\xi,\xi)=0$;

(2) 当 f 是非退化时, 必有线性无关的向量 ξ,η, 满足:

$$f(\xi,\eta)=1,$$
$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$

证明: (1) 由于 $\dim V \geqslant 2$. 任取 V 的两个线性无关的向量 α, β. 如果 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则 $\xi=\alpha$ 即为所求. 现设 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$. 则 2 次方程

$$t^2 f(\alpha,\alpha)+2tf(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0 \tag{*}$$

在复数范围内有解. 设 $t_0\in\mathbb{C}$ 是 t 的一个解. 令

$$\xi=t_0\alpha+\beta,$$

则 $\xi\neq 0$ (因 α,β 线性无关), 且

$$f(\xi,\xi)=t_0^2 f(\alpha,\alpha)+2t_0 f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0.$$

从而 $\xi=t_0\alpha+\beta$ 即为所求.

(2) 由 (1) 所证, 存在 $\xi\neq 0\in V$ 使 $f(\xi,\xi)=0$. 又因 f 非退化, 故存在 $\alpha\in V$ 使 $f(\xi,\alpha)\neq 0$.

(a) 如 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则令 $\eta=\dfrac{1}{f(\xi,\alpha)}\alpha$, 即有

$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0,\qquad f(\xi,\eta)=1.$$

(b) 如 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$, 则取

$$\eta=\frac{1}{f(\alpha,\xi)}\alpha-\frac{f(\alpha,\alpha)}{2(f(\alpha,\xi))^2}\xi,$$

直接验证可知 $f(\eta,\eta)=0$, $f(\xi,\eta)=1$, 而 ξ,η 的线性无关性是显然的. 故 ξ,η 即为所求.

***11.** 证明: 如果线性空间 V 上的对称双线性函数 f 能分解为两个线性函数之积:

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V,$$

则存在非零数 λ 及线性函数 g, 使

$$f(\alpha,\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

证明: 如果 $f=0$, 则结论当然成立. 现设 $f\neq 0$. 因此存在 $\alpha_0,\beta_0\in V$, 使得 $f(\alpha_0,\beta_0)\neq 0$. 定义

$$\begin{aligned} g:\ \ V &\longrightarrow K\\ \gamma &\longmapsto f(\alpha_0,\gamma)\end{aligned}$$

则 g 为 V 上线性函数, 且 $g\neq 0$. 对任意的 $\beta\in V$,

$$g(\beta)=f(\alpha_0,\beta)=f_1(\alpha_0)f_2(\beta)$$

$$g(\beta)=f(\alpha_0,\beta)=f(\beta,\alpha_0)=f_1(\beta)f_2(\alpha_0)$$

显然 $f_1(\alpha_0)\neq 0$, $f_2(\alpha_0)\neq 0$ (否则 $g\neq 0$). 由此知,

$$\begin{aligned} f_1(\beta)&=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\beta)\\ f_2(\beta)&=\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta)\end{aligned}\qquad \forall\beta\in V.$$

令 $\lambda=\dfrac{1}{f_1(\alpha_0)f_2(\alpha_0)}$, 则

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\alpha)\cdot\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

***12.** 设 A 为半正定矩阵, 证明: A^* 也是半正定矩阵.

证明: 如果 $\operatorname{rank} A=n$, 则 A 是正定矩阵, 习题 7 已证明了 A^* 正定. 如果 $\operatorname{rank} A\leqslant n-2$, 则 $A^*=0$, 从而 A^* 半正定. 最后考虑 $\operatorname{rank} A=n-1$ 的情形. 此时 $\operatorname{rank} A^*=1$, 从而 A^* 的阶数 $\geqslant 2$ 的主子式都是 0, 而 A^* 的 1 阶主子式 $=A_{ii}$ $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的代数余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 $n-1$ 阶主子式 $\geqslant 0$ (因 A 半正定). 所以 A^* 半正定.

****13.** 证明定理 2.12.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 半正定, 则存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i \neq 0.$$

由于 A 半正定, $T^{\mathrm{T}}AT$ 也半正定, 故 $a_i > 0$. 所以 A 的正惯性指数 $p = r = \operatorname{rank} A$;

(2) $\Rightarrow$ (3) 由假设, 存在可逆实矩阵 T_1, 使

$$T_1^{\mathrm{T}}AT_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i > 0.$$

令

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{A_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = T_1T_2,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 由假设, 存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$S = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T,$$

则

$$A = S^{\mathrm{T}}S.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) 对任意的 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 令 $Y = SX$, 则 $Y \in \mathbb{R}^n$. 所以

$$X^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}SX = Y^{\mathrm{T}}Y \geqslant 0,$$

A 半正定.

(1) ⇒ (5) 设 $B_k = A(i_1,\cdots,i_k;i_1,\cdots,i_k)$ 是 A 的一个主子式. 则对任意的

$$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

可以作一个列向量 $X \in \mathbb{R}^n$, 使得它的第 i_j 列的元素等于 x_j, 而其余元素均等于 0. 则

$$0 \leqslant X^{\mathrm{T}}AX = X_k^{\mathrm{T}}B_kX_k,$$

因此 B_r 是半正定的. 根据 (4), 可得半正定矩阵的行列式非负, 即 $|B_k| \geqslant 0$.

(5) ⇒ (1) 对于任意的正实数 $\lambda > 0$, 考察 $\lambda E + A$ 的 k 阶主子阵 $\lambda E_k + A_k$. 这个子矩阵的行列式为

$$f_k(\lambda) = |\lambda E_k + A_k| = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k.$$

则根据习题 7–3.8, $(-1)^ia_i$ 等于 $-A_k$ 的全部 i 阶主子式之和. 而 $-A_k$ 的每个 i 阶主子式等于 A_k 的相应 i 阶主子式的 $(-1)^i$ 倍. 因此 a_i 等于 A_k 的所有 i 阶主子式之和, 由假设, $a_i \geqslant 0$. 从而

$$f_k(\lambda) > 0 \qquad \forall\lambda > 0,\ i = 1,\cdots,k.$$

根据定理 2.11, $\lambda E + A\ (\lambda > 0)$ 是正定矩阵.

任取 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 据正定性, λ 的一次式

$$g(\lambda) = X^{\mathrm{T}}(\lambda E + A)X = \lambda X^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}AX > 0, \qquad \forall\lambda > 0.$$

因此 $X^{\mathrm{T}}AX \geqslant 0$ (否则当 λ 充分小时会有 $g(\lambda) < 0$), 从而 A 半正定.

***14.** 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵称为幂幺上三角形矩阵.

(1) 设 A 是一个对称矩阵, T 为幂幺上三角形矩阵, 证明: $T^{\mathrm{T}}AT$ 与 A 的对应顺序主子式有相同的值;

(2) 如果对称矩阵的顺序主子式全不为零, 则存在一幂幺上三角形矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形.

证明: (1) 设 A_r 为 A 的 r 阶顺序主子式 $(1 \leqslant r \leqslant n)$,

$$A = \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

设 T 为幂幺上三角形矩阵,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{其中 } T_{11} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_r,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & T_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}}A_rT_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

从而 $T^{\mathrm{T}}AT$ 的 r 阶顺序主子式等于 (注意到 $|T_{11}| = 1$)

$$|T_{11}^{\mathrm{T}}AT_{11}| = |T_{11}^{\mathrm{T}}||A||T_{11}| = |A_r|.$$

(2) 对 A 的阶数用归纳法. 取

$$T_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{n-1} = A(1,\cdots,n-1;1,\cdots,n-1), \quad B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

这是幂幺上三角形矩阵. 则

$$T_1^{\mathrm{T}}AT_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -B^{\mathrm{T}}A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & B \\ B^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix},$$

其中 $b_n = a_{nn} - B^{\mathrm{T}} A_{n-1} B$. 由于 A 的顺序主子式全不为 0, 故 A_{n-1} 的顺序主子式全不为 0, 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶幂幺上三角形矩阵 T_2 使

$$T_2^{\mathrm{T}} A_{n-1} T_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 为幂幺上三角形矩阵, 且

$$T^{\mathrm{T}} A T = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}.$$

习 题 8–3

1. 用非退化线性替换化下列二次型为平方和:

(1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(3) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(4) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

(5) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$;

(6) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_4$.

解: (1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{5}{6}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{6}y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(2) 原式 $= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 + \left(\dfrac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = \dfrac{x_2 - x_3}{2} \\ y_3 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(3) 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

(4) 原式 $= 2(x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + \left(\dfrac{3x_2 - x_3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3x_2 + x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \dfrac{3x_2 - x_3}{2} \\ y_3 = \dfrac{3x_2 + x_3}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}y_2 + \dfrac{1}{3}y_3 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(5) 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 - y_4 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 - \dfrac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{3}{2}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

则有

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(6) 原式 $= x_1^2 + \left(\dfrac{x_2 + x_1 + x_4}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2 - x_1 - x_4}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \dfrac{x_2 + x_1 + x_4}{2} \\ y_3 = \dfrac{x_2 - x_1 - x_4}{2} \\ y_4 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_4 \\ x_4 = -y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

2. λ 取何值时, 下列二次型是正定的:

(1) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

(2) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

(3) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

解: (1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$, 它的顺序主子式 $D_1 = 5 > 0$, $D_2 = 1 > 0$, $D_3 = \lambda - 2$. 所以当 $\lambda > 2$ 时原二次型正定.

(2) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 2 - \lambda^2$, $D_3 = 5 - 3\lambda^2$.

由 $D_2 > 0$, 得 $|\lambda| < \sqrt{2}$;

由 $D_3 > 0$, 得 $|\lambda| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

所以当 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3} < \lambda < \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 时原二次型正定.

(3) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1 = 2$, $D_2 = 4 - \lambda^2$, $D_3 = -\lambda^2 + 6\lambda - 16 = -(\lambda - 3)^2 - 7 < 0$, 故不论 λ 取何实数都不能使此二次型正定.

3. 下列二次型是否正定或半正定:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$;　　(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$;

(3) $n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

解: (1) 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 它的顺序主子式

$$D_r=|A_r|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}_r=\frac{1}{2^r}(r+1)>0, \qquad r=1,\cdots,n.$$

故原二次型正定.

(2) 原式 $f=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)^2+\frac{1}{2}x_n^2\geqslant 0$. 因此 $f=0 \iff x_1=0, x_1+x_2=0, x_2+x_3=0,\cdots,x_{n-1}+x_n=0, x_n=0 \iff x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. 故原二次型正定.

(3) 原式 $=(-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)^2\geqslant 0$. 取 $x_1=x_2=\cdots=x_n\neq 0$ 可使此二次型取零值. 因此原二次型半正定.

4. 设 A 为实对称矩阵, 证明:

(1) 当实数 λ 充分大之后, $\lambda E+A$ 是正定的;

(2) A 半正定当且仅当对任何的 $\lambda>0$, $\lambda E+A$ 都正定.

证明: (1) 考察 $A(\lambda)=\lambda E+A$, 它的 r 阶顺序主子式

$$D_r(\lambda)=|\lambda E_r+A_r|=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r.$$

所以当 λ 充分大时, 有 $D_r(\lambda)>0$, $r=1,\cdots,n$. 从而当 λ 充分大时, $\lambda E+A$ 正定.

(2) ($\Rightarrow$) 若 A 半正定, 则对任意的 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, $X^{\mathrm{T}}AX\geqslant 0$. 从而对任意的 $\lambda>0$ 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0.$$

故 $\lambda E+A$ 正定.

($\Leftarrow$) 对任意的 $\lambda>0$ 及 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}AX\geqslant 0$. 故 A 半正定.

5. 设 A, B, C 为三角形的三个内角, 证明: 对任意实数 x, y, z 有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C.$$

证明: 考察二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2xz\cos B-2yz\cos C$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z)&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\cos A\cos B-2yz\cos C \\ &=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\sin A\sin B \\ &=(x-y\cos A-z\cos B)^2+(y\sin A-z\sin B)^2. \end{aligned}$$

从而 f 半正定, 由此知结论成立.

6. 证明: 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型, 则

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型.

证明: 已知 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Y^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & -Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y \end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned} f(y_1,\cdots,y_n)&=\begin{vmatrix} A & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & Y \\ 0 & -Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y \end{vmatrix} \\ &=|A|(-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y. \end{aligned}$$

由 A 正定可得 A^* 正定, 于是 $-A^*$ 负定. 因此 $f(y_1,\cdots,y_n)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y$ 是负定二次型.

***7.** 设有实系数二次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}2b_ix_i+c, \qquad a_{ij}=a_{ji}.$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & c \end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 当 A 负定时, f 有最大值, 且 $f_{\max}=\dfrac{|D|}{|A|}$;

(2) 设 A 负定, 试确定当 $x_1,\cdots,x_n$ 为何值时, f 取得最大值.

解: (1) 取

$$T=\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{*}$$

易知 $y_{n+1}=1$. 则

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n)&=(x_1\ \cdots\ x_n\ 1)D\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}\\
&=(y_1\ \cdots\ y_n\ 1)T^{\mathrm{T}}DT\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 1\end{pmatrix}\\
&=(y_1\ \cdots\ y_n\ 1)\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 1\end{pmatrix}\\
&=Y^{\mathrm{T}}AY+d.
\end{aligned}
$$

由于 A 负定, 故对任意的 $Y\in\mathbb{R}^n$ 有 $Y^{\mathrm{T}}AY\leqslant 0$, 所以 $f\leqslant d$. 可见 f 有极大值 d, 且当 $Y=0$ 时 f 取极大值. 这里

$$
d=\frac{|A|d}{|A|}=\frac{|T^{\mathrm{T}}DT|}{|A|}=\frac{|D|}{|A|}.
$$

(2) 由 (*),

$$
\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & -A^{-1}B\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 1\end{pmatrix},
$$

得 $X=Y-A^{-1}B$. 当 $Y=0$ 时 $X=-A^{-1}B$, 即当

$$
\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=-A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}
$$

时, f 取最大值.

8. 某工厂生产 A 种产品 x (百) 个和 B 种产品 y (百) 个的总成本函数为:

$$
C(x,y)=x^2+2xy+y^2+100\,(\text{万元}).
$$

甲乙两种产品的需求函数为:

$$
x=26-p_A,\quad y=10-\frac{1}{4}p_B,
$$

其中 p_A, p_B 为产品相应的售价 (万元/百个). 求利润最大时产品的数量和利润.

解: 据题意, 利润函数为

$$
\begin{aligned}
p(x,y)&=xp_a+yp_b-C(x,y)\\
&=x(26-x)+y(40-4y)-C(x,y)\\
&=-2x^2-2xy-5y^2+26x+40y-100.
\end{aligned}
$$

本题就是求二次函数的最大值. 设

$$
A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -5\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 13\\ -1 & -5 & 20\\ 13 & 20 & -100\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}13\\ 20\end{pmatrix}.
$$

这里A是负定矩阵. 根据习题7, 当
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -A^{-1}B = -A^{-1}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
时, 利润最大, 且最大利润为
$$p_{\max} = \frac{|D|}{|A|} = 25\,万元.$$
故当两种产品分别售出500个与300个时, 可获最大利润25万元.

习 题 8–4

1. 求正交矩阵T, 使$T^{-1}AT$为对角形, 设A为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

(3) $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(5) $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(6) $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 用正交线性替换化下列实二次型为典范形:

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(2) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(3) $3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

(4) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

(5) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;

(6) $2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

解: (1) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}y_1-\dfrac{2}{3}y_2+\dfrac{1}{3}y_3 \\ x_2=\dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{1}{3}y_2-\dfrac{2}{3}y_3 \\ x_3=\dfrac{1}{3}y_1+\dfrac{2}{3}y_2+\dfrac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$$

(2) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}y_1-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}y_2+\dfrac{1}{3}y_3 \\ x_2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}y_1-\dfrac{4\sqrt{5}}{15}y_2+\dfrac{2}{3}y_3 \\ x_3=\dfrac{\sqrt{5}}{3}y_2+\dfrac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2.$$

(3) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}y_1-\dfrac{2}{3}y_2+\dfrac{1}{3}y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{3}y_1+\dfrac{2}{3}y_2+\dfrac{2}{3}y_3 \\ x_3=\dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{1}{3}y_2-\dfrac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$-2y_1^2+7y_2^2+7y_3^2.$$

(4) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_2=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_3=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_4=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2.$$

(5) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_2=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_3=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_4=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2+3y_4^2.$$

(6) 作正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

可将二次型化为典范形

$$3y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

3. 设 A 为一个 n 阶实矩阵, 且 $|A| \neq 0$. 证明: A 可分解成

$$A = QT,$$

其中 Q 是正交矩阵, T 是上三角形矩阵.

证明: 取 n 维欧几里得空间 V, 设 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是它的一个规范正交基. 令

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)A \tag{*}$$

由于 $|A| \neq 0$, A 可逆, 因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基. 应用格拉姆–施密特正交化方法, 可得 V 的一个规范正交基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$. 令

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)T,$$

由第五章定理 3.4 的证明可知, T 为上三角形矩阵. 令

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)Q,$$

则 Q 为正交矩阵. 且

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)T = (\eta_1, \cdots, \eta_n)QT,$$

与 (*) 比较, 得 $A = QT$.

4. 设 A 为一个 n 阶正定矩阵, 证明: 存在上三角形矩阵 T, 使

$$A = T^{\mathrm{T}}T.$$

证明: 由 A 正定可知存在可逆实矩阵 B 使得 $A = B^{\mathrm{T}}B$. 由上题, 存在正交矩阵 Q 与上三角形矩阵 T, 使得

$$B = QT.$$

从而

$$A = B^{\mathrm{T}}B = T^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QT = T^{\mathrm{T}}T.$$

5. 设 A 为实对称矩阵, 证明: A 正定 (半正定) 的充分必要条件是 A 的特征值全大于 (大于等于) 零.

证明: 存在正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT = T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 于是 A 正定 (半正定) $\iff$ $T^{\mathrm{T}}AT$ 正定 (半正定) $\iff$ $\lambda_i > 0$ $(\lambda_i \geqslant 0)$, $i = 1, \cdots, n$.

6. 证明: 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式.

证明: 必要性显然. 下证充分性. 设实对称矩阵 A, B 有相同的特征多项式, 从而它们有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 于是存在正交矩阵 T 与 Q, 使得

$$T^{-1}AT = T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}BQ = Q^{\mathrm{T}}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

显然 A 与 B 相似.

7. 设 A 为 n 阶实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为三角形矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是实数.

证明: $(\Rightarrow)$ 设有正交矩阵 T 使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 恰为 A 的 n 个特征值. 由于 A, T 均为实矩阵, $T^{-1}AT$ 也是实矩阵, 故特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数.

$(\Leftarrow)$ 对 n 用归纳法. $n = 1$ 时结论显然成立. 现在假设结论对 $n-1$ 阶满足条件的实矩阵成立. 考察 n 阶实矩阵 A.

设 V 为 n 维欧几里得空间, $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 V 的规范正交基. 令 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$, 使得

$$(\mathscr{A}\eta_1, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)A.$$

设 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{A}$ 的任意特征值, 则 λ_1 也是 $\mathscr{A}$ 的特征值. 令 α_1 为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量, 则 α_1 可扩充为 V 的规范正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 令

$$(\mathscr{A}\alpha_1, \cdots, \mathscr{A}\alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)T_1,$$

则 T_1 为正交矩阵, 且

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = T_1^{-1}AT_1.$$

易知 A_1 为 $n-1$ 阶实矩阵, 且其特征值全是 A 的特征值, 从而也都是实数. 由归纳假设, 存在正交矩阵 T_2, 使

$$T_2^{-1}A_1T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令

$$T = T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则 T 为正交矩阵, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由归纳法原理知结论成立.

8. 证明: 特征值全是实数的正交阵必是对称矩阵.

证明: 设 A 为特征值全是实数的正交阵, 由上题, 存在正交矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = T^{-1}AT = D$$

为上三角形阵. 又因为 D 是正交阵, 故 $D^{-1} = D^{\mathrm{T}}$ 也是上三角形矩阵, 但它又是下三角形阵, 故 D 是对角阵. 从而 D 为对称矩阵. 故

$$A = TDT^{\mathrm{T}}$$

也为对称矩阵.

***9.** 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且 B 正定, 证明: 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT \text{ 与 } T^{\mathrm{T}}BT$$

同时为对角形.

证明: 由于 B 正定, 因此存在可逆矩阵 S 使得

$$S^{\mathrm{T}}BS = E.$$

而 $S^{\mathrm{T}}AS$ 仍为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q 使 $D = Q^{\mathrm{T}}(S^{\mathrm{T}}AS)Q$ 为对角阵. 令 $T = SQ$, 则 T 可逆, 且

$$T^{\mathrm{T}}AT = D, \qquad T^{\mathrm{T}}BT = E,$$

均为对角阵.

***10.** 设 A 为正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵 B, 使 $B^2 = A$.

证明: 存在正交阵 T, 使

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T.$$

因为 A 正定, 故 $\lambda_i > 0$. 令

$$B = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} T,$$

则 B 正定, 且

$$B^2 = A.$$

***11.** 设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 n 阶正定 (半正定) 矩阵, 令 $C = (a_{ij}b_{ij})$, 证明: C 也是正定 (半正定) 矩阵.

证明: 存在实矩阵 P, 使

$$P^{\mathrm{T}}P = B.$$

记 $P=(p_{ij})$, 则

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}.$$

于是对任意的 $X=(x_i)\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}X^{\mathrm{T}}CX&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}\right)x_ix_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)\right).\end{aligned}$$

由于 A 正定 (半正定), 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)\geqslant 0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}CX\geqslant 0$, 故 C 半正定. 又若 A 与 B 皆正定, 则 P 可逆. 令 $X^{\mathrm{T}}CX\geqslant 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)=0,$$

而 A 正定, 故

$$p_{k1}x_1=p_{k2}x_2=\cdots=p_{kn}x_n=0,\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

又因 P 可逆, P 的任何一列上的元素不可能全为零. 若

$$p_{i_jj}\neq 0,\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

则 $x_j=0$, $j=1,2,\cdots,n$. 故由 $X^{\mathrm{T}}CX=0$ 可推出 $X=0$, 从而 C 正定.

习 题 8–5

1. 证明: 实反称矩阵的特征值全是零或纯虚数.

证明: 设 A 为实反称矩阵, λ 是 A 的一个特征值. 易知 $-\lambda^2$ 是 $-A^2$ 的一个特征值. 而 $-A^2=A^{\mathrm{T}}A$, 故 $-A^2$ 半正定, 可知 $-\lambda^2\neq 0$ (习题 8–4.5), 从而 λ 为零或纯虚数.

2. 证明: 如果 A 是一个实反称矩阵, 则 $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ 是一个正交矩阵.

证明: 由上题知, $E+A$ 可逆, 从而

$$\begin{aligned}B^{\mathrm{T}}B&=[(E-A)(E+A)^{-1}]^{\mathrm{T}}[(E-A)(E+A)^{-1}]\\&=(E-A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1}\\&=(E-A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1}=E,\end{aligned}$$

故 B 是正交矩阵.

***3.** 设 f 是 n 维欧几里得空间 V 的非零反称双线性函数. 证明: 存在非零向量 $\alpha,\beta\in V$ 及 $a>0$, 使得对任意的 $\xi\in V$ 有

$$f(\alpha,\xi)=a(\beta,\xi),\quad f(\beta,\xi)=-a(\alpha,\xi).$$

证明: 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个规范正交基, f 在此基下的度量矩阵为 A, 则 A 为实反称矩阵, 且对任意的 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\eta_i$, $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\eta_i$, 有

$$f(\xi,\eta)=X^{\mathrm{T}}AY.$$

因 A 是实反称矩阵, 故 $A^{\mathrm{T}}A$ 为半正定矩阵. 而 $f\neq 0$, 故 $A\neq 0$, 从而 $A^{\mathrm{T}}A\neq 0$, 所以 $A^{\mathrm{T}}A$ 有非零特征值. 任取 $A^{\mathrm{T}}A$ 的一个非零特征值 λ, 则 $\lambda>0$. 令 $a=\sqrt{\lambda}$. 设

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 设

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\alpha=\sum_{i=1}^n a_i\eta_i, \qquad \beta=\sum_{i=1}^n b_i\eta_i,$$

则 $\alpha\neq 0$.下证 α,β,a 满足要求.

对任意的 $\xi=\sum\limits_{i=1}^n x_i\eta_i$, 有

$$\begin{aligned}
f(\alpha,\xi)&=(a_1\ \cdots\ a_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\left[A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\\
&=a(b_1\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=a(\beta,\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\beta,\xi)&=(b_1\ \cdots\ b_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=-\frac{1}{a}(a_1\ \cdots\ a_n)A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\\
&=-\frac{1}{a}\left[A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=-a(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\\
&=-a(\alpha,\xi),
\end{aligned}$$

又 $f(\beta,\alpha)=-a(\alpha,\alpha)\neq 0$, 所以 $\beta\neq 0$.

*4. 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的反称双线性函数.

证明: 存在规范正交基 $\eta_1,\xi_1,\eta_2,\xi_2,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$, 使 f 关于这个基的度量矩阵具有如下分块矩阵的形式:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & a_r \\ -a_r & 0 \end{pmatrix},0,\cdots,0\right),\quad a_i>0.$$

证明: 对 V 的维数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $f=0$, 结论显然成立. 现假设结论对 $m<n$ 都成立, 证明当 $\dim V=n$ 也成立.

如 $f=0$, 结论显然成立. 如 $f\neq 0$, 由习题 3, 存在非零向量 η_1,ξ_1 及数 $a_1>0$, 使对任意的 $\xi\in V$ 有

$$f(\eta_1,\xi)=a_1(\xi_1,\xi),\qquad f(\xi_1,\xi)=-a_1(\eta_1,\xi).$$

由于 η_1,ξ_1 的任一倍数 $k\eta_1,k\xi_1$ 也满足上述等式, 故可设 η_1,ξ_1 都是 V 中单位向量.

又, $0=f(\xi_1,\xi_1)=-a(\eta_1,\xi_1)$, 故 η_1,ξ_1 正交, 从而 η_1,ξ_1 为 V 的规范正交向量组.

令

$$L=L(\eta_1,\xi_1),\qquad W=L^{\perp},$$

则 $V = L \perp W$, $\dim L = 2$, $\dim W = n-2$. f 可看作是 W 上的反称双线性函数. 由归纳假设, 存在 W 的规范正交基

$$\eta_2, \xi_2, \cdots, \eta_r, \xi_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n-2r}$$

及 $a_i > 0$, $i = 2, \cdots, r$, 使 $f|_W$ 关于这个基的度量矩阵为分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & a_r \\ -a_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right).$$

易知 $\eta_1, \xi_1, \cdots, \eta_r, \xi_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n-2r}$ 构成 V 的规范正交基. 由于当 $i \geqslant 2$ 时有

$$f(\eta_1, \xi_i) = a(\xi_1, \xi_i) = 0, \qquad f(\eta_1, \eta_i) = a(\xi_1, \eta_i) = 0,$$

$$f(\xi_1, \xi_i) = -a(\eta_1, \xi_i) = 0, \qquad f(\xi_1, \eta_i) = -a(\eta_1, \eta_i) = 0,$$

因而 f 在基 $\eta_1, \xi_1, \cdots, \eta_r, \xi_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n-2r}$ 下的度量矩阵为

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & a_r \\ -a_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right).$$

从而由数学归纳法原理知结论成立.

习 题 8–6

1. 设酉矩阵

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i} \\ -4\subset & 4-3\subset & -2-6\subset \\ 6+2\subset & -2-6\subset & 1 \end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B = U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

2. 设埃尔米特矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B = U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. 属于特征值 2 的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

属于特征值 4 的特征向量为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 证明: 酉矩阵的特征值的模为 1.

证明: 设 λ_0 为酉矩阵 A 任一特征值,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

为 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量. 则

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha.$$

从而

$$\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}(\overline{A}^{\mathrm{T}}A)\alpha = (\overline{A\alpha})^{\mathrm{T}}(A\alpha) = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_0\alpha = \overline{\lambda_0}\lambda_0\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha,$$

由于 $\alpha \neq 0$, $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha > 0$, 故 $\overline{\lambda_0}\lambda_0 = 1$.

4. 设 A 为一个可逆复矩阵, 证明: A 可分解为

$$A = UT,$$

其中, U 是酉矩阵, T 是一个对角线上元素全为正实数的上三角形矩阵. 并证明这个分解是唯一的.

证明: (a) 首先用归纳法证明:

如 B 为一 $n \times r$ 列满秩矩阵, 则存在对角线上元素全为正的 r 阶上三角形阵 T, 使 $C = BT$ 的列向量组为 $\mathbb{C}^n$ 中单位正交向量组.

对 r 用归纳法. 当 $r = 1$ 时结论显然成立. 现假定结论对列数 $< r$ 的列满秩矩阵成立. 考察 $n \times r$ 列满秩矩阵.

设 B 的列为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 令 $a_1=\dfrac{1}{|\alpha_1|}$, $a_{1i}=-\dfrac{(\alpha_i,\alpha_1)}{|\alpha_1|}$, $i=2,\cdots,r$,

$$T_1=\begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1=BT_1=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r),$$

则 C_1 仍为列满秩, 且

$$|\beta_1|=1, \qquad (\beta_1,\beta_i)=0, \quad i=2,\cdots,r.$$

令

$$B_1=(\beta_2,\cdots,\beta_r).$$

则 B_1 为 $n\times(r-1)$ 的列满秩矩阵, 由归纳法假设, 存在 $r-1$ 阶上三角形矩阵

$$T_2=\begin{pmatrix} a_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}, \qquad a_i>0, \quad i\geqslant 2,$$

使 B_1T_2 的列向量为单位正交向量组. 令

$$T=T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则

$$T=\begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

为上三角形的, 且 $a_i>0$. 令 $C=BT=(\beta_1\mid B_1T_1)$, 则 C 的各列都是单位向量, 又因 β_1 与 B_1 的各列正交, 而 B_1T 的各列为 B_1 的线性组合, 故 C 的列向量组为单位正交向量组.

(b) 设 A 为 n 阶可逆复矩阵, 则由 (a) 知, 存在对角线上元素全为正的上三角形矩阵 S, 使 AS 的列向量组为单位正交向量组. 从而

$$U=AS$$

为酉矩阵. 令 $T=S^{-1}$, 则 T 为上三角形矩阵, 又因 S 的对角线上元素全正, 故 T 的对角线上元素全正, 且

$$A=UT.$$

(c) 设另有酉矩阵 U_1 及对角线上元素全正的上三角形矩阵 T_1, 使 $A=U_1T_1$. 则

$$UT=U_1T_1,$$

从而

$$TT_1^{-1}=U^{-1}U_1.$$

上式左边是上三角形阵, 右边为正交阵, 从而 $U^{-1}U_1$ 为对角阵. 又因此矩阵的对角线上元素全正, 故 $U^{-1}U_1=E$. 于是

$$U=U_1, \qquad T=T_1.$$

唯一性得证.

5. 证明: 对任一复矩阵 A, 必存在酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为上三角形矩阵.

证明: 对 A 的阶数 n 用归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 现假定结论对阶数小于 n 的矩阵成立. 考察 n 阶矩阵 A.

设 λ_1 为 A 的任一特征值, $\alpha_1 \in \mathbb{C}^n$ 为 A 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量. 将 α_1 扩充为酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 令

$$U_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则 U_1 为酉矩阵, 且

$$AU_1 = U_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

则

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶酉矩阵 U_2, 使

$$U_2^{-1} A_1 U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

令

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

6. 证明: 对任一酉矩阵 A, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角阵.

证明: 由上题, 存在酉矩阵 U 使

$$U^{-1} A U = B$$

为上三角形矩阵. 因上式左边为酉矩阵, 故 B 为酉矩阵. 于是 B 既是酉矩阵又是上三角形矩阵, 必为对角阵.

7. 证明: 埃尔米特矩阵的特征值全是实数, 且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明: (a) 设 λ 为埃尔米特矩阵 H 的一个特征值, $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 为 H 的属于特征值 λ 的特征向量. 则

$$\lambda \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} A \alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} \alpha = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha = \overline{\lambda} \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha.$$

由于 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha > 0$, 所以 $\lambda = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) 设 α, β 分别为 H 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则

$$\lambda_2 \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} A \beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} \beta = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}} \beta = \lambda_1 \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \beta.$$

(注意: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$) 于是 $(\lambda_1 - \lambda_2) \overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \beta = 0$. 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \beta = 0$, 即 $\alpha \perp \beta$.

8. 证明: 对任一埃尔米特矩阵 H, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}HU$ 为对角形.

证明: 由习题 5, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}HU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\overline{T}^{\mathrm{T}} = \overline{(U^{-1}HU)}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}} HU}^{\mathrm{T}} = \overline{U}^{\mathrm{T}} HU = U^{-1}HU = T.$$

因此 T 是对角阵.

***9.** 设 A 为复矩阵, 如果 $\overline{A}^{\mathrm{T}} A = A \overline{A}^{\mathrm{T}}$, 则称 A 为规范方阵. 证明: 对任一规范方阵, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角形.

证明: 由习题 5, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}AU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\begin{aligned}\overline{T}^{\mathrm{T}}T &= \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} \cdot U^{-1}AU = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}}AU}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{U}^{\mathrm{T}}AU \\ &= \overline{U}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}AU = \overline{U}^{\mathrm{T}}A\overline{A}^{\mathrm{T}}U \\ &= U^{-1}AU \cdot \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} = T\overline{T}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

因此 T 也是规范方阵. 由矩阵的乘法容易证明: 上三角形的规范方阵必为对角阵, 因此结论成立.

习 题 8–7

1. 在 K^3 中, 求基 $(1,0,2)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ 的对偶基.

解: 设 K^3 的自然基为 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$, f_1, f_2, f_3 为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的对偶基, g_1, g_2, g_3 为 $\alpha_1 = (1,0,2)$, $\alpha_2 = (1,2,1)$, $\alpha_3 = (0,2,1)$ 的对偶基, 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由命题 7.1 知,

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3)A^{-\mathrm{T}},$$

这里

$$A^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此对任意的 $\alpha = (x,y,z) \in K^3$, 有

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= \frac{1}{4}(-f_2 + 2f_3)(x,y,z) = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ g_2(x,y,z) &= \frac{1}{4}(4f_1 + f_2 - 2f_3)(x,y,z) = x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z, \\ g_3(x,y,z) &= \frac{1}{4}(-4f_1 + f_2 + 2f_3)(x,y,z) = -x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

2. 设 η_1, η_2, η_3 是线性空间 V 的一个基, f_1, f_2, f_3 是它的对偶基,

$$\alpha_1 = \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_2,\ \alpha_2 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_3,\ \alpha_3 = \eta_1 + \eta_2.$$

试证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的一个基并求其对偶基 (用 f_1, f_2, f_3 表出).

解: 设

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)A,$$

则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一个基. 设 f_1', f_2', f_3' 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的对偶基, 令

$$(f_1', f_2', f_3') = (f_1, f_2, f_3)S,$$

则由命题 7.1 得

$$S = A^{-\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f_1', f_2', f_3') = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1, \cdots, f_s$ 是 V 的 s 个非零线性函数, 证明: 存在向量 $\alpha \in V$, 使

$$f_i(\alpha) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 设

$$W_i = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

则 W_i 是 V 的子空间, 又因为 $f_i \neq 0$, $W_i \neq V$. 令

$$W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s,$$

则 W 不是 V 的线性子空间 (第三章习题 3–4.4). 因此 $W \neq V$. 又 $W \subset V$, 必有 $\alpha \in V$, $\alpha \notin W$, 于是对所有的 $i = 1, \cdots, s$ 有 $\alpha \notin W_i$, 即 $f_i(\alpha) \neq 0$.

4. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性空间 V 中的 s 个非零向量, 证明: 存在 V 上的线性函数 f, 使

$$f(\alpha_i) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 考察对偶空间 V^*, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可看作 V^* 上的 s 个线性函数, 故由上题, 存在 $f \in V^*$, 使

$$\alpha_i^*(f) = f(\alpha_i) \neq 0, \qquad i = 1, \cdots, s.$$

5. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1, \cdots, f_s$ 是 V 的 s 个线性函数. 集合

$$W = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0, i = 1, \cdots, s\}.$$

证明: (1) W 是 V 的一个线性子空间 (称为线性函数 $f_1, \cdots, f_s$ 的零化子空间);

(2) V 的任意线性子空间都是某些线性函数的零化子空间.

证明: (1) 由 $f_i(0) = 0$, $i = 1, \cdots, s$, 得 $0 \in W$, W 非空. 设 $\alpha, \beta \in W$, $k \in K$, 则对 $i = 1, \cdots, s$,

$$f_i(\alpha + \beta) = f_i(\alpha) + f_i(\beta) = 0,$$

$$f_i(k\alpha) = kf_i(\alpha) = 0,$$

所以 $\alpha + \beta \in W$, $k\alpha \in W$, W 是 V 的线性子空间.

(2) 设 W 为 V 的一个线性子空间. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基, 将它扩充为 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 对任意的

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + x_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + x_n\alpha_n,$$

定义

$$f_1(\alpha) = x_{r+1}, f_2(\alpha) = x_{r+2}, \cdots f_{n-r}(\alpha) = x_{r+n},$$

则易知 $f_1, \cdots, f_{n-r}$ 都是 V 的线性函数. 显然对任意的 $\alpha \in W$ 有 $f_i(\alpha) = 0$, $i = 1, \cdots, n-r$. 又若 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ 满足

$$f_i(\alpha) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n-r,$$

则有 $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$, 从而

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r \in W.$$

因此 W 是 $f_1,\cdots,f_{n-r}$ 的零化子空间.

6. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的非零线性函数, 证明: 存在 V 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$, 使

$$\forall\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i,\ \text{都有}\ f(\alpha)=x_1.$$

证明: 由于 f 非零, 故存在 $\gamma\in V$ 使得

$$f(\gamma)=c\neq 0\in K.$$

令 $\alpha=\dfrac{\gamma}{c}$, 则 $\alpha\neq 0$, 且 $f(\alpha)=1$. 将 α 扩充为 V 的基 $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 令

$$\eta_1=\alpha_1,\eta_2=\alpha_2-f(\alpha_2)\alpha_1,\cdots,\eta_i=\alpha_i-f(\alpha_i)\alpha_1,\cdots,\eta_n=\alpha_n-f(\alpha_n)\alpha_1,$$

则 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的基, 且

$$f(\eta_1)=1,\quad f(\eta_i)=0,\quad i=2,\cdots,n.$$

从而对任意的 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\eta_i$, 有

$$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}x_if(\eta_i)=x_1.$$

7. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的基. $f_1,\cdots,f_n$ 为 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的对偶基.

(1) 证明: 对 V 的任一线性函数 f, $f\mathscr{A}$ 仍是 V 的线性函数;

(2) 定义 V^* 到自身的映射 $\mathscr{A}^*$ 为:

$$\mathscr{A}^*:f\longmapsto f\mathscr{A}$$

证明: $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换;

(3) 如 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是 A, 试求 $\mathscr{A}^*$ 在基 $f_1,\cdots,f_n$ 下的矩阵.

证明: (1) 显然 $f\mathscr{A}$ 是 V 到 K 的映射. 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, $k\in K$, 有

$$(f\mathscr{A})(\alpha+\beta)=f(\mathscr{A}(\alpha+\beta))=f(\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta)=f(\mathscr{A}\alpha)+f(\mathscr{A}\beta)=(f\mathscr{A})(\alpha)+(f\mathscr{A})(\beta),$$

$$(f\mathscr{A})(k\alpha)=f(\mathscr{A}(k\alpha))=f(k\mathscr{A}\alpha)=kf(\mathscr{A}\alpha)=k(f\mathscr{A})(\alpha),$$

所以 $f\mathscr{A}$ 是 V 上的线性函数.

(2) 由 (1) 知, $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的一个变换. 对任意的 $f,g\in V^*$, $k\in K$, $\alpha\in V$, 有

$$(\mathscr{A}^*(f+g))(\alpha)=(f+g)(\mathscr{A}\alpha)=f(\mathscr{A}\alpha)+g(\mathscr{A}\alpha)=(f\mathscr{A})(\alpha)+(g\mathscr{A})(\alpha)=(\mathscr{A}^*f)(\alpha)+(\mathscr{A}^*g)(\alpha),$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(f+g)=\mathscr{A}^*f+\mathscr{A}^*g.$$

又由

$$(\mathscr{A}^*(kf))(\alpha)=(kf)(\mathscr{A}\alpha)=k(f\mathscr{A})(\alpha)=k(\mathscr{A}^*f)(\alpha),$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(kf)=k\mathscr{A}^*f.$$

因此 $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换.

(3) 由已知,

$$(\mathscr{A}\eta_1,\cdots,\mathscr{A}\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A,$$

设

$$(\mathscr{A}^*f_1,\cdots,\mathscr{A}^*f_n)=(f_1,\cdots,f_n)S,$$

则

$$\mathscr{A}^* f_j = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} f_k, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

从而

$$(\mathscr{A}^* f_j)(\eta_i) = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} f_k(\eta_i) = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

另一方面,

$$(\mathscr{A}^* f_j)(\eta_i) = f_j(\mathscr{A}\eta_i) = f_j\left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj}\eta_l\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} f_j(\eta_l) = a_{ji}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$a_{ji} = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

由此得

$$S = A^{\mathrm{T}}.$$