

习题解答

第五章 线性空间与欧几里得空间

习题 5-1

1. 按通常数的加法与乘法, 下列集合是否构成实数域 \mathbb{R} 上的线性空间?

(1) 整数集 \mathbb{Z} ; (2) 有理数集 \mathbb{Q} ; (3) 实数集 \mathbb{R} ; (4) 复数集 \mathbb{C} .

解: (1) 与 (2) 都不是实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 因为标量乘法不封闭. (3) 和 (4) 都是 \mathbb{R} 上的线性空间.

2. 若 K 为复数域 \mathbb{C} , 问以实数为元素的一切 $n \times n$ 矩阵的集合对矩阵的加法与标量乘法是否构成 K 上的线性空间? 为什么?

解: 否, 关于标量乘法不封闭.

3. 检验下列集合对于所给的运算是否构成实数域上的线性空间:

- (1) 全体实对称 (反称, 上三角形) 矩阵, 对于矩阵的加法与标量乘法;
- (2) 次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式全体, 对于多项式的加法与乘法;
- (3) 平面上全体向量, 对于向量的加法与如下定义的标量乘法:

$$k\alpha = \alpha;$$

(4) 全体正实数 \mathbb{R}^+ , 加法和标量乘法定义为:

$$a \oplus b = ab,$$

$$k \circ a = a^k.$$

解: (1) 是; (2) 否, 零多项式不在集合中; (3) 否, 因为当 $\alpha \neq 0$ 时, $0\alpha \neq 0$; (4) 是.

4. 计算上题中所出现的线性空间的维数和基.

解: (1) 实对称: $\frac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} + E_{ji} \mid i \leq j\}$;

反称: $\frac{n(n-1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} - E_{ji} \mid i < j\}$;

上三角形: $\frac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} \mid i \leq j\}$.

(4) 1 维, 任何不等于 1 的正实数都可作为基.

5. 证明: 全体以零为极限的实数列

$$S = \left\{ \{a_n\} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

按如下定义的加法与标量乘法:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\};$$

$$k\{a_n\} = \{ka_n\}$$

构成实数域 \mathbb{R} 上的一个无限维线性空间.

证明: 验证线性空间略. 为说明它是无限维的, 对任意的正整数 n , 有一个收敛于 0 的数列: $\alpha_n = \{0, \dots, 0, 1(\text{第 } n \text{ 项}), 0, 0, \dots\}$. 于是对于任意大的 n , 总有 n 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

6. 设

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

(1) 证明: P 按矩阵的加法与标量乘法构成实数域 \mathbb{R} 上的一个线性空间;

(2) 求 P 的维数与基.

解: (1) 略. (2) $\dim_{\mathbb{R}} P = 4$, 基为: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

7. 设 \mathbb{R} 为实数域在它自身上的线性空间, \mathbb{R}^+ 为第3题(4)中的向量空间. 证明: \mathbb{R} 与 \mathbb{R}^+ 同构.

证明: 令

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto 2^r \end{aligned}$$

则 (a) φ 是映射;

(b) φ 是单的: 因为 $2^{r_1} = 2^{r_2} \iff r_1 = r_2$;

(c) φ 是满的: 因为对任意的 $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 2^{\log_2 a}$. 而 $\log_2 a \in \mathbb{R}$, 于是 $\varphi(\log_2 a) = 2^{\log_2 a} = a$;

(d) φ 保持运算:

$$\varphi(r_1 + r_2) = 2^{r_1 + r_2} = 2^{r_1} 2^{r_2} = 2^{r_1} \oplus 2^{r_2} = \varphi(r_1) \oplus \varphi(r_2);$$

$$\varphi(kr_1) = 2^{kr_1} = (2^{r_1})^k = k \circ 2^{r_1} = k \circ \varphi(r_1).$$

所以 φ 是同构.

8. 设 F 为全体形如

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3$$

的实数列所组成的集合, 其加法与标量乘法的定义如第5题.

(1) 证明: F 构成 \mathbb{R} 上的一个二维线性空间;

(2) 给出 F 的一个由等比数列所组成的基;

(3) 求斐波那契 (Fibonacci) 数列

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

的通项公式.

证明: (1) F 为 \mathbb{R} 上线性空间的证明略. 下面求 F 的维数.

考察数列 $\alpha_1 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ 与 $\alpha_2 = (1, 1, 2, 3, 5, \dots)$, 显然 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

(a) 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$, 则 $(k_2, k_1 + k_2, k_1 + 2k_2, 2k_1 + 3k_2, \dots) = 0$, 所以 $k_2 = 0$, 从而 $k_1 = 0$. 这说明 α_1, α_2 线性无关.

(b) 对任意的

$$\beta = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots), \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

考察

$$\gamma = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2 - \beta \in F,$$

则 $\gamma = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$. 因为 $\gamma \in F$, 所以 $x_3 = 0 + 0 = 0$, $x_4 = x_3 + 0 = 0$, 由归纳法可知 $\gamma = 0$. 这就证明了 $\beta = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2$. 因此 α_1, α_2 构成 F 的基, $\dim F = 2$.

(2) 设有等比数列

$$(a, aq, aq^2, \dots) \in F,$$

则对 $n \geq 2$ 有 $aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2}$, 从而 $q^2 = q + 1$, 得到 $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

易知

$$\eta_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2, \dots \right) \in F,$$
$$\eta_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2, \dots \right) \in F.$$

又 η_1, η_2 线性无关, 而 $\dim F = 2$, 所以 η_1, η_2 构成 F 的基.

(3) 斐波那契数列

$$\varphi = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in F,$$

因此存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 使

$$\varphi = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2.$$

从而

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

由此可得斐波那契数列得通项公式是

$$D_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right].$$

9. 所谓 n 阶魔阵, 是指其各行各列以及主对角和次对角元素之和都相等的 n 阶方阵, 如

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

就是一个三阶魔阵.

(1) 证明: 实数域上全体 n 阶魔阵的集合 M_n 按矩阵的加法与标量乘法构成 \mathbb{R} 上的一个线性空间;

(2) 求 M_3 的维数.

解: (2) 3 维, 基为:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

习 题 5-2

1. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 证明以下三个论断是等价的:

(1) $W_1 \subseteq W_2$; (2) $W_1 \cap W_2 = W_1$;

(3) $W_1 + W_2 = W_2$.

证明: (1) \Leftrightarrow (2) 以及 (1) \Rightarrow (3) 都是显然的.

(3) \Rightarrow (1): $W_1 + W_2 = W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_1 + W_2 = W_2$.

2. 求由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间的交与和的基与维数.

$$(1) \begin{cases} \alpha_1 = (1, 3, 1, -1) \\ \alpha_2 = (1, 0, 1, 2); \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (3, -1, -3, -5) \\ \beta_2 = (5, -2, -3, -4); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \alpha_1 = (1, 0, 1, 0) \\ \alpha_2 = (1, 1, 0, 1); \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (0, 1, 0, 1) \\ \beta_2 = (0, 1, 1, 0); \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \alpha_1 = (1, 0, 2, 0) \\ \alpha_2 = (2, 0, 1, 1) \\ \alpha_3 = (1, 0, -1, 1); \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (3, 3, 1, -2) \\ \beta_2 = (1, 3, 0, -3). \end{cases}$$

解: 把由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间分别记为 W_1, W_2 .

(1) $\dim(W_1 + W_2) = 3, \dim W_1 \cap W_2 = 1,$

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1,$

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(3, -2, 3, 8) \left(= \frac{1}{3}(-2\alpha_1 + 11\alpha_2) = -4\beta_1 + 3\beta_2 \right);$

(2) $\dim(W_1 + W_2) = 4, \dim W_1 \cap W_2 = 0,$

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2;$

(3) $\dim(W_1 + W_2) = 3, \dim W_1 \cap W_2 = 1,$

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1,$

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(2, 0, 1, 1) (= \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2).$

3. 设 W, W_1, W_2 都是向量空间 V 的子空间, 且

$$W_1 \subseteq W_2, \quad W \cap W_1 = W \cap W_2, \quad W + W_1 = W + W_2.$$

证明: $W_1 = W_2$.

证明: $\dim W + \dim W_1 = \dim(W + W_1) + \dim(W \cap W_1),$

$\dim W + \dim W_2 = \dim(W + W_2) + \dim(W \cap W_2),$

所以上式右端相等. 可得 $\dim W_1 = \dim W_2$. 又因 $W_1 \subseteq W_2$, 所以 $W_1 = W_2$.

4. 设 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间, 并且满足

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1,$$

证明: $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

证明: 因为 $\dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V_1 \leq \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$, 两个等号中必有一个成立. 如果左边等号成立, 则因 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$, 可得 $V_1 \cap V_2 = V_1$, 从而 $V_1 \subseteq V_2$. 如果右边等号成立, 则因 $V_1 \subseteq V_1 + V_2$, 可得 $V_1 = V_1 + V_2$, 从而 $V_2 \subseteq V_1$.

5. 设 $V = K^4, \alpha_1 = (1, 2, 1, 2), \alpha_2 = (2, 1, 2, 1), W = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 求子空间 W 在 V 中的一个补空间.

解: 设 $\alpha_3 = (0, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 $L((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ 是 W 在 V 中的一个补空间.

6. 证明: 每一个 n 维线性空间都是 n 个一维子空间的直和.

证明: 设 V 为 n 维线性空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的基. 令 $W_i = L(\alpha_i)$, 则 $V = W_1 + W_2 + \dots + W_n$. 又, $n = \dim V = \sum_{i=1}^n \dim W_i$, 所以

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n.$$

7. 证明: n 维线性空间 V 的每一个真子空间都是若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证明: 设 W 是 V 的真子空间, 则 $r = \dim W < \dim V = n$. 取 W 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 将其扩充成 V 的基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 取如下的 $n-r$ 个 $n-1$ 维线性子空间

$$V_j = L(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n), \quad j = r+1, \dots, n.$$

则因

$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in V_j \iff a_j = 0,$$
$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in \bigcap_{j=r+1}^n V_j \iff a_{r+1} = \cdots = a_n = 0 \iff \beta \in W.$$

即 $W = \bigcap_{j=r+1}^n V_j$.

8. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \text{与} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间.

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2$.

证明: (a) 对任意的 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$, 令

$$\beta = \left(a_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, a_2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \cdots, a_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right),$$
$$\gamma = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \cdots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right),$$

则 $\beta \in V_1$, $\gamma \in V_2$, 且 $\alpha = \beta + \gamma$. 所以 $K^n = V_1 + V_2$.

(b) 如果 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in V_1 \cap V_2$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

解得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, 即 $\alpha = 0$. 所以 $V_1 \cap V_2 = 0$.

综上可得 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

9. 设 $W_1 = \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$.

证明: $M_n(K) = W_1 \oplus W_2$.

证明: (a) 对任意的 n 阶矩阵 $A \in M_n(K)$, 有

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

而 $\frac{1}{2}(A + A^T) \in W_1$, $\frac{1}{2}(A - A^T) \in W_2$, 所以 $M_n(K) = W_1 + W_2$.

(b) 设 $A \in W_1 \cap W_2$, 则

$$-A = A^T = A,$$

由 $2A = 0$ 可得 $A = 0$. 所以 $W_1 \cap W_2 = 0$.

最终得到 $M_n(K) = W_1 \oplus W_2$.

10. 设 $A \in M_n(K)$ 且 $A^2 = A$, 令

$$V_1 = \{X \in K^n \mid AX = 0\}, \quad V_2 = \{X \in K^n \mid AX = X\}.$$

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2$.

证明: (a) 设 $\alpha \in K^n$, 则 $\alpha = (\alpha - A\alpha) + A\alpha$. 而

$$A(\alpha - A\alpha) = A\alpha - A^2\alpha = A\alpha - A\alpha = 0, \quad \text{所以} \quad \alpha - A\alpha \in V_1,$$

$$A(A\alpha) = A^2\alpha = A\alpha, \quad \text{所以} \quad A\alpha \in V_2,$$

从而 $K^n = V_1 + V_2$.

(b) 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则因 $\alpha \in V_1$, 有 $A\alpha = 0$, 由 $\alpha \in V_2$, 有 $A\alpha = \alpha$. 于是 $\alpha = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$. 因此 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

11. 设 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1, V_2 为 K^n 的两个非平凡的子空间.

证明: 一定存在唯一的幂等矩阵 (即 $A^2 = A$ 的矩阵) $A \in M_n(K)$, 使

$$V_1 = \{X \in K^n \mid AX = 0\}, \quad V_2 = \{X \in K^n \mid AX = X\}.$$

证明: 取 V_1 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 以及 V_2 的一个基 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$. 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 的基. 定义 K^n 上的线性变换 \mathcal{A} 为:

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq r \\ \alpha_i, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

把线性变换 \mathcal{A} 在 K^n 的自然基下的矩阵记为 A . 由 \mathcal{A} 的定义可得 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 相应地有 $A^2 = A$.

对任意的 $X \in K^n$, 有 $X = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$. 则

$$AX = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{A}(\alpha_i) = \sum_{i=r+1}^n a_i \alpha_i.$$

因此

$$AX = 0 \iff \sum_{i=r+1}^n a_i \alpha_i = 0 \iff a_i = 0 \forall r+1 \leq i \leq n \iff X \in V_1,$$

$$AX = X \iff \sum_{i=r+1}^n a_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \iff a_i = 0 \forall 1 \leq i \leq r \iff X \in V_2.$$

所以 A 是满足条件的幂等矩阵.

再证唯一性: 如果 $B \in M_n(K)$, 使得

$$BX = 0 \quad \forall X \in V_1, \quad BX = X \quad \forall X \in V_2,$$

则因 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 可得

$$(A - B)X = 0, \quad \forall X \in K^n.$$

所以 $A - B = 0$, 从而 $A = B$.

12. 设 $A \in M_n(K)$, E 为 n 阶单位方阵. 令

$$V_1 = \{X \in K^n \mid (A - E)X = 0\}, \quad V_2 = \{X \in K^n \mid (A + E)X = 0\}.$$

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2 \iff A^2 = E$.

证明: $(\implies) K^n = V_1 \oplus V_2 \implies n = \dim V_1 + \dim V_2 \implies n = (n - \text{rank}(A - E)) + (n - \text{rank}(A + E)) \implies n = \text{rank}(A - E) + \text{rank}(A + E) \implies A^2 = E$ (习题 4-8.12).

(\impliedby) 对任意的 $\alpha \in K^n$,

$$\alpha = \frac{1}{2}(A + E)\alpha - \frac{1}{2}(A - E)\alpha.$$

因为

$$(A - E) \left[\frac{1}{2}(A + E)\alpha \right] = \frac{1}{2}(A^2 - E)\alpha = 0,$$

所以 $\frac{1}{2}(A + E)\alpha \in V_1$. 又因

$$(A + E) \left[-\frac{1}{2}(A - E)\alpha \right] = -\frac{1}{2}(A^2 - E)\alpha = 0,$$

所以 $-\frac{1}{2}(A - E)\alpha \in V_2$.

因此 $K^n = V_1 + V_2$.

当 $\alpha \in V_1 \cap V_2$ 时又有

$$\alpha = \frac{1}{2}(A+E)\alpha - \frac{1}{2}(A-E)\alpha = 0 + 0 = 0,$$

因此 $V_1 \cap V_2 = 0$. 从而 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

习题 5-3

1. 在线性空间 \mathbb{R}^2 中, 对任意两个向量 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, 定义

$$(\alpha, \beta) = 5a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

验证在此定义下 \mathbb{R}^2 构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

2. 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 定义

$$f(A, B) = \text{Tr}(A^T B) \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

试问: f 是否 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积?

解: 是. 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 则

$$(a) \quad f(A, B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ki} = f(B, A).$$

$$(b) \quad f(A+B, C) = \text{Tr}((A+B)^T C) = \text{Tr}(A^T C + B^T C) = \text{Tr}(A^T C) + \text{Tr}(B^T C) = f(A, C) + f(B, C).$$

$$(c) \quad f(kA, B) = \text{Tr}((kA)^T B) = \text{Tr}(kA^T B) = k \text{Tr}(A^T B) = kf(A, B).$$

$$(d) \quad f(A, A) = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki}^2 \geq 0, \text{ 且}$$

$$f(A, A) = 0 \iff a_{ki} = 0, \quad k, i = 1, \dots, n \iff A = 0.$$

所以 f 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积.

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

规定

$$(X, Y) = X^T A Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

(1) 证明: \mathbb{R}^n 关于此定义构成一个欧几里得空间;

(2) 求向量 $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ 的度量矩阵,

(3) 具体写出这个空间的柯西-布涅柯夫斯基不等式.

解: (1) 略.

(2) 度量矩阵为 A .

(3) 设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, 则

$$\left| \sum_{k=1}^n k a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n k b_k^2}.$$

4. 设 C 是一个 n 阶实可逆矩阵. 在 \mathbb{R}^n 中, 对任意两个列向量 X, Y , 规定

$$(X, Y) = X^T C^T C Y$$

证明: \mathbb{R}^n 关于此定义构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

5. 在标准欧几里得空间内计算给定向量的内积, 并求它们之间的夹角:

(1) $\alpha = (1, 1, 1, 1), \beta = (-1, 2, 4, 3);$

(2) $\alpha = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \beta = (3, -1, 2, 2);$

(3) $\alpha = (3, -1, 1, -1), \beta = (-2, 2, -2, 2);$

(4) $\alpha = (-1, 1, -1, 2, 1), \beta = (3, 1, -1, 0, 1).$

解: (1) $(\alpha, \beta) = 8, \langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{2\sqrt{30}}{15}.$

(2) $(\alpha, \beta) = \frac{7}{2}, \langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{7}{10}.$

(3) $(\alpha, \beta) = -12, \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{5\pi}{6}.$

(4) $(\alpha, \beta) = 0, \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}.$

6. 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x, y, z \in \mathbb{R}),$ 试求

$$\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2} + \frac{z^2}{1-z^2}$$

的最小值.

解: 原式 $= -3 + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2}.$ 而由柯西-布涅柯夫斯基不等式,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2 + (\sqrt{1-y^2})^2 + (\sqrt{1-z^2})^2} \\ & \geq \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right) \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-y^2} \\ \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix} = 3, \end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2}} \cdot \sqrt{2} \geq 3,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2} & \geq \frac{9}{2}. \\ \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2} + \frac{z^2}{1-z^2} & \geq -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

又当 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时上式取等号. 故原式的最小值为 $\frac{3}{2}.$

7. 设 $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R},$ 若 $a^2 + b^2 + c^2 = 25, x^2 + y^2 + z^2 = 36, ax + by + cz = 30.$ 求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值.

解: 由柯西-布涅柯夫斯基不等式,

$$\begin{aligned} 30 & = ax + by + cz = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 30. \end{aligned}$$

因等号成立时, (a, b, c) 与 (x, y, z) 成比例. 设 $(a, b, c) = t(x, y, z),$ 代入得

$$30 = t(x^2 + y^2 + z^2) = 36t,$$

解出 $t = \frac{5}{6}.$ 从而 $\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{5}{6}.$

8. 在标准欧几里得空间 \mathbb{R}^3 中, 求基 $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$ 的度量矩阵.

解: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

9. 在 4 维欧几里得空间 V 中, 设基 $\alpha_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 1, 1, 1)$, $\alpha_4 = (1, 0, 0, -1)$ 的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ 的度量矩阵;

(2) 求向量 $\beta_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\beta_2 = (0, 1, 1, 0)$ 的内积;

(3) 求一单位向量与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交.

解: (1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)B$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

因此基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 得度量矩阵应为

$$G = B^{-T}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 9 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 4 & -7 \\ 9 & -1 & -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

(2) $(\beta_1, \beta_2) = 6$.

(3) 设 $\alpha = \sum_{i=1}^4 x_i \alpha_i$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交, 则

$$\left(\alpha_j, \sum_{i=1}^4 x_i \alpha_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

从而

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

解得 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 3, -4)$, 所以

$$\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 = (-8, 2, 0, 6).$$

$(\alpha, \alpha) = (\alpha_4, \alpha) = 20$. 因此所求的单位向量为 $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}(-4, 1, 0, 3)$.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是欧几里得空间 V 的 m 个向量, 称矩阵

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的格拉姆 (Gram) 矩阵.

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)| \neq 0$.

证明: (\Rightarrow) 如 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是规范正交基, 则对任意的 $\alpha = \sum a_i \varepsilon_i$, 有

$$(\alpha, \varepsilon_i) = \left(\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j, \varepsilon_i \right) = \sum_{j=1}^n a_j (\varepsilon_j, \varepsilon_i) = a_i.$$

(\Leftarrow) 如对任意的 $\alpha = \sum a_i \varepsilon_i$, 有

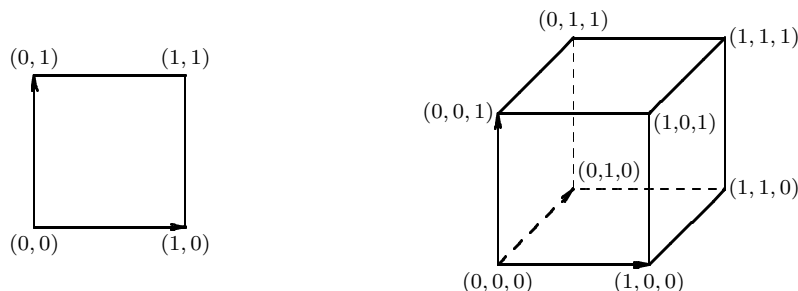
$$(\alpha, \varepsilon_i) = a_i,$$

则 $\varepsilon_j = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k$, 其中 $a_k = \delta_{kj}$. 因此

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = a_i = \delta_{ij}.$$

从而 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是规范正交基.

15. 通过对图中平面内正方形以及几何空间内立方体的观察, 归纳出它们的顶点坐标的特征, 从而推导出 n 维空间的立方体的顶点个数公式. 再计算 4 维空间中的立方体有多少个 3 维的侧面, 多少个 2 维的侧面与 1 维的棱? 这个 4 维立方体有多少种不同长度的对角线? 试求它们的长度以及与棱的夹角. 你能否把这些结果推广到 n 维空间的情形?



第 15 题图

解: n 维空间的立方体中, m 维子立方体有 $2^{n-m} C_n^m$ 个.

当 $m = 0$ 时为顶点个数 $= 2^n$;

当 $m = 1$ 时为棱数 $= 2^{n-1} n$;

当 $m = 2$ 时为面数 $= 2^{n-3} n(n-1)$; ...

其不同长度的对角线有 $n-1$ 种, 长度分别为 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}$.

长度为 \sqrt{k} 的对角线与棱的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arccos \frac{1}{\sqrt{k}}$.

习题 5-4

1. 试求通过点 $A(1, 1, 1)$ 与 $B(1, 0, 2)$ 且垂直于平面 $x + 2y - z - 6 = 0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\nu = (A, B, C)$, 则 $\nu \perp \overrightarrow{AB}$, ν 也与平面 $x + 2y - z - 6 = 0$ 的法向量垂直. 因此有方程组

$$\begin{cases} 0 \cdot A + (-1)B + C = 0 \\ A + 2B - C = 0. \end{cases}$$

解得 $A : B : C = 1 : -1 : -1$. 可得点法式方程 $(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0$, 即 $x - y - z + 1 = 0$.

2. 平面 Π 过 3 个点 $M_1(3, -1, 5)$, $M_2(4, -1, 1)$ 和 $M_3(2, 0, 2)$. 求平面 Π 的一个法向量, 并求出 Π 的方程.

解: 平面 Π 的一个法向量可取为 $\nu = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} = (4, 7, 1)$. 可得点法式方程 $4(x-2) + 7y + (z-2) = 0$, 即 $4x + 7y + z - 10 = 0$.

3. 平面 Π 过点 $M_0(2, 3, 1)$, 且和两平面 $\Pi_1: x + 3y - z + 3 = 0$, $\Pi_2: 2x + y - 2z + 1 = 0$ 都垂直, 求 Π 的方程.

解: 利用例 4.5 知平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5x - 5z + 15 = 0,$$

化简得 $x + z - 3 = 0$.

4. 平面 Π 在 x, y, z 轴上的截距分别是 $-1, \frac{3}{2}, 3$, 求自原点指向平面的单位法向量的方向余弦.

解: 利用平面的截距式方程得到该平面的方程:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{3}{2}} + \frac{z}{3} = 1.$$

化简后得 $-3x + 2y + z - 3 = 0$. 它的法向量可取为 $\pm(-3, 2, 1)$. 因为点 $P_0(-1, 0, 0)$ 在此平面上, 而 $\overrightarrow{OP_0}$ 与本题所要求的法向量之间的夹角应该小于 $\frac{\pi}{2}$, 即内积大于 0. 故应取法向量为 $(-3, 2, 1)$. 它的方向余弦为 $\left(-\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right)$.

5. 求过 z 轴且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ 成 60° 角的平面 Π 的方程.

解: 过 z 轴的平面的法向量应为 $\nu = (A, B, 0)$. 它应与已知平面成 60° 角, 所以 $\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{10}} = \pm\frac{1}{2}$. 推得 $3A = B$ 或 $A = -3B$. 故平面方程为 $x + 3y = 0$ 或 $3x - y = 0$.

6. 已知平面 $\Pi: 4x - 4y - 2z + 3 = 0$. 点 P 与平面 Π 的距离为 2, 求点 P 的轨迹.

解: 设满足条件的点为 $P(x, y, z)$, 则有

$$\frac{|4x - 4y - 2z + 3|}{6} = 2,$$

推得 $4x - 4y - 2z + 3 = \pm 12$. 即点 P 的轨迹是两个平行平面:

$$4x - 4y - 2z - 9 = 0 \text{ 和 } 4x - 4y - 2z + 15 = 0.$$

7. 已知两个平面由下式确定, 求它们的交角, 并确定点 $(0, 0, 1)$ 所在的两面角的大小:

$$(x + 2y + 4z - 3)(-3x + y - z - 1) = 0.$$

解: 两平面的法向量分别为 $(1, 2, 4)$ 与 $(-3, 1, -1)$. 则交角 θ 满足 $\cos \theta = \pm \frac{-5}{\sqrt{21}\sqrt{11}} = \pm \frac{5\sqrt{231}}{231}$, 所以 $\theta = \arccos \frac{5\sqrt{231}}{231}$ 或 $\pi - \arccos \frac{5\sqrt{231}}{231}$.

为确定点 $(0, 0, 1)$ 所在的两面角, 计算此点关于两个平面的离差分别为 $\frac{1}{\sqrt{21}}$ 与 $\frac{-2}{\sqrt{11}}$, 由于它们异号, 因此所求两面角的大小为 $\pi - \arccos \frac{5\sqrt{231}}{231}$.

8. 在直角坐标系下, 求下列点到平面的距离.

(1) 点 $(2, 1, 4)$, 平面 $2x - y + 4z - 12 = 0$;

(2) 点 $(-1, 0, 5)$, 平面 $x - 3y + 5z - 2 = 0$.

解: (1) $d = \frac{|4 - 1 + 16 - 12|}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

(2) $d = \frac{|-1 + 25 - 2|}{\sqrt{35}} = \frac{22\sqrt{35}}{35}$.

9. 在直角坐标系中, 设平面 Π_i 的方程为

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

且这两平面相交. 求它们交成的两面角的角平分面的方程.

解: 点 $P(x, y, z)$ 在 Π_1 与 Π_2 的某个两面角的角平分面上当且仅当该点到这两个平面的距离相等. 因此点 P 应满足方程

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

所以角平分面的方程为

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

10. 求到两个给定的平面的距离为定比 k 的点的轨迹方程.

解: 设两个给定平面的方程为

$$\Pi_i: A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

设 $P(x, y, z)$ 点到 Π_1 与 Π_2 的距离之比为 k , 则有

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = k \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

因此 P 点的轨迹方程为

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm k \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

11. 在直角坐标系下, 已知平面 Π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 求 Π 关于 xOy 平面的对称面 Π' 的方程和关于坐标原点的对称面 Π'' 的方程.

解: 设点 $P'(x', y', z') \in \Pi'$, 则 P' 关于 xOy 平面的对称点是 $(x', y', -z')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $Ax' + By' - Cz' + D = 0$, 所以 Π' 的方程为 $Ax + By - Cz + D = 0$.

同理, 设点 $P''(x'', y'', z'') \in \Pi''$, 则 P'' 关于原点的对称点是 $(-x'', -y'', -z'')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $-Ax'' - By'' - Cz'' + D = 0$, 所以 Π'' 的方程为 $Ax + By + Cz - D = 0$.

习 题 5-5

1. 判断下列直线与平面的位置关系. 如果相交, 则求它们的交点与夹角.

(1) 直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ 与平面 $4x + 3y - z + 3 = 0$;

(2) 直线 $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ 与平面 $x + 2y + 2z - 7 = 0$;

(3) 直线 $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ 与平面 $2x + y + z - 5 = 0$.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi = (2, -1, 5)$, 平面的法向量是 $\nu = (4, 3, -1)$. 因为 $(\xi, \nu) = 0$, 直线上的点 $(1, -3, -2)$ 又满足平面方程, 所以直线在平面内.

(2) 直线的方向向量是 $\xi = (-2, -4, 5)$, 平面的法向量是 $\nu = (1, 2, 2)$. 因为 $(\xi, \nu) = 0$, 直线上的点 $(1, 2, -1)$ 不满足平面方程, 所以直线与平面平行.

(3) 直线的标准方程是 $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{2}$, 与平面方程联立后求得交点 $(2, -1, 2)$. 直线的方向向量是 $\xi = (0, 2, 2)$, 平面的法向量是 $\nu = (2, 1, 1)$, 设直线与平面的交角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以夹角 $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 求过点 $A(3, -1, 1)$ 且与平面 $\Pi: x + y + z = 1$ 垂直的直线方程.

解: 因所求直线与平面垂直, 直线的方向向量是 $\xi = (1, 1, 1)$. 故直线方程为 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

3. 判断下列直线间的关系, 并求它们的夹角. 对于相交的直线并求交点:

$$(1) L_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}, L_2: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2};$$

$$(2) L_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}, L_2: \frac{x+2}{6} = \frac{y+3}{10} = \frac{z}{7}.$$

解: (1) 根据第三章命题 9.2, 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0,$$

所以两直线异面. 设夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{406}}{203}$, 故 $\theta = \arccos \frac{8\sqrt{406}}{203}$.

(2) 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

所以两直线共面, 又因它们的方向向量不平行, 故两直线相交. 设夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{13\sqrt{5365}}{1073}$, 故 $\theta = \arccos \frac{13\sqrt{5365}}{1073}$. 解联立方程, 求得交点为 $(1, 2, \frac{7}{2})$.

4. 已知直线 L 的方程是 $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$ 求点 $A(3, 2, -1)$ 到 L 的距离.

解: 直线的方向向量是 $\xi = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0, 3, -3)$, 且点 $(1, 2, 1)$ 在直线上, 故点 A 到直线的距离为

$$d = \frac{|(2, 0, -2) \times (0, 1, -1)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 试证直线

$$L_1: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{与} \quad L_2: \begin{cases} x = -1 + u \\ y = 2 \\ z = u \end{cases} \quad (\text{其中 } t, u \text{ 是参数})$$

是异面直线, 并求它们的公垂线和两直线间的距离.

解: 直线 L_1 通过点 $M_1(3, 0, 1)$, 方向向量是 $\xi_1 = (3, 1, 0)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(-1, 2, 0)$, 方向向量是 $\xi_2 = (1, 0, 1)$. 因此

$$\xi_1 \times \xi_2 = (1, -3, -1).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \xi_1 \times \xi_2)|}{|\xi_1 \times \xi_2|} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11}.$$

由 $M_1, \xi_1, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x + 3y - 10z + 13 = 0.$$

由 $M_2, \xi_2, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & -3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases} x - 3y + 10z - 13 = 0 \\ 3x + 2y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

6. 已知直线 $L: \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 及定点 $P_0(2, 0, -1)$. 求 P_0 关于 L 的对称点.

解: 我们通过考虑点关于平面 $\Pi_1: x - y - 4z + 12 = 0$ 及 $\Pi_2: 2x + y - 2z + 3 = 0$ 的离差来确定 P_0 关于 L 的对称点 P'_0 . $P_0(2, 0, -1)$ 关于 Π_1 的离差 $\delta_1 = \frac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta_2 = \frac{9}{3} = 3$. 所以对称点 $P'_0(x', y', z')$ 关于 Π_1 的离差 $\delta'_1 = \frac{x' - y' - 4z' + 12}{\sqrt{18}} = -\delta_1 = -\sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta'_2 = \frac{2x' + y' - 2z' + 3}{3} = -\delta_2 = -3$. 因此

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = -18 \\ 2x + y - 2z + 3 = -9, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x - y - 4z = -30 \\ 2x + y - 2z = -12. \end{cases} \quad (*)$$

又因为 $\overrightarrow{P_0P'_0}$ 应与直线 L 垂直, 即

$$\begin{vmatrix} x' - 2 & 1 & 2 \\ y' & -1 & 1 \\ z' + 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6x' - 6y' + 3z' - 9 = 0, \quad (**)$$

联立此 3 个方程解得: $x' = 0, y' = 2, z' = 7$. 即对称点的坐标为 $(0, 2, 7)$.

7. 直线过点 $(2, -3, 5)$ 且与三条坐标轴的正向交成等角, 求点 $P(1, -2, 3)$ 到此直线的距离.

解: 显然直线方程为

$$\frac{x + 2}{1} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 5}{1}.$$

所以点 $P(1, -2, 3)$ 到这条直线的距离为

$$d = \frac{|(1, -1, 2) \times (1, 1, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

8. 求通过两直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{8} = \frac{z-5}{-3}$ 和

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 21 + 5t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$$

的交点, 且与这两直线都垂直的直线方程.

解: 因该直线与已知两直线都垂直, 而已知直线的方向分别为 $\xi_1 = (-1, 8, -3), \xi_2 = (4, 5, -10)$. 故所求直线的方向向量为 $\xi = \xi_1 \times \xi_2 = (-65, -22, -37)$. 这两条直线的交点可求得为 $(-1, 16, -1)$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x + 1}{65} = \frac{y - 16}{22} = \frac{z + 1}{37}.$$

9. 求在平面 $2x + 3y + 4z - 9 = 0$ 上经过点 $(1, 1, 1)$ 且与 xOy 平面交成最大角的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi = (A, B, C)$. 因直线在平面 $\Pi: 2x + 3y + 4z - 9 = 0$ 上, 所以 $2A + 3B + 4C = 0$. xOy 平面的方程为 $z = 0$, 我们在几何中已经知道, 当且仅当平面上的直线与两个平面的交线垂直时, 这条直线与另一平面的交角达到极大. 而这两个平面的交线的方向向量是 $(2, 3, 4) \times (0, 0, 1) = (3, -2, 0)$, 因此 ξ 与 $(3, -2, 0)$ 垂直, 即 $3A - 2B = 0$. 解得 $A = \frac{2}{3}B, C = -\frac{13}{12}B$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x - 1}{8} = \frac{y - 1}{12} = \frac{z - 1}{-13}.$$

10. 求下列两直线间的距离, 如两直线有共垂线, 求出它们的公垂线的方程.

$$(1) \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases} \text{ 与 } \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4};$$

$$(2) \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 2t - 5 \\ z = -2t + 1, \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z - 14 = 0. \end{cases}$$

解: (1) 第一条直线化成标准方程为

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+10}{4},$$

因此两直线平行. 距离为

$$d = \frac{|(13, -11, -19) \times (3, -1, 4)|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}} = 25.$$

(2) 直线 L_1 通过点 $M_1(-5, -5, 1)$, 方向向量是 $\xi_1 = (3, 2, -2)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(4, 1, -8)$, 方向向量是 $\xi_2 = (-1, 2, 3)$. 因此

$$\xi_1 \times \xi_2 = (10, -7, 8).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \xi_1 \times \xi_2)|}{|\xi_1 \times \xi_2|} = \frac{24}{\sqrt{213}} = \frac{24\sqrt{213}}{213}.$$

由 $M_1, \xi_1, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+5 & 3 & 10 \\ y+5 & 2 & -7 \\ z-1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 2x - 44y - 41z - 169 = 0.$$

由 $M_2, \xi_2, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 10 \\ y-1 & 2 & -7 \\ z+8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 37x + 38y - 13z - 290 = 0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases} 2x - 44y - 41z - 169 = 0 \\ 37x + 38y - 13z - 290 = 0. \end{cases}$$

11. 已知一点 $P(a, b, c)$ ($abc \neq 0$). 过 P 点向各个坐标面作垂线, 垂足分别为 L, M, N , 求证: OP 与各个面 OMN, ONL, OLM 的交角相等.

证明: 根据假设, 垂足分别为 $L(a, b, 0), M(a, 0, c), N(0, b, c)$. 则面 OMN 的法向量可取为 $\nu_1 = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = (-bc, -ac, ab)$, 类似地, 面 OLM 的法向量可取为 $\nu_2 = (bc, -ac, -ab)$, 面 ONL 的法向量可取为 $\nu_3 = (-bc, ac, -ab)$. 而 $\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$, 由于

$$\overrightarrow{OP} \cdot \nu_1 = \overrightarrow{OP} \cdot \nu_2 = \overrightarrow{OP} \cdot \nu_3 = -abc,$$

可知 OP 与这 3 个面的交角相等.

12. 已知两条异面直线 L_1 和 L_2 . 求证连接 L_1 上任一点和 L_2 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

证明: 适当选择坐标系可使 L_1 为 x 轴, 方程为 $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$ L_2 的方程则为 $\begin{cases} kx - y = 0 \\ z = a, \end{cases}$ ($ak \neq 0$). 设 $P_1(x_1, 0, 0)$ 为 L_1 上任意一个点, $P_2(x_2, kx_2, a)$ 是 L_2 上任意点, 则 P_1P_2 的中点坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{kx_2}{2}, \frac{a}{2})$.

即此轨迹满足参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{k}{2}u \\ z = \frac{a}{2}, \end{cases} \quad u, v \text{ 为参数.}$$

显然是平面 $z = \frac{a}{2}$. 这也是两条异面直线的公垂线段的垂直平分面.

13. 已知直线 L 通过点 $(1, 1, 0)$ 且与直线

$$L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}, \quad L_2: \frac{x}{4} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-1}{-2}$$

垂直, 求直线 L 在各个坐标面上的射影的方程.

解: 因为 L 与 L_1, L_2 都垂直, 所以可取 L 的方向向量为 $\xi = (4, -2, 1) \times (4, -3, -2) = (7, 12, -4)$, 则 L 的方程为

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{12} = \frac{z}{-4}.$$

它在 xOy 平面 $z = 0$ 上的投影方程为 $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{12} = \frac{z}{0}$, 在 yOz 平面 $x = 0$ 上的投影方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{12} = \frac{z}{-4}$, 在 xOz 平面 $y = 0$ 上的投影方程为 $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-4}$.

14. 求过点 $(2, -3, -1)$ 且与直线

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

垂直相交的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi = (A, B, C)$, 因它必须与已知直线垂直, 故有 $-2A - B + C = 0$.

再写出所求直线的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + At \\ y = -3 + Bt \\ z = -1 + Ct, \end{cases}$ 代入已知直线的方程, 得

$$\frac{1 + At}{-2} = \frac{-2 + Bt}{-1} = \frac{-1 + Ct}{1}.$$

由上式可得 $(3A - B + 5C)t = 0$. 由于 $t = 0$ 显然不是解, 而两直线相交说明 t 一定有解, 因此 $3A - B + 5C = 0$. 最后解得 $A : B : C = 4 : -13 : -5$. 从而直线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-13} = \frac{z+1}{-5}.$$

习题 5-6

1. 在标准欧几里得空间 \mathbb{R}^4 中, 求向量 β 在由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间 W 上的正交投影. 设

(1) $\alpha_1 = (2, 2, -3, 1), \alpha_2 = (-2, 1, -2, 3), \alpha_3 = (1, 2, -3, 2), \beta = (1, 1, -2, 1)$;

(2) $\alpha_1 = (-1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, -1, 1, 0), \alpha_3 = (0, 1, -1, 2), \beta = (1, 2, -1, 0)$.

解: (1) 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + \beta_2$, 其中 $\beta_2 = \beta - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 - x_3\alpha_3 \in W^\perp$. 由等式 $(\beta_2, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, 3$, 可以导出以下齐次线性方程组:

$$\begin{cases} 18x_1 + 7x_2 + 17x_3 = 11 \\ 7x_1 + 18x_2 + 12x_3 = 6 \\ 17x_1 + 12x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$, 因此 β 在 W 上的正交投影为:

$$\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{12}\alpha_2 + \frac{1}{12}\alpha_3 = \left(\frac{11}{12}, \frac{5}{4}, -\frac{23}{12}, \frac{11}{12}\right).$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}\right).$$

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$. 证明: 实系数线性方程组 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 B 与方程组 $A^T X = 0$ 的解空间正交.

证明: (\Rightarrow) 若 $AX = B$ 有解, 则有 $C = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n)^T$ 使得 $B = AC$. 于是对 $A^T X = 0$ 的任意解 $D = (d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_n)^T$, 有

$$D^T B = D^T AC = (A^T D)^T C = 0,$$

所以 B 与 $A^T X = 0$ 的解空间正交.

(\Leftarrow) 设 $A^T X = 0$ 的解空间为 W_1 , A 的列向量组张成的子空间为 W_2 . 则 $W_1 \perp W_2$. 又因 $\dim W_1 = n - \text{rank } A = n - \dim W_2$, 所以 $V = W_1 \oplus W_2$. 从而 $W_2 = W_1^\perp$. 已知 $B \perp W_1$, 可得 $B \in W_2$, 即 B 可由 A 的列向量组线性表示, 于是存在 $C \in \mathbb{R}^n$ 使得 $B = AC$.

3. 设 V_1, V_2 是欧几里得空间 V 的两个子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明: V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中所有向量.

证明: 由命题 6.2, $V = V_1 \oplus V_1^\perp$, $\dim V_1^\perp = n - \dim V_1$.

$$\begin{aligned} \dim(V_2 \cap V_1^\perp) &= \dim V_2 + \dim V_1^\perp - \dim(V_2 + V_1^\perp) \\ &\geq n - \dim V_1 + \dim V_2 - n \\ &= \dim V_2 - \dim V_1 \geq 1. \end{aligned}$$

所以 $V_2 \cap V_1^\perp \neq 0$, 存在非零向量 $\alpha \in V_2 \cap V_1^\perp$, 即 $\alpha \in V_2$, $\alpha \perp V_1$.

4. 设 U 为 n 维欧几里得空间 V 的子空间. 证明: $(U^\perp)^\perp = U$.

证明: 因为 U 的向量都与 U^\perp 正交, 因此 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. 又因

$$\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U,$$

因此 $U = (U^\perp)^\perp$.

5. 设 V_1, V_2 为 n 维欧几里得空间 V 的两个子空间, 证明:

$$(1) (V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp;$$

$$(2) (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$$

证明: (1) 若 $\alpha \in (V_1 + V_2)^\perp$, 则 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \perp V_2$, 从而 $\alpha \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$. 所以 $(V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

如果 $\alpha \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$, 则 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \perp V_2$, $\alpha \perp V_1 + V_2$, 所以 $\alpha \in (V_1 + V_2)^\perp$. 这说明 $V_1^\perp \cap V_2^\perp \subseteq (V_1 + V_2)^\perp$.

综上所述有 $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

$$(2) (V_1 \cap V_2)^\perp = [(V_1^\perp)^\perp \cap (V_2^\perp)^\perp]^\perp = [(V_1^\perp + V_2^\perp)^\perp]^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$$

*6. 设 W 为欧几里得空间 V 的子空间, α 是 V 的一个向量. 定义 α 到 W 的距离

$$d(\alpha, W) = |\alpha - \alpha'|,$$

其中, α' 为 α 在 W 上的正交投影.

证明: 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为 W 的基, 则

$$d(\alpha, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha)|}{|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)|}}.$$

这里的 $G(\dots)$ 是向量组的格拉姆矩阵 (见习题 5-3.10).

证明: 设 $\alpha' = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$. 从

$$(\alpha - \alpha', \alpha_j) = \left(\alpha - \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i, \alpha_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

可得

$$\begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} = G(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $G = G(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 可逆 (参见练习 5-3.10). 因此

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix}.$$

$$\alpha' = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m) G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} d(\alpha, W)^2 &= (\alpha - \alpha', \alpha - \alpha') \\ &= \left(\alpha - (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m) G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix}, \alpha - (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m) G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} \right) \\ &= (\alpha, \alpha) - 2((\alpha, \alpha_1) \ \dots \ (\alpha, \alpha_m)) G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} \\ &\quad + ((\alpha, \alpha_1) \ \dots \ (\alpha, \alpha_m)) G^{-T} G G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} \\ &= (\alpha, \alpha) - ((\alpha, \alpha_1) \ \dots \ (\alpha, \alpha_m)) G^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|G|} \left[(\alpha, \alpha) |G| - ((\alpha, \alpha_1) \ \dots \ (\alpha, \alpha_m)) G^* \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha, \alpha_m) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{|G|} \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \dots & (\alpha_1, \alpha_m) & (\alpha_1, \alpha) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & \dots & (\alpha_2, \alpha_m) & (\alpha_2, \alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\alpha, \alpha_1) & \dots & (\alpha, \alpha_m) & (\alpha, \alpha) \end{vmatrix} \\ &= \frac{|G(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha)|}{|G|}. \end{aligned}$$

$$\therefore d(\alpha, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha)|}{|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)|}}.$$

7. 设 V_1, V_2 为欧几里得空间 V 的两个子空间, $x, y \in V$. 线性流形 $L_1 = x + V_1, L_2 = y + V_2$ 之间

的距离定义为

$$d(L_1, L_2) = \min |\alpha - \beta|, \quad \forall \alpha \in L_1, \beta \in L_2.$$

证明: $d(L_1, L_2) = d(x - y, V_1 + V_2)$.

证明: 由 $V = (V_1 + V_2) \oplus (V_1 + V_2)^\perp$, 可得 $x - y = \beta_1 - \alpha_1 + \delta$, 其中 $\alpha_1 \in V_1, \beta_1 \in V_2, \delta \in (V_1 + V_2)^\perp$.

于是

$$d(x - y, V_1 + V_2) = |\delta| = |(x + \alpha_1) - (y + \beta_1)| \geq d(L_1, L_2).$$

反之, 对任意的 $\alpha = x + \alpha_1 \in L_1, \beta = y + \beta_1 \in L_2$, 令

$$\alpha - \beta = (x - y) + (\alpha_1 - \beta_1) = \gamma + \delta,$$

其中 $\gamma \in V_1 + V_2, \delta \in (V_1 + V_2)^\perp$. 则

$$x - y = (\gamma - \alpha_1 + \beta_1) + \delta.$$

于是

$$|\alpha - \beta|^2 = |\gamma + \delta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 \geq |\delta|^2 = d(x - y, V_1 + V_2)^2.$$

(其中 $|\gamma + \delta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2$ 是因为 $\gamma \perp \delta$.) 所以

$$d(L_1, L_2) = \min |\alpha - \beta| \geq d(x - y, V_1 + V_2).$$

最终可得 $d(L_1, L_2) = d(x - y, V_1 + V_2)$.

8. 求两个平面 $L_1 = x + L(\alpha_1, \alpha_2)$ 与 $L_2 = y + L(\beta_1, \beta_2)$ 之间的距离, 其中

$$\alpha_1 = (1, -2, 0, -3), \quad \alpha_2 = (2, -2, 1, 2), \quad x = (4, 5, 3, 2);$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, -2, 0, -1), \quad y = (1, -2, 1, -3).$$

解: $W = L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$. 所以

$$d(L_1, L_2) = d(x - y, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, (x - y))|}{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)|}} = \sqrt{\frac{324}{36}} = 3.$$

9. 求下列方程的最小二乘解:

$$\begin{cases} 3.4x - 1.6y = 1 \\ 3.3x - 1.7y = 1 \\ 3.2x - 1.5y = 1 \\ 2.6x - 1.1y = 1. \end{cases}$$

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.6 \\ 3.3 & -1.7 \\ 3.2 & -1.5 \\ 2.6 & -1.1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则最小二乘解 (x, y) 为线性方程 $A^T A X = A^T B$ 的解. 解这个方程, 得

$$\begin{cases} x \approx 0.69 \\ y \approx 0.78 \end{cases}$$

习题 5-7

1. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 为正交矩阵, 且 $|A| = 1$.

证明: $a_{ij} = A_{ij}$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明: 因为 $|A| = 1$, 所以 $AA^* = E$, 从而

$$A^* = A^{-1} = A^T,$$

两边比较后可得

$$a_{ij} = A_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

2. 设 \mathcal{A} 是欧几里得空间 V 的一个变换.

证明: 如果 \mathcal{A} 保持内积不变, 即对所有的 $\alpha, \beta \in V$, $(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$, 那么它一定是线性的, 因而正是正交变换.

证明: 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(\alpha + \beta) - \mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}\beta, \mathcal{A}(\alpha + \beta) - \mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}\beta) \\ &= (\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}(\alpha + \beta)) - 2(\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}\alpha) - 2(\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}\beta) \\ &+ (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) + 2(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\beta) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) - 2(\alpha + \beta, \alpha) - 2(\alpha + \beta, \beta) + (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &= ((\alpha + \beta) - \alpha - \beta, (\alpha + \beta) - \alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta$.

类似地,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha) \\ &= (\mathcal{A}(k\alpha), \mathcal{A}(k\alpha)) - 2k(\mathcal{A}(k\alpha), \mathcal{A}\alpha) + k^2(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) \\ &= (k\alpha, k\alpha) - 2k(k\alpha, \alpha) + k^2(\alpha, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}\alpha$.

因此 \mathcal{A} 是线性变换.

3. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是欧几里得空间的两个规范正交基. 证明: 存在正交变换 \mathcal{A} , 使

$$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

证明: 由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间的基, 因此满足题设条件的线性变换 \mathcal{A} 一定存在. 对于任意的两个向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i$, 有 $\mathcal{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{A}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, $\mathcal{A}(\beta) = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, 因此

$$(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = (\alpha, \beta).$$

所以 \mathcal{A} 是正交变换.

4. 求下列正交方阵的欧拉角:

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1) $\theta = 0$, $\phi + \psi = \frac{5\pi}{3}$;

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$;

(3) 由 $r_{33} = \cos \theta = 0$, $\theta \in [0, \pi]$, 可得 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 再由 $r_{31} = \sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 以及 $r_{32} = \cos \psi = -\frac{1}{2}$ 可得 $\psi = \frac{2\pi}{3}$. 最后由 $r_{13} = \sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及 $r_{23} = -\cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

*5. 设点 P 的坐标为 $(1, 1, 0)$, 求绕轴 \overrightarrow{OP} 按右手方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 的正交变换.

解: 参看例 7.5. 旋转轴的单位向量是 $\xi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. 令 $\eta = \xi - \vec{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$. 沿 η 方向的镜射记为 \mathcal{S} , 由于

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\vec{i}) = \vec{i} - 2\frac{(\vec{i}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \\ \mathcal{S}(\vec{j}) = \vec{j} - 2\frac{(\vec{j}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \\ \mathcal{S}(\vec{k}) = \vec{k} - 2\frac{(\vec{k}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \end{cases}$$

因此 \mathcal{S} 在基 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 下的矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面旋转 $\mathcal{R}_{\vec{k}, -\frac{\pi}{6}}$ 的矩阵是

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

最后得到所求正交变换的矩阵为

$$SRS = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

*6. 求正交变换

$$\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X$$

的旋转轴与旋转角.

解: 求旋转轴相当于求 $AX = X$ 的解向量 $X \in \mathbb{R}^3$. 解得旋转轴的方向向量是 $\xi = (\sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1)$. 为求旋转角, 取一个与 ξ 正交的向量 $\alpha = (1, -2, -1)$, 则旋转角 $\theta = \langle \alpha, \mathcal{A}(\alpha) \rangle$.

$$\cos \theta = \frac{(\alpha, \mathcal{A}(\alpha))}{|\alpha|^2} = -\frac{3}{4}.$$

又因混合积

$$(\xi, \alpha, \mathcal{A}(\alpha)) = -\frac{21}{2} < 0,$$

所以旋转角 $\theta = \pi + \arccos \frac{3}{4}$.