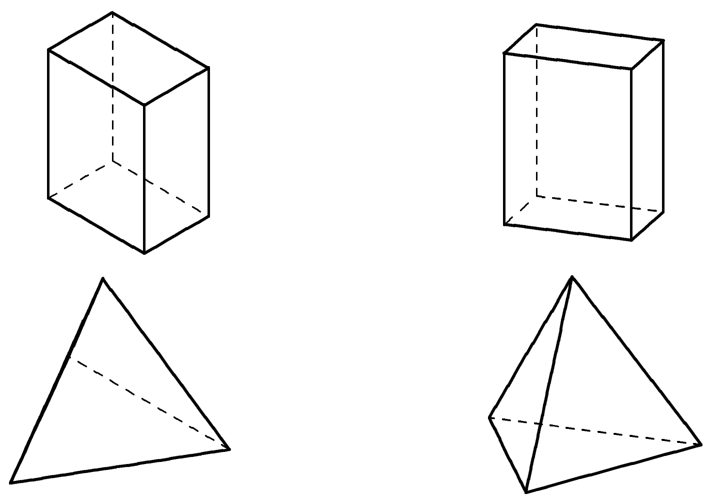
习 题 解 答

第六章 几何空间的常见曲面

习 题 6–1

1. 试分别用正等测投影及正二等测投影画出边长等于 $2, 3, 4$ 的长方体以及正四面体.

解:



习 题 6–2

1. 分别就下列条件求球面方程:

(1) 一直径的两端点为 $A(2,-3,5)$ 和 $B(4,1,-3)$;

(2) 球心在直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ 上, 且过点 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$;

(3) 过点 $(-1,2,5)$, 且与 3 个坐标平面相切;

(4) 过点 $(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$, 且包含圆: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

解: (1) 球心坐标 $C\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{-3+1}{2},\dfrac{5-3}{2}\right)=(3,-1,1)$, 半径

$$R=\sqrt{(3-2)^2+(-1+3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{21},$$

所以球面方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

(2) 因球心在已知直线上, 故它的坐标应为 $(4+2t,-8-4t,2+t)$. 又因点 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$ 在球面上, 所以它们到球心的距离相等, 即

$$(4+2t-2)^2+(-8-4t+3)^2+(2+t-6)^2=(4+2t-6)^2+(-8-4t-3)^2+(2+t+2)^2,$$

解得 $t=-2$, 从而球心坐标是 $(0,0,0)$, 且半径等于 7. 球面方程为 $x^2+y^2+z^2=49$.

(3) 球心与点 $(-1,2,5)$ 在同一卦限内, 因此可设它的坐标为 $(-a,a,a)$, 则球面方程为

$$(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2.$$

将 $(-1,2,5)$ 的坐标代入, 得 $a^2-8a+15=0$, 解得 $a=5$ 或 3. 即球面方程为

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25 \quad \text{以及} \quad (x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9.$$

(4) 已知圆位于坐标平面 xOy 上, 圆心是原点, 因此球心一定在 z 轴上. 设球心坐标为 $(0,0,t)$, 则 $4+t^2=2+2+(2-t)^2$, 解得 $t=1$. 所以球面方程为 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$.

2. 求下列圆的圆心及半径:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+y+z-3=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5, \\ x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-7=0. \end{cases}$

解: (1) 所给的圆可以看成是第一个方程所确定的球面与第二个方程确定的平面的交线, 而球心是原点, 所以圆心应在原点向这个平面所作的垂线的垂足上. 此垂线的方向向量是 $(1,1,1)$, 故垂线方程为 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=t. \end{cases}$ 垂线与平面的交点是 $(1,1,1)$, 此即球心. 根据勾股定理, 球的半径为 $\sqrt{4-3}=1$.

(2) 第二个方程减去第一个方程后可得 $x+2y+3z-2=0$. 利用与 (1) 类似的方法, 可知圆心就是此方程所确定的平面与直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=2t, \\ z=3t \end{cases}$ 的交点. 解得圆心坐标为 $\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$. 半径 $\sqrt{5-\frac{2}{7}}=\frac{\sqrt{231}}{7}$.

3. 求证:

$$\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t, \qquad\qquad 0\leqslant t<\pi \ (a>0) \\ z=a\sqrt{2}\sin t\cos t, \end{cases}$$

表示一圆. 求此圆的圆心和半径.

解: 此曲线上的任意一点 (x,y,z) 满足方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 以及 $x+y-a=0$. 故曲线是球面与平面的交线 (圆):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y-a=0, \end{cases}$$

或其一部分. 为证此曲线确是圆, 设 (x,y,z) 是圆上任意一点, 于是 $y=a-x$, $x^2+(a-x)^2+z^2=a^2$. 后式可化为 $2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+z^2=\frac{a^2}{2}$. 因此存在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 使得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta=a\cos^2\dfrac{\theta}{2}, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sin\theta=\sqrt{2}a\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}, \end{cases}$$

从而 $y=a-x=a\sin^2\frac{\theta}{2}$. 令 $t=\frac{\theta}{2}$, 就能得到题设的参数方程, 说明满足圆方程的点都是题设曲线上的点, 因此已知曲线确是圆.

其圆心应是直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=0 \end{cases}$ 与平面 $x+y-a=0$ 的交点, 即 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, 半径则为 $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

4. 求证: 两个球面

$$S_i:\ x^2+y^2+z^2+A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad (i=1,2),$$

交线圆所在平面为

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z+(D_1-D_2)=0.$$

证明: 任取两个球面的交线圆上的 3 个不同点 $M_j(a_j,b_j,c_j)$ $(j=1,2,3)$. 则

$$\begin{cases} a_j^2+b_j^2+c_j^2+A_1a_j+B_1b_j+C_1c_j+D_1=0, \\ a_j^2+b_j^2+c_j^2+A_2a_j+B_2b_j+C_2c_j+D_2=0, \end{cases} \quad (j=1,2,3).$$

将两式相减得

$$(A_1-A_2)a_j+(B_1-B_2)b_j+(C_1-C_2)c_j+(D_1-D_2)=0, \quad (j=1,2,3).$$

这说明圆上的 3 个点 M_1,M_2,M_3 都在平面

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z+(D_1-D_2)=0$$

上, 因此整个圆也在此平面上.

***5.** 已知两球面:

$$S_i:\ x^2+y^2+z^2+2U_ix+2V_iy+2W_iz+d_i=0, \quad (i=1,2)$$

求证这两球面正交 (在交点处的切平面垂直) 的条件是:

$$2(U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2)=d_1+d_2.$$

证明: 设点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为两个球面的任意一个交点, 则过 M 点的切平面的法向量就是过这个点的球半径. 用配方法不难看出这两个球面的球心是 $(-U_i,-V_i,-W_i)$ $(i=1,2)$. 因此球半径的方向向量是 $(x_0+U_i,y_0+V_i,z_0+W_i)$ $(i=1,2)$. 这两个球面正交等价于这两个球半径正交, 即

$$(x_0+U_1)(x_0+U_2)+(y_0+V_1)(y_0+V_2)+(z_0+W_1)(z_0+W_2)=0,$$

展开得

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+(U_1+U_2)x_0+(V_1+V_2)y_0+(W_1+W_2)z_0+U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2=0.$$

由于 M 在球面的交线上, 因此它的坐标同时满足两个球面的方程, 将此两个方程相加后除以 2 可得

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+(U_1+U_2)x_0+(V_1+V_2)y_0+(W_1+W_2)z_0+\frac{d_1+d_2}{2}=0.$$

代入前面等式后即得

$$2(U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2)=d_1+d_2.$$

这个条件是充分且必要的.

***6.** 求证两圆

$$S_1:\ \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases} \quad 与\ S_2:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

在同一球面上.

证明: 通过 S_1 的球面的球心一定在 z 轴上 (参见习题 1(4)), 因此其坐标为 $(0,0,a)$. 再求 S_2 的圆心. 它是直线 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+t, \\ z=t \end{cases}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交点 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 而球心与圆心的连线应该与平面 $x+y+z=1$ 的法向量平行, 即 $\frac{2}{3}:\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{3}-a\right)=1:1:1$, 所以 $a=-1$, 即球心为 $(0,0,-1)$. 又因 $(2,0,0)$ 在 S_1 上, 从而在球面上, 求得球半径等于 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 因此 S_1 在球面

$$x^2+y^2+(z+1)^2=5$$

上. 此方程减去方程 $x+y+z=1$ 的 2 倍后得到

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0,$$

说明此球面与平面 $x+y+z=1$ 的交线就是 S_2. 因此 S_1 与 S_2 在同一个球面上.

*7. 证明: 过圆:

$$\begin{cases} S=x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0, & (u^2+v^2+w^2-d>0), \\ E=Ax+By+Cz+D=0, & (A^2+B^2+C^2\neq 0) \end{cases}$$

的球面族方程可表示为: $S+2\lambda E=0$ (λ 为参数).

证明: 对于参数 λ, 若方程 $S+2\lambda E=0$ 确实表示一个球面, 则圆 $\begin{cases} S=0, \\ E=0 \end{cases}$ 一定在此球面上.

对任意一个过圆 $\begin{cases} S=0, \\ E=0 \end{cases}$ 的球面

$$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2tz+r=0,$$

已知圆应在两个球的交线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0, \\ x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2tz+r=0 \end{cases}$$

上. 由第 4 题知, 此圆应在平面

$$(p-u)x+(q-v)y+(t-w)z+\frac{r-d}{2}=0$$

上. 但 $E=0$ 也过此圆, 因此两个平面重合, 即存在实数 λ 使得

$$p-u=\lambda A, \quad q-v=\lambda B, \quad t-w=\lambda C, \quad \frac{r-d}{2}=\lambda D.$$

解出 p,q,t,r, 代入球面方程即得

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d+2\lambda(Ax+By+Cz+D)=0.$$

习 题 6–3

1. 求下列旋转曲面的方程:

(1) 直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转;

(2) 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转;

(3) 抛物线 $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ 绕它的准线旋转;

(4) 曲线 $\begin{cases} x^2=y, \\ x+z=0 \end{cases}$ 绕直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 旋转.

解: (1) 显然原点 O 在旋转轴上, 且轴的方向向量是 $\xi=(1,1,1)$. 参照 (3.1), 可以得到方程组

$$\begin{cases} (x-x')+(y-y')+(z-z')=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \\ \dfrac{x'}{2}=\dfrac{y'}{1}=\dfrac{z'-1}{0}, \end{cases}$$

在方程组中消去参数 x',y',z' 后可得

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2,$$

因此所求旋转曲面的方程为

$$2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz+yz)+5(x+y+z)-7=0.$$

(2) 显然原点 O 在旋转轴上, 且轴的方向向量是 $\xi=(0,0,1)$. 同上题, 可以得到方程组

$$\begin{cases} z-z'=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \\ \dfrac{x'-1}{1}=\dfrac{y'}{-3}=\dfrac{z'}{3}, \end{cases}$$

因此 $z'=z$, $y'=-z$, $x'=1+\dfrac{z}{3}$, 代入方程组消去参数 x',y',z' 后可得

$$x^2+y^2+z^2=\left(1+\frac{z}{3}\right)^2+z^2+z^2,$$

因此所求旋转曲面的方程为

$$9x^2+9y^2-10z^2-6z-9=0.$$

(3) 抛物线的准线的一般方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{p}{2}, \\ z=0, \end{cases}$ 则其标准方程为

$$\frac{x+\dfrac{p}{2}}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}.$$

取轴上的一点 $(x_0,y_0,z_0)=\left(-\dfrac{p}{2},0,0\right)$, 就可导出以下方程组

$$\begin{cases} y-y'=0, \\ \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(x'+\dfrac{p}{2}\right)^2+y'^2+z'^2, \\ y'^2=2px', \\ z'=0. \end{cases}$$

从方程组消去参数 x',y',z', 就能得到旋转曲面的方程

$$y^4-4p^2x^2+2p^2y^2-4p^2z^2-4p^3x=0.$$

(4) 显然原点 O 在旋转轴上, 因此可得方程组:

$$\begin{cases} (x-x')+2(y-y')+(z-z')=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \\ x'^2=y', \\ x'+z'=0. \end{cases}$$

从方程组消去参数 x',y',z', 就能得到旋转曲面的方程

$$3x^2+3z^2-4xy-2xz-4yz-4x-8y-4z=0.$$

2. 根据 k,l 的不同取值 (零或非零) 讨论直线

$$L:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{k}=\frac{z-l}{0}$$

绕 x 轴旋转所成曲面 S 是何种曲面.

解: 分以下几种情形讨论.

(i) $k=l=0$ 时, L 的方程成为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}$, L 就是 x 轴, 因此绕 x 轴旋转仍然是 x 轴本身;

(ii) $k=0$, $l\neq 0$ 时, L 的方程为 $\begin{cases} z=l, \\ y=0, \end{cases}$ L 是坐标平面 xOz 上的曲线, 根据例 3.1 的讨论, xOz 坐标平面上的曲线绕 x 轴旋转得到的旋转曲面的方程可以用 $\sqrt{y^2+z^2}$ 代换方程中的 z 而得到, 因此旋转曲线的方程为 $y^2+z^2=l^2$, 是一个圆柱面;

(iii) $k\neq 0$, $l=0$ 时, L 的方程是 $\begin{cases} y=kx, \\ z=0, \end{cases}$ L 是坐标平面 xOy 上的曲线, 同理, 旋转曲面的方程可以用 $\sqrt{y^2+z^2}$ 代换方程中的 y 而得到, 即为 $y^2+z^2=k^2x^2$, 这是圆锥面;

(iv) $k \neq 0$, $l \neq 0$ 时, 因原点在旋转轴上, 可得以下方程组

$$\begin{cases} x - x' = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \dfrac{x'}{1} = \dfrac{y'}{k} = \dfrac{z' - l}{0}, \end{cases}$$

消去参数后得到曲面方程

$$\frac{y^2 + z^2}{l^2} - \frac{k^2 x^2}{l^2} = 1,$$

这是单叶双曲面.

3. 证明: 到定直线及定直线上一定点的距离平方和是常数的动点轨迹是一旋转曲面.

证明: 设定直线为 z 轴, 定点为原点 O. 设 $P(x, y, z)$ 是满足条件的点, 则 P 的坐标满足以下方程:

$$(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2 + z^2) = k^2,$$

显然这是曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 - k^2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转而得的旋转曲面方程.

4. 求证: $yz + zx + xy = a^2$ 是旋转曲面, 且求旋转轴.

证明: 因为

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 2(yz + zx + xy) - (x^2 + y^2 + z^2) = 2a^2,$$

可得

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2a^2.$$

对任意实数 p ($|p| > \sqrt{2}|a|$), 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2a^2, \\ x + y + z - p = 0 \end{cases}$$

是一个圆, 圆心在直线 $x = y = z$ 上, 因此这是一个旋转曲面, 旋转轴是 $x = y = z$.

也可以使曲线

$$\begin{cases} yz + zx + xy = a^2, \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

绕直线 $x = y = z$ 旋转而得到曲面 $yz + zx + xy = a^2$.

5. 求证:

$$\begin{cases} x = a(\cos u + \cos v), \\ y = a(\sin u + \sin v), \\ z = b(u - v) \end{cases}$$

是旋转曲面, 这里 $a, b \neq 0$ 且 a, b 是常数.

证明: 因为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 + 2a^2(\cos u \cos v + \sin u \sin v) = a^2 + 2a^2 \cos(u - v) \\ &= a^2 + 2a^2 \cos \frac{z}{b}, \end{aligned}$$

显然它是曲线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + 2a^2 \cos \dfrac{z}{b}, \\ y = 0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转而得.

6. 求曲线 $\begin{cases} x = z^2, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \\ z = 3t \end{cases}$ 旋转生成的旋转曲面的方程.

解: 旋转轴通过原点 O, 因此可得方程组

$$\begin{cases} 2(x - x') + 3(z - z') = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ x' = z'^2, \\ x'^2 + y'^2 = 1. \end{cases}$$

消去参数后可得旋转曲面方程

$$2x + 3z + 2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = \pm 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}.$$

7. 证明曲面 $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 16(x^2 + z^2) = 0$ 是一个旋转曲面.

证明: 这是曲线

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 16x^2 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 y 轴旋转而得到的曲面.

习 题 6–4

1. 已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

母线方向为 $1 : 1 : (-1)$, 试求其方程.

解: 任取点 $M(x', y', z')$ 在准线上, $P(x, y, z)$ 为柱面过 M 的母线上的点, 则有

$$\begin{cases} x = x' + u, \\ y = y' + u, \\ z = z' - u, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4, \\ x'^2 + (y' - 3)^2 + z'^2 = 4, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = x - y + y', \\ z' = z + y - y', \\ y' = \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

推出柱面方程

$$(2x - 2y + 3)^2 + (2z + 2y - 3)^2 = 7.$$

2. 已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2, \\ y = 2z, \end{cases}$$

母线垂直于准线所在平面, 试求此柱面方程.

解: 因为母线垂直于准线所在平面 $y - 2z = 0$, 所以母线方向为 $(0, 1, -2)$. 与上题类似, 可得方程

组

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' + u, \\ z = z' - 2u, \\ y' = x'^2 + z'^2, \\ y' = 2z', \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{2}{5}(2y + z), \\ z' = \dfrac{1}{5}(2y + z), \end{cases}$$

推出柱面方程

$$\frac{2}{5}(2y+z) = x^2 + \frac{1}{25}(2y+z)^2,$$

展开后得

$$25x^2 + 4y^2 + z^2 + 4yz - 20y - 10z = 0.$$

3. 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = y \end{cases}$$

对 xOy 平面的射影柱面方程.

解: 母线的方向向量是 $(0,0,1)$. 可得方程组

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z = z' + u, \\ x'^2 + 2y'^2 + z'^2 = 1, \\ x'^2 + z'^2 = y', \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ 2y'^2 + y' - 1 = 0, \end{cases}$$

由于 $y = -1$ 不合题意, 因此柱面方程为

$$y = \frac{1}{2}, \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

另解: 将曲线方程组的第一个方程减去第二个方程, 可得 $2y^2 - y - 1 = 0$. 这是母线与 z 轴平行的柱面, 而且通过已知曲线, 即为所求的射影柱面.

4. 试说明下列方程所表示的曲面是柱面:

(1) $(x+y)(y+z) = a^2$;　　(2) $(x+y)(y+z) = x + 2y + z$;

(3) $y^2 + 2yz + z^2 = 1 - x^2$;　　(4) $(x+y+z)^2 = (x-y-z)^2$.

解: (1) 因为直线 $\begin{cases} x + y = a, \\ y + z = a \end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向为 $1 : (-1) : 1$. 且点 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$ 在此直线上. 而平面 $x - y + z - \dfrac{a}{2} = 0$ 与曲面 $(x+y)(y+z) = a^2$ 的交线为

$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = a^2, \\ x - y + z = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

我们以这条曲线为准线, 以 $1:(-1):1$ 为母线方向, 可求得方程组

$$\begin{cases} x = x' + u, \\ y = y' - u, \\ z = z' + u, \\ (x'+y')(y'+z') = a^2, \\ x' - y' + z' = \dfrac{a}{2}, \end{cases}$$

消去参数后, 得到柱面方程 $(x+y)(y+z) = a^2$, 所以原来的曲面是柱面.

(注: 以下几个小题我们将先确定母线方向, 然后证明通过曲面上任意一点的与母线方向平行的直线都在曲面上, 用这样的方法来证明曲面是柱面.)

(2) 因为 $(x+y)(y+z) = (x+y)+(y+z)$, 所以直线 $\begin{cases} x+y=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 在此曲面上, 其方向向量是 $(1,-1,1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{1} = \frac{y-y'}{-1} = \frac{z-z'}{1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases} x+y = x'+y', \\ y+z = y'+z', \end{cases}$$

因此

$$(x+y)(y+z) = (x'+y')(y'+z') = x'+2y'+z') = (x+y)+(y+z) = x+2y+z,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

(3) 方程 $y^2+2yz+z^2 = 1-x^2$ 可以化为 $x^2+(y+z)^2 = 1$, 所以直线 $\begin{cases} x=1, \\ y+z=0 \end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向向量是 $(0,-1,1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{0} = \frac{y-y'}{-1} = \frac{z-z'}{1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases} x = x', \\ y+z = y'+z', \end{cases}$$

因此

$$x^2+(y+z)^2 = x'^2+(y'+z')^2 = 1,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

(4) 显然直线 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向向量是 $(0,1,-1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{0} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{-1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases} x = x', \\ y+z = y'+z', \end{cases}$$

因此

$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2=(x'+y'+z')^2-(x'-y'-z')^2=0,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

5. 已知圆柱面的轴方程为:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2},$$

点 $(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求此圆柱面的方程.

解: 因为点 $(1,-2,1)$ 到轴 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ 的距离即为纬圆的半径, 所以此半径为

$$r=\frac{|(1,-3,2)\times(1,-2,-2)|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{117}}{3}.$$

任取此圆柱面上的一点 $P(x,y,z)$, P 到轴的距离也为 r, 因此有

$$\frac{|(x,y-1,z+1)\times(1,-2,-2)|}{3}=\frac{\sqrt{117}}{3},$$

整理后可得圆柱面方程

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

(注: 此题也可用过 $(1,-2,1)$ 点的直母线绕轴旋转而得到此曲面方程, 也可以用求出一个纬圆作准线来求出此柱面方程.)

6. 设柱面的准线为 $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$ 母线垂直于准线所在的平面, 求这柱面的方程.

解: 因为准线在平面 $x=2z$ 上, 所以母线的方向向量是 $(1,0,-2)$. 由此可得方程组

$$\begin{cases} x=x'+u, \\ y=y', \\ z=z'-2u, \\ x'=y'^2+z'^2, \\ x'=2z', \end{cases}$$

消去参数后可得柱面方程:

$$4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0.$$

7. 求半径为 4, 轴线方程是 $x=2y=-z$ 的圆柱面方程. 并验证它被 xOy 坐标平面所截得的闭曲线围成的面积等于 24π.

解: 所求圆柱面就是到轴线的距离等于 4 的点的轨迹. 因此圆柱面上的点 $P(x,y,z)$ 满足以下方程

$$\frac{\left|(x,y,z)\times\left(1,\frac{1}{2},-1\right)\right|}{\sqrt{2+\frac{1}{4}}}=4,$$

化简后得

$$5x^2+8y^2+5z^2+8xz+4yz-4xy=144.$$

此圆柱面被 xOy 平面所截得的截口是一个椭圆, 且此椭圆的短半轴长为 4, 而 xOy 平面与轴线的夹角 θ 满足:

$$sin\theta=\frac{|(0,0,1)\cdot(2,1,-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3},$$

所以长半轴的长为

$$\frac{4}{\sin\theta}=6.$$

此椭圆的面积等于

$$\pi \cdot 4 \cdot 6 = 24\pi.$$

8. 求与 x 轴及平面 $y = k$ 等距离的点的轨迹方程.

解: 设动点为 $P(x, y, z)$, 则由条件知

$$y^2 + z^2 = (y - k)^2,$$

即为

$$z^2 + 2ky - k^2 = 0.$$

习 题 6–5

1. 求锥面方程:

(1) 准线: $\begin{cases} ax^2 + by^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 顶点 (x_0, y_0, z_0);

(2) 准线: $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = k\ (\neq 0), \end{cases}$ 顶点 $(0, 0, 0)$;

(3) 准线: $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ y = 2, \end{cases}$ 顶点 $(0, 0, 0)$.

解: (1) 对于准线上的点 $M(x', y', z')$, 设 $P(x, y, z)$ 是过 M 的直母线上的点, 则有以下方程组

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)u, \\ y' = y_0 + (y - y_0)u, \\ z' = z_0 + (z - z_0)u, \\ ax'^2 + by'^2 = 1, \\ z' = 0, \end{cases}$$

消去参数 x', y', z', u 后可得锥面方程:

$$a(z_0 x - x_0 z)^2 + b(z_0 y - y_0 z)^2 - (z - z_0)^2 = 0.$$

(2) 类似地有以下方程组

$$\begin{cases} x' = xu, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ f(x', y') = 0, \\ z' = k, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$f\left(k\frac{x}{z}, k\frac{y}{z}\right) = 0.$$

(3) 有以下方程组

$$\begin{cases} x' = xu, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ x'^2 + y'^2 + (z' - 5)^2 = 0, \\ y' = 2, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 - 5yz = 0.$$

2. 求以点 $P(5,0,0)$ 为顶点, 以曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2=1, \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.

解: 有以下方程组

$$\begin{cases} x'=5+(x-5)u, \\ y'=yu, \\ z'=zu, \\ x'^2+2y'^2=1, \\ x'+2y'-z'=0, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2-146y^2-24z^2+4xy-2xz+96yz-10x-20y+10z+25=0.$$

3. 求以原点为顶点, 以 $\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.

解: 有以下方程组

$$\begin{cases} x'=xu, \\ y'=yu, \\ z'=zu, \\ x'^2-2z'+1=0, \\ y'-z'+1=0, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

4. 已知圆锥面的顶点为 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴的夹角为 $30°$, 求该圆锥面的方程.

解: 设 $P(x,y,z)$ 是锥面上的一个点, 那么过 P 点的母线的方向向量是

$$\xi=(x-1,y-2,z-3).$$

而圆锥的轴的方向向量就是平面的法向量

$$\nu=(2,2,-1).$$

根据题意有

$$\frac{(\xi,\nu)}{|\xi||\nu|}=\pm\cos 30°,$$

即

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

化简整理后即得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0,$$

或

$$11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0.$$

5. 过 x 轴和 y 轴分别作动平面, 使它们保持定交角 α. 试求它们的交线产生的曲面方程, 并指出是什么曲面.

解: 设过 x 轴的动平面为 $A_1y+B_1z=0$, 过 y 轴的动平面为 $A_2x+B_2z=0$. 它们保持定角 α, 则

$$\frac{B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\cos\alpha.$$

它们的交线过原点 O, 而且交线的方向向量

$$\xi=(0,A_1,B_1)\times(A_2,0,B_2)=(A_1B_2,A_2B_1,-A_1A_2),$$

因此交线上的点 $P(x,y,z)$ 满足

$$\begin{cases} x=tA_1B_2,\\ y=tA_2B_1,\\ z=-tA_1A_2,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_1^2+B_1^2=\dfrac{1}{t^2A_2^2}y^2+z^2,\\ A_2^2+B_2^2=\dfrac{1}{t^2A_1^2}x^2+z^2,\\ (B_1B_2)^2=\dfrac{x^2y^2}{t^2z^2}.\end{cases}$$

由 $\cos^2\alpha(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)=(B_1B_2)^2$ 可推出曲面方程 $\cos^2\alpha(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^4)=x^2y^2$, 是一个锥面.

6. 求顶点为 $(5,0,0)$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 相切的圆锥面方程.

解: 由相切的性质可知此圆锥面的半顶角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, x 轴是圆锥面的轴, 因此轴的方向向量是 $(1,0,0)$. 所以此圆锥面的方程为

$$\frac{|(x-5,y,z)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}}=\frac{4}{5},$$

化简为

$$9(x-5)^2-16(y^2+z^2)=0.$$

7. 证明: 过原点且切于球面

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\qquad (0<d<a^2+b^2+c^2)$$

的直线所生成的圆锥面方程为

$$d(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

证明: 已知球面的球心为 $(-a,-b,-c)$, 所以圆锥面的轴的方向向量是 (a,b,c). 从球心到原点的距离是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 球半径等于 $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$, 因此过原点的切线之长等于 $\sqrt{d}$, 由此可得 $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{d}{a^2+b^2+c^2}}$, 其中 θ 是圆锥面的半顶角. 所以所求圆锥面的方程为

$$\frac{|ax+by+cz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{d}{a^2+b^2+c^2}},$$

化简后得

$$d(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

*__8.__ 证明 $ayz+bzx+cxy=0$ 表示锥面. 若平面 $x+y+z=0$ 与该锥面交于一对直线, 设其交角为 θ, 且 $a+b+c=0$, 则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

证明: 因为曲面 $ayz+bzx+cxy=0$ 是关于 x,y,z 的二次齐次方程, 所以是以原点 O 为顶点的锥面. 而平面 $x+y+z=0$ 也过原点, 所以两交线均落在曲面 $ayz+b(-y-z)z+c(-y-z)y=0$ 和 $a(-x-z)z+bxz+c(-x-z)x=0$ 上, 且过原点.

由第一个方程化简得

$$cy^2-(a-b-c)yz+bz^2=0\tag{*}$$

由第二个方程化简得

$$cx^2-(b-a-c)xz+az^2=0 \tag{**}$$

分别在两相交直线上各取一点 (x',y',z') 和 (x'',y'',z''), 则此两点的坐标当然也满足 (*) 和 (**). 从它们满足 (*) 可得:

$$cy'^2-(a-b-c)y'z'+bz'^2=0 \quad 与 \quad cy''^2-(a-b-c)y''z''+bz''^2=0$$

利用根与系数关系, 可得 $y'y''=\dfrac{b}{c}z'z''$. 同理, 由于它们也满足 (**), 可得 $x'x''=\dfrac{a}{c}z'z''$.

因此两直线的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}=\frac{a+b+c}{c\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}=0,$$

即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

*$\mathbf{9.}$ 证明: $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=0$ 表示一个半顶角 θ 为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 的圆锥面.

证明: 原方程的变量取值范围应满足 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$. 原方程经 2 次平方后成为

$$2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=0,$$

显然是个锥面, 而且它与原方程在 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$ 这一区域内是同解的. 因此原曲面是锥面 (当然以原点为顶点, 且只有一个方向).

考虑过原点的 2 条直线:

$$L:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}, \qquad L':\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{s},$$

直线 L' 绕直线 L 旋转得到圆锥面的方程为

$$\begin{cases} x'=mt,\\ y'=nt,\\ z'=st,\\ (x-x')+(y-y')+(z-z')=0,\\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \end{cases}$$

消去参数 x',y',z',t 后得到

$$x^2+y^2+z^2=\frac{m^2+n^2+s^2}{(m+n+s)^2}(x+y+z)^2.$$

当 $\dfrac{m^2+n^2+s^2}{(m+n+s)^2}=\dfrac{1}{2}$ 时, 这个圆锥面的方程与已知锥面的方程同解. 而圆锥面的半顶角 θ 就是 L' 与 L 的夹角, 即

$$\cos\theta=\frac{(1,1,1)\cdot(m,n,s)}{\sqrt{m^2+n^2+s^2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

习 题 6–6

1. 已知椭球面的对称轴与坐标轴重合, 且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0 \end{cases}$$

和点 $A(1,2,-\sqrt{11})$, 求椭球面方程.

解: 显然此椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

以点 A 的坐标代入, 解得 $c=6$, 所以椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1.$$

2. 已知顶点为原点, 对称面为 xOy 面和 zOx 面, 且过点 $A\left(\frac{1}{2},-1,2\right)$ 和 $B\left(\frac{5}{2},3,-2\right)$. 求椭圆抛物面的方程.

解: 此椭圆抛物面的方程应为

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x,$$

再以 A,B 点的坐标代入, 解得 $b=\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{2}$, 因此所求椭圆抛物面的方程为

$$\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{8}=2x.$$

3. 求一个二次曲面的方程, 使这个二次曲面通过两条抛物线

$$\begin{cases} x^2-6y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z^2+4y=0 \\ x=0. \end{cases}$$

解: 这个二次曲面可能是椭圆抛物面或双曲抛物面, 根据已知条件, 它的方程具有以下形式:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{b}=2y,$$

以 $z=0$ 代入, 求得 $a=3$, 以 $x=0$ 代入, 求得 $b=-2$, 因此这是双曲抛曲面, 其方程为

$$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{2}=2y.$$

4. 当 k 取各种实数值时, 方程

$$(k-3)x^2+y^2=(k+3)z$$

表示什么曲面?

解: 当 $k<-3$ 或 $-3<x<3$ 时, 方程表示双曲抛物面; 当 $k=-3$ 时, 方程表示两个相交平面; 当 $k=3$ 时, 方程表示抛物柱面; 当 $k>3$ 时, 方程表示椭圆抛物面.

5. 已知椭圆抛物面 $Ax^2+By^2=2z$ 通过圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2x+2z, \\ x=z, \end{cases}$$

试求其方程.

解: 圆方程可以同解变形为

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=4z, \\ x=z, \end{cases}$$

而原曲面被平面 $x=z$ 截得的曲线是

$$\begin{cases} Ax^2+By^2=2z, \\ x=z. \end{cases}$$

比较后即得 $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, 因此椭圆抛物面的方程为

$$x^2+\frac{y^2}{2}=2z.$$

6. 已知椭圆抛物面 $Ax^2+By^2=2z$ 通过圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2x+2z, \\ x=z, \end{cases}$$

试求其方程.

解: 取圆上两个点 $(1,\sqrt{2},1)$, $(2,0,2)$, 它们也在曲面上. 将它们的坐标代入曲面方程, 解得 $A=1$, $B=\dfrac{1}{2}$. 所以椭圆抛物面的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=2z$.

7. 已知椭圆抛物面 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=2z$ 和平面 $x=kz$ 的交线是一个圆. 试求此圆的半径.

解: 此交线也可表示为

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{1}{k^2},\\ x=kz.\end{cases}$$

这里第一个方程是交线到 xOy 平面的投影柱面, 它是一个椭圆柱面, 其对称轴是直线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{k},\\ y=0.\end{cases}$ 这条直线与平面 $x=kz$ 的交点 $\left(\dfrac{1}{k},0,\dfrac{1}{k^2}\right)$ 就是交线圆的圆心. 现在我们又可将交线的方程同解变形为

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2+y^2+k^2\left(z-\dfrac{1}{k^2}\right)^2=\dfrac{2}{k^2},\\ x=kz.\end{cases}$$

从这个方程组可以看出, 要使交线成为一个以 $\left(\dfrac{1}{k},0,\dfrac{1}{k^2}\right)$ 为圆心的圆, 必须且只须 $k^2=1$, 这时圆的半径等于 $\sqrt{2}$.

8. 试验证椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程可分别写为

$$\begin{cases}x=a(u+v),\\ y=b(u-v),\\ z=u^2+v^2\end{cases}\quad \text{与}\quad \begin{cases}x=a(u+v),\\ y=b(u-v),\\ z=2uv,\end{cases}\quad (u,v\ \text{为参数}).$$

证明: 椭圆抛物面的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, 作变量替换

$$\begin{cases}x=a(u+v),\\ y=b(u-v),\end{cases}$$

不难看出这个变换是可逆的, 代入方程后可得 $z=u^2+v^2$. 由于曲面上的点被 x,y 的值唯一确定, 因此也被 u,v 唯一确定. 说明这确是曲面的参数方程. 类似地可以得到双曲抛物面的参数方程.

9. 已知一抛物线 $\begin{cases}x^2=2z,\\ y=0\end{cases}$ 平行移动, 且顶点在抛物线 $\begin{cases}y^2=-4z,\\ x=0\end{cases}$ 上, 试求其轨迹方程.

解: 因为抛物线 $\begin{cases}y^2=-4z,\\ x=0\end{cases}$ 在 yOz 平面上, 设抛物线 $\begin{cases}x^2=2z,\\ y=0\end{cases}$ 平行移动之后扫出的曲面为 S. 任取其上一点 (X,Y,Z), 则平面 $y=Y$ 与曲面 S 的截口应与抛物线 $\begin{cases}x^2=2z,\\ y=0\end{cases}$ 相似, 只是顶点在 $\left(0,Y,-\dfrac{Y^2}{4}\right)$ 处. 因此点 (X,Y,Z) 应该满足方程

$$X^2=2\left(Z-\left(-\frac{Y^2}{4}\right)\right),$$

即 $X^2-\dfrac{Y^2}{2}=2Z$, 所以轨迹方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=2z$, 是双曲抛物面.

10. 证明椭圆抛物面上无直线存在.

证明: 设有直线

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt,\end{cases}$$

它要落在椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 上当且仅当

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}=2(z_0+nt) \tag{*}$$

对任意的 t 成立, 但上式是关于 t 的二次方程, 且 t^2 的系数是 $\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}$, 若它不等于 0, 则 (*) 式不可能对任意的 t 成立, 故只有 $l=m=0$, 这时 t 的一次项系数为 n, 也只能是 0, 不可能.

习 题 6–7

1. 求双曲抛物面 $x^2-y^2=z$ 上过点 $(1,-1,0)$ 的两条直母线方程以及它们的交角 α.

解: 设其两族直母线为

$$\begin{cases} x+y=\mu, \\ \mu x-\mu y=z \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x-y=\nu, \\ \nu x+\nu y=z, \end{cases}$$

它们通过点 $(1,-1,0)$, 所以 $\mu=0$, $\nu=2$, 推得直母线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0} \quad \text{和} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4},$$

交角满足 $\cos\alpha=0$, 即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 证明: 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ $(a\neq b)$ 上的互相正交的直母线的交点的轨迹是一条双曲线.

证明: 由于同族的任意两条直母线总是异面直线, 没有交点, 因此只需考虑异族的直母线. 不妨设

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\mu, \\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\nu, \\ \nu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases}$$

相互垂直, 两直线的方向向量分别为 $\left(-\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a},-\dfrac{2\mu}{ab}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a},\dfrac{2\nu}{ab}\right)$, 因它们垂直, 所以 $4\mu\nu=a^2-b^2$.

当 $\mu\neq\nu$ 时, 容易解得交点满足

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=4\mu\nu=a^2-b^2, \\ z=2\mu\nu=\dfrac{a^2-b^2}{2}, \end{cases}$$

当 $\mu=\nu$ 时, 交点满足

$$\begin{cases} x=2a\mu, \\ z=2\mu^2, \\ y=0. \end{cases}$$

不论哪一种情形, 都说明交点在双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=a^2-b^2, \\ z=\dfrac{a^2-b^2}{2}, \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x^2=2a^2z, \\ z=0, \end{cases}$$

上.

3. 试证:

$$2x^2+y^2-z^2+3xy+xz-6z=0$$

是直纹面, 并求出其上过点 $M(1,1,1)$ 的直母线方程.

解: 原方程可化为

$$(x+y+z)(2x+y-z)=6z,$$

则其直母线方程为

$$\begin{cases} \lambda(x+y+z)=6z, \\ 2x+y-z=\lambda \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \mu(2x+y-z)=6z, \\ x+y+z=\mu, \end{cases}$$

其中λ,μ为参数. 又因不论λ,μ取何值, 总有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \lambda-6\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=2,\qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}2\mu & \mu & 6-\mu\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

说明它们确实表示两个直线族. 所以曲面是直纹面.

考虑过点$(1,1,1)$的直母线. 将坐标代入母线方程, 可得$\lambda=2$, $\mu=3$. 因此两条直母线为

$$\begin{cases} x+y-2z=0,\\ 2x+y-z-2=0\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases} 2x+y-3z=0,\\ x+y+z-3=0.\end{cases}$$

4. 求与三直线

$$L_1:\begin{cases} y-1=0,\\ x+2z=0,\end{cases}\quad L_2:\begin{cases} y-z=0,\\ x-2=0,\end{cases}\quad L_3:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$$

相交的动直线产生的曲面方程.

解: 设动直线与L_1,L_3的交点为$(-2u,1,u)$与$(2v,-1,v)$(其中u,v为参数), 所以动直线的方程为

$$\frac{x+2u}{2(u+v)}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-u}{v-u}. \tag{*}$$

它应与直线L_2相交. 由于点$(2,0,0)$在L_2上, 且L_2的方向向量为$(0,1,1)$, 因此根据直线相交的条件, 必须

$$\begin{vmatrix} 0 & 2(u+v) & -2(1+u)\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & v-u & u\end{vmatrix}=0,$$

解得$uv=-1$. 而从(*)式可以得到

$$\begin{cases} u=\dfrac{2z-x}{2(1+y)},\\ v=\dfrac{-x-2z}{2(y-1)}.\end{cases}$$

因此动直线所扫过的曲面方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1.$$

5. 证明命题7.3.

证明: 设单叶双曲面的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 它的两条异族直母线为

$$\begin{cases} \mu_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases} \mu_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0.\end{cases}$$

改写成一般方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_0}{a}x+\dfrac{\nu_0}{b}y+\dfrac{\mu_0}{c}z+\nu_0=0,\\ \dfrac{\nu_0}{a}x-\dfrac{\mu_0}{b}y-\dfrac{\nu_0}{c}z+\mu_0=0\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{a}x-\dfrac{\nu_1}{b}y+\dfrac{\mu_1}{c}z+\nu_1=0,\\ \dfrac{\nu_1}{a}x+\dfrac{\mu_1}{b}y-\dfrac{\nu_1}{c}z+\mu_1=0.\end{cases}$$

利用第四章§3末尾关于用一般方程表示的两条直线的相关位置的结论, 由于上述联立线性方程组的增广矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_0}{a} & \frac{\nu_0}{b} & \frac{\mu_0}{c} & -\nu_0\\ \frac{\nu_0}{a} & -\frac{\mu_0}{b} & -\frac{\nu_0}{c} & -\mu_0\\ \frac{\mu_1}{a} & -\frac{\nu_1}{b} & \frac{\mu_1}{c} & -\nu_1\\ \frac{\nu_1}{a} & \frac{\mu_1}{b} & -\frac{\nu_1}{c} & -\mu_1\end{vmatrix}=0,$$

说明增广矩阵的秩<4, 因此这两条直母线一定共面.

设双曲抛物面的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$. 它的两条异族直母线为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)+2\mu=0,\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)+z=0\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases} \nu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)+z=0,\\ \left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)+2\nu=0.\end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵为

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2\mu\\ \frac{\mu}{a} & -\frac{\mu}{b} & 1 & 0\\ \frac{\nu}{a} & \frac{\nu}{b} & 1 & 0\\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2\nu\end{pmatrix},$$

计算得 $|\tilde{A}|=0$, 说明 $\operatorname{rank}\tilde{A}<4$. 另一方面不难看出 $\operatorname{rank}A=3=\operatorname{rank}\tilde{A}$, 说明这两条直母线相交.

6. 证明命题 7.4.

证明: 设单叶双曲面的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 它的两条同族直母线为

$$\begin{cases}\mu_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_0\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}\quad 及 \quad\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0.\end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}\frac{\mu_0}{a} & \frac{\nu_0}{b} & \frac{\mu_0}{c} & -\nu_0\\ \frac{\nu_0}{a} & -\frac{\mu_0}{b} & -\frac{\nu_0}{c} & -\mu_0\\ \frac{\mu_1}{a} & \frac{\nu_1}{b} & \frac{\mu_1}{c} & -\nu_1\\ \frac{\nu_1}{a} & -\frac{\mu_1}{b} & -\frac{\nu_1}{c} & -\mu_1\end{vmatrix}=\frac{4(\mu_0\nu_1-\nu_0\mu_1)^2}{abc}.$$

当这两条直母线不重合时, 一定有 $\mu_0:\nu_0\neq\mu_1:\nu_1$, 因此增广矩阵的秩等于 4, 这两条直线异面.

设双曲抛物面的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$. 它的两条同族直母线为

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\mu_0=0,\\ \mu_0\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+z=0\end{cases}\quad 及 \quad\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\mu_1=0,\\ \mu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+z=0,\end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2\mu_0\\ \frac{\mu_0}{a} & -\frac{\mu_0}{b} & 1 & 0\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2\mu_1\\ \frac{\mu_1}{a} & -\frac{\mu_1}{b} & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{4(\mu_0-\mu_1)^2}{ab}.$$

当 $\mu_0\neq\mu_1$ 时, 增广矩阵的行列式不等于, 因此它的秩等于 4. 说明这两条直母线异面.

对于双曲抛物面的一族直母线

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\mu=0,\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+z=0,\end{cases}$$

它的方向向量为 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},0\right)\times\left(\frac{\mu}{a},-\frac{\mu}{b},1\right)=\left(\frac{1}{b},-\frac{1}{a},-\frac{2\mu}{ab}\right)$, 所以这族直线都平行于平面 $bx+ay=0$.

同理可知, 另一族直母线

$$\begin{cases}\nu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+z=0,\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+2\nu=0\end{cases}$$

都平行于平面 $bx-ay=0$.

***7.** 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(c^2<a^2+b^2)$ 上的互相垂直的直母线的交点轨迹.

解: 显然, 相互垂直的直母线必不同族. 设为

$$\begin{cases}\omega\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\omega\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}\theta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\theta\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{cases}$$

其中, ω,μ 不同时为零, θ,ν 也不同时为零. 这两条直线的方向分别为 $\left(\frac{\mu^2-\omega^2}{bc},\frac{2\mu\omega}{ac},\frac{\mu^2+\omega^2}{ab}\right)$ 和

$\left(\dfrac{\theta^2-\nu^2}{bc}, \dfrac{2\nu\theta}{ac}, -\dfrac{\nu^2+\theta^2}{ab}\right)$. 因它们垂直, 就有

$$\frac{(\mu^2-\omega^2)(\theta^2-\nu^2)}{b^2c^2}+\frac{4\mu\omega\nu\theta}{a^2c^2}-\frac{(\mu^2+\omega^2)(\nu^2+\theta^2)}{a^2b^2}=0.$$

化简后得

$$a^2(\omega\theta+\mu\nu)^2+b^2(\mu\theta-\omega\nu)^2+c^2(\mu\nu-\omega\theta)^2=(a^2+b^2-c^2)(\mu\theta+\omega\nu)^2.$$

再从方程组解得交点为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\mu\nu+\omega\theta}{\mu\theta+\omega\nu}a, \\ y=\dfrac{\omega\nu-\mu\theta}{\mu\theta+\omega\nu}b, \\ z=\dfrac{\mu\nu-\omega\theta}{\mu\theta+\omega\nu}c. \end{cases}$$

可知 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$. 故交点轨迹为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2. \end{cases}$$

习 题 6–8

1. 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与

(1) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ $(R>a>0)$;

(2) 锥面 $x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ $(0<\theta<\pi)$

交线的参数方程.

解: (1) $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=\sqrt{R^2-a^2}, \end{cases}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 和 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=-\sqrt{R^2-a^2}, \end{cases}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$;

(2) $\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=R\cos\theta, \end{cases}$ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 和 $\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=-R\cos\theta, \end{cases}$ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$.

2. 试确定 m 为何值时平面 $x+mz-1=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 相交成: (1) 椭圆; (2) 双曲线.

解: 当 $m=0$ 时交线是一对相交直线

$$\begin{cases} y^2-z^2=0, \\ x=1. \end{cases}$$

因此设 $m\neq 0$, 此时交线为

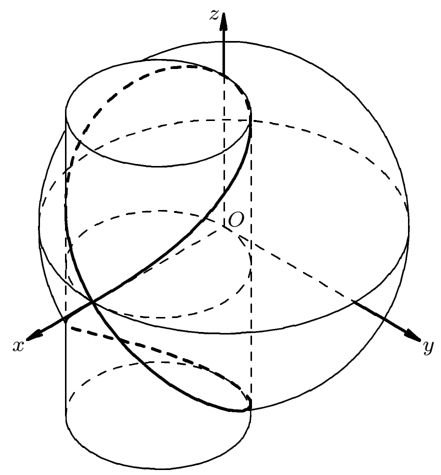
$$\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{1}{m^2}(1-x)^2=1, \\ x+mz=1, \end{cases}$$

可化简为

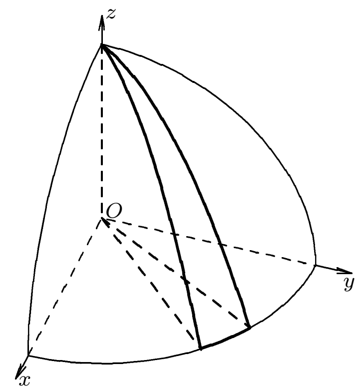
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{m^4}{(m^2-1)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{m^2}{m^2-1}}=1, \\ x+mz=1. \end{cases}$$

因此, 当 $|m|>1$ 时, 交线是椭圆; 当 $|m|<1$ 且 $m\neq 0$ 时, 交线是双曲线.

3. 试画出由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 所围成的区域.



第 3 题图



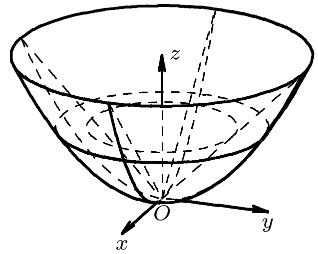
第 4 题图

4. 试画出由曲面 $z=1-x^2-y^2$ 和平面 $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $z=0$ 所围区域在第一卦限中的那部分.

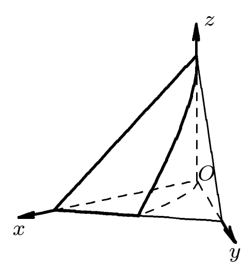
5. 试画出不等式

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$$

所确定的区域的简图.



第 5 题图



第 6 题图

6. 试画出由不等式组

$$y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x\geqslant 2y^2,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}\leqslant 1,$$

所确定的区域的简图.