

# 习题解答

## 第四章 矩阵的秩与矩阵的运算

### 习题 4-1

1. 设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 但不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  线性表示. 证明: 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$  等价.

**证明:** 由假设, 存在  $a_1, \dots, a_s \in K$  使得

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_s\alpha_s.$$

如果  $a_s = 0$ , 则  $\beta$  可以被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  线性表示, 与假设矛盾, 因此  $a_s \neq 0$ . 于是

$$\alpha_s = \frac{1}{a_s}\beta - \frac{a_1}{a_s}\alpha_1 - \dots - \frac{a_{s-1}}{a_s}\alpha_{s-1},$$

即  $\alpha_s$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$  线性表示. 从而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$  线性表示. 另一方面, 根据假设, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$  可以被向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 因此这两个向量组等价.

\*2. (**替换定理**) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 且可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示. 证明: 存在  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  的一个置换  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ , 使向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{i_{r+1}}, \beta_{i_{r+2}}, \dots, \beta_{i_t}$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  等价 ( $r = 1, \dots, s$ ).

**证明:** 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 且可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示, 故  $s \leq t$ .

下面用归纳法证明替换定理.

(i) 设  $s = 1$ .

因为  $\alpha_1$  可由  $\beta_1, \dots, \beta_t$  线性表示, 故存在  $a_i \in K$  使得  $\alpha_1 = \sum_{i=1}^t a_i\beta_i$ . 而  $\alpha_1$  线性无关, 即  $\alpha_1 \neq 0$ , 所以  $a_1, \dots, a_t$  不全为零. 必有  $a_l \neq 0$  ( $1 \leq l \leq t$ ). 则

$$\beta_l = \frac{1}{a_l}\alpha_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^t \frac{a_i}{a_l}\beta_i,$$

因此向量组  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_{l-1}, \beta_{l+1}, \dots, \beta_t$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  等价.

令  $\beta_{i_1} = \beta_l, \beta_{i_2} = \beta_1, \dots, \beta_{i_l} = \beta_{l-1}, \beta_{i_{l+1}} = \beta_{l+1}, \dots, \beta_{i_t} = \beta_t$ , 即得结论.

(ii) 假定结论对  $s-1$  成立. 考察  $s$  个线性无关的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ .

因  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  线性无关, 由归纳假设, 存在  $\beta_1, \dots, \beta_t$  的一个置换  $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}$ , 使

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{j_{r+1}}, \dots, \beta_{j_t}\} \cong \{\beta_1, \dots, \beta_t\} \quad (r = 1, \dots, s-1).$$

又  $\alpha_s$  可由  $\beta_1, \dots, \beta_t$  线性表示, 所以  $\alpha_s$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_{j_s}, \dots, \beta_{j_t}$  线性表示. 故存在  $k_i, l_k \in K$ ,  $i = 1, \dots, s-1, k = s, \dots, t$ , 使得

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{s-1} k_i\alpha_i + \sum_{k=s}^t l_k\beta_{j_k}.$$

由于  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性无关, 故  $l_s, \dots, l_t$  不全为零. 设第一个不为零的是  $l_h$ , 则  $h \geq s$ . 从而  $\beta_{j_h}$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{j_{h+1}}, \dots, \beta_{j_t}$  线性表示. 令  $\beta_{i_s} = \beta_{j_h}, \beta_{i_1} = \beta_{j_1}, \dots, \beta_{i_{s-1}} = \beta_{j_{s-1}}, \beta_{i_{s+1}} = \beta_{j_{s+1}}, \dots, \beta_{i_t} = \beta_{j_t}$ , 则

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \dots, \beta_{i_t}\} \cong \{\beta_1, \dots, \beta_t\}.$$

由归纳法原理可知结论成立.

**3.** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是它的一个部分组. 证明: 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出, 则  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组.

**证明:** 作为向量组的部分组,  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  当然可以被  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示. 因此这两个向量组等价, 从而有相同的秩  $r$ . 于是由命题 1.9 可知向量组  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关. 由推论 1.8 可知它是极大线性无关组.

**4.** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_s$  有相同的秩. 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  等价.

**证明:** 根据假设, 有

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \subseteq L(\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s),$$

又因这两个向量组有相同的秩, 因此它们张成的线性子空间有相同的维数, 从而相等. 再利用命题 1.1, 可知这两个向量组线性等价.

**5.** 对下列向量组, 将  $\alpha_1$  扩充成向量组的一个极大无关组:

$$(1) \alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -1, 0, 1, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3, -1, 0), \alpha_3 = (3, 0, 3, 0, 1), \alpha_4 = (1, -1, 1, -1, 1), \alpha_5 = (-1, -5, -6, 5, 3), \alpha_6 = (2, 1, 2, 1, 0).$$

**解:** (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ .

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ .

**6.** 设向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$  的秩分别是  $r_1, r_2, r_3$ . 证明:

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2.$$

**证明:** 由于向量组  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  都可由向量组  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t\}$  线性表示, 故

$$r_1 \leq r_3, \quad r_2 \leq r_3,$$

从而

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3.$$

设  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}$  是  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组,  $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_{r_2}}$  是  $\beta_1, \dots, \beta_t$  的一个极大线性无关组, 则

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t\} \cong \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_{r_2}}\},$$

所以

$$r_3 = \text{rank}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_{r_2}}\} \leq r_1 + r_2.$$

**7.** 设向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\}, \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_s + \beta_s\}$  的秩分别是  $r_1, r_2, r_3$ . 证明:  $r_3 \leq r_1 + r_2$ .

**证明:** 因为  $\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_s + \beta_s\}$  可由  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s\}$  线性表示, 因此它的秩

$$r_3 \leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s\} \leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} + \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_s\} = r_1 + r_2.$$

8. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$  为它的一个部分组. 证明:

$$\text{rank}\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}\} \geq r + m - s.$$

**证明:** 设  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$  的秩等于  $t$ , 则它的一个极大无关组  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}$  是  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的线性无关组, 它可被扩充为  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组, 而这些扩充的向量不可能是  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$  的向量, 否则与极大无关组矛盾. 而  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  中共有  $s - m$  个不属于  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$  的向量, 其中选出  $r - t$  个不同的向量添加到  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}$  以生成  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组, 从而

$$r - t \leq s - m,$$

移项得

$$\text{rank}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\} = t \geq r + m - s.$$

9. 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个可以被另一个线性表示. 证明: 这两个向量组等价.

**证明:** 设向量组 (I) 可被向量组 (II) 线性表示, 它们生成的线性子空间分别记为  $L_1, L_2$ . 则  $L_1 \subseteq L_2$ . 又因它们有相同的秩, 因此它们生成的线性子空间有相同的维数, 从而  $L_1 = L_2$ , 即 (I) 与 (II) 等价.

#### 习题 4-2

1. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**解:** (1) 2; (2) 2; (3) 4; (4) 3.

2. 求下列向量组的秩与极大线性无关组:

$$(1) \alpha_1 = (3, 2, -1, -3, -2), \alpha_2 = (2, -1, 3, 1, -3), \alpha_3 = (1, -4, 7, 5, 4), \alpha_4 = (1, -7, 11, 9, 5);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1, 1, 1), \alpha_3 = (1, 1, 1, -1, 1), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1, -1), \alpha_5 = (1, 1, 1, 1, 1);$$

$$(3) \alpha_1 = (2, -1, 3, -2, 4), \alpha_2 = (4, -2, 5, 1, 7), \alpha_3 = (2, -1, 1, 8, 2), \alpha_4 = (2, -1, 2, 3, 3);$$

$$(4) \alpha_1 = (1, 3, 3, 5), \alpha_2 = (3, 2, -5, 1), \alpha_3 = (2, 3, 0, 4), \alpha_4 = (5, 4, -7, 1), \alpha_5 = (3, 5, 1, 7).$$

**解:** (1) 秩 4,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

(2) 秩 5,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ .

(3) 秩 2,  $\alpha_1, \alpha_2$ .

(4) 秩 3,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ .

3 求向量组  $\alpha_1 = (-3, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, -3, 1, 1), \alpha_3 = (1, 1, -3, 1), \alpha_4 = (1, 1, 1, -3)$  的所有极大线性无关组.

**解:** 任意 3 个向量都构成极大线性无关组.

4. 求下列向量组所张成的子空间的基与维数:

$$(1) \alpha_1 = (4, -5, 2, 6), \alpha_2 = (2, 1, 3, 2), \alpha_3 = (2, -6, -1, 4), \alpha_4 = (2, 13, 5, -6);$$

(2)  $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1, -1)$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 0, 2, 1)$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1, -1, -2)$ ,  $\alpha_4 = (1, 1, 1, 2, -2)$ .

解: (1) 维数 3, 基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ .

(2) 维数 3, 基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

5. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为此矩阵的任意两行都线性相关, 因此秩  $\leq 1$ . 而此矩阵的秩等于 0 的充分必要条件是所有的  $a_i b_j = 0$ . 如  $(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ , 则必有  $(b_1, \cdots, b_n) = 0$ , 如  $(b_1, \cdots, b_n) \neq 0$ , 则必有  $(a_1, \cdots, a_n) = 0$ . 因此当  $(a_1, \cdots, a_n) = 0$  或  $(b_1, \cdots, b_n) = 0$  时, 秩为 0, 否则, 秩为 1.

(2) 当  $a = 1$  时, 秩为 1; 当  $a = \frac{1}{1-n}$  时, 秩为  $n-1$  ( $n > 1$ ); 其余情形, 秩为  $n$ .

6. 设

$$W = \{(a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)^T \mid a_i \in K, i = 1, \cdots, r\} \subseteq K^m$$

证明:  $\dim W = r$ .

证明: 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (r),$$

则  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关, 且对任意的

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

有  $\alpha = a_1 \alpha_1 + \cdots + a_r \alpha_r$ , 所以  $\dim W = r$ .

7. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关,  $\beta_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} \alpha_i$  ( $j = 1, \cdots, s$ ), 令  $A = (a_{ij})$ . 证明:

$$\text{rank}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\} = \text{rank } A.$$

证明: (i) 设  $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_t}$  是  $\beta_1, \cdots, \beta_s$  的一个极大线性无关组. 考察  $A$  的列向量组  $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ . 则

$$(\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_t}) = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)(\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_t}).$$

如果  $\sum_{i=1}^t k_i \gamma_{j_i} = 0$ , 则

$$(\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_t}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)(\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_t}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

即  $\sum_{i=1}^t k_i \beta_{j_i} = 0$ , 由于  $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_t}$  线性无关, 因此  $k_1 = \cdots = k_t = 0$ , 即  $\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_t}$  线性无关. 所以

$$\text{rank}(A) \geq t = \text{rank}\{\beta_1, \cdots, \beta_s\}.$$

(ii) 设  $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_t}$  是  $A$  的列向量组的极大线性无关组, 则由  $\sum_{i=1}^t k_i \beta_{j_i} = 0$  可得

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_r)(\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_t}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_t}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由于  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关, 必须有

$$(\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_t}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由  $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_t}$  的线性无关性可得  $k_1 = \dots = k_t = 0$ , 即  $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}$  线性无关, 因而

$$\text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_s\} \geq t = \text{rank}(A).$$

最终得到

$$\text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_s\} = \text{rank}(A).$$

8. 设  $A \in M_{m,n}(K)$ . 已知  $A$  的第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  行组成  $A$  的行向量组的极大线性无关组,  $A$  的第  $j_1, j_2, \dots, j_r$  列组成  $A$  的列向量组的极大线性无关组. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_r} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r, j_1} & a_{i_r, j_2} & \cdots & a_{i_r, j_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**证明:** 适当交换矩阵的行与列, 可设矩阵的前  $r$  行与前  $r$  列分别为矩阵的行向量组与列向量组的极大线性无关组. 从而矩阵可经初等行变换化为

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

因矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量的线性关系, 故矩阵  $B$  的前  $r$  列仍为  $B$  的列向量组的极大线性无关组. 从而  $B$  可经初等列变换化为

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为  $\text{rank}(C) = \text{rank}(B) = r$ , 所以

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

### 习题 4-3

1. 讨论下列含参量线性方程组的解的情况, 并求解.

$$(1) \begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b - 1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b + 3)x_3 = 2b - 1. \end{cases}$$

解: (1) 当  $b(a-1)(a+2) \neq 0$  时有解:  $x_1 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$ ,  $x_2 = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$ ,  $x_3 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$ ;

当  $a = b = -2$  时, 有解  $x_1 = x_3 = -1 - 2x_2$ ;

当  $a = b = 1$  时, 有解  $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ ;

其余情形无解;

(2) 当  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$  时有解:  $x_1 = \frac{\lambda^2 + 4\lambda - 15}{\lambda^2}$ ,  $x_2 = \frac{\lambda^2 + \lambda + 15}{\lambda^2}$ ,  $x_3 = \frac{-4\lambda^2 + \lambda + 15}{\lambda^2}$ ;

当  $\lambda = 1$  时有解:  $x_1 = 2 - x_3$ ,  $x_2 = -7 + 2x_3$ ;

当  $\lambda = 0$  时无解;

(3) 当  $a \neq 0, b \neq \pm 1$  时有解:  $x_1 = \frac{5-b}{a(b+1)}$ ,  $x_2 = \frac{-2}{b+1}$ ,  $x_3 = \frac{2(b-1)}{b+1}$ ;

当  $b = 1$  时有解:  $x_2 = 1 - ax_1$ ,  $x_3 = 0$ ;

当  $a = 0, b = 5$  时有解:  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_3 = \frac{4}{3}$ ,  $x_1$  为任意数;

其余情形无解.

2. 利用线性方程组的理论证明: 如果直线

$$L_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

与直线

$$L_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

相交, 那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

解: 根据例 3.3 的解, 如果  $L_1$  与  $L_2$  相交, 那么线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = -D_4 \end{cases}$$

有唯一解, 从而  $\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 3$ , 这里  $A$  与  $\tilde{A}$  分别是上述方程组的系数矩阵与增广矩阵. 因此行列式  $|\tilde{A}| = 0$ ,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 求三个平面  $A_ix + B_iz + D_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别满足下列关系的充要条件.

(1) 有一个公共点;

(2) 有一条公共直线;

- (3) 三个平面平行; (4) 三个平面构成三棱柱.

解: 考察非齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \quad (*)$$

它的系数矩阵与增广矩阵分别记为  $A$  与  $\tilde{A}$ .

(1) 三个平面有一个公共点  $\iff$  方程组 (\*) 有唯一解  $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 3 \iff |A| \neq 0$ .

(2) 三个平面有一条公共直线  $\iff$  方程组 (\*) 有解, 而且 (\*) 的导出方程组的基础解系只含一个向量  $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2$ .

(3) 三个平面平行  $\iff \frac{A_i}{A_j} = \frac{B_i}{B_j} = \frac{C_i}{C_j} \neq \frac{D_i}{D_j} \quad 1 \leq i < j \leq 3$ .

(4) 三个平面构成三棱柱  $\iff$  方程组 (\*) 无解, 而 (\*) 的导出方程组的基础解系含一个向量  $\iff \text{rank}(A) = 2, \text{rank}(\tilde{A}) = 3$ , 而且  $A$  中任意两行都不成比例.

#### 习 题 4-4

1. 判别下列哪些映射为线性映射?

(1) 在向量空间  $V$  中,  $\mathcal{A}(\xi) = \alpha$ , 其中  $\alpha$  为固定向量;

(2)  $\mathcal{A}: K^2 \rightarrow K^3$

$$(x, y) \mapsto (-1, 2, 3)$$

(3)  $\mathcal{A}: K^3 \rightarrow K^3$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 + x_2 - x_3, -x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$$

(4)  $\mathcal{A}: K^3 \rightarrow K^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - z, xy)$$

(5)  $\mathcal{A}(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) = (x+y)\varepsilon_1 + (x-y+z)\varepsilon_2 + (y-z)\varepsilon_3$ , 其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  为线性空间  $V$  的基;

(6) 几何空间  $\mathbb{R}^2$  中,  $\mathcal{A}$  为平面按逆时针方向绕原点旋转  $45^\circ$  的变换.

解: (1) 如  $\alpha = 0$ , 是; 如  $\alpha \neq 0$ , 不是.

(2) 不是.

(3) 是.

(4) 不是.

(5) 是.

(6) 是.

2. 对于上题中的线性映射, 求出它们在相应基下的矩阵 (如未指明基, 则取自然基).

解: (1)  $\alpha = 0$  时为零矩阵.

(3)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

(5)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

(6)  $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$ .

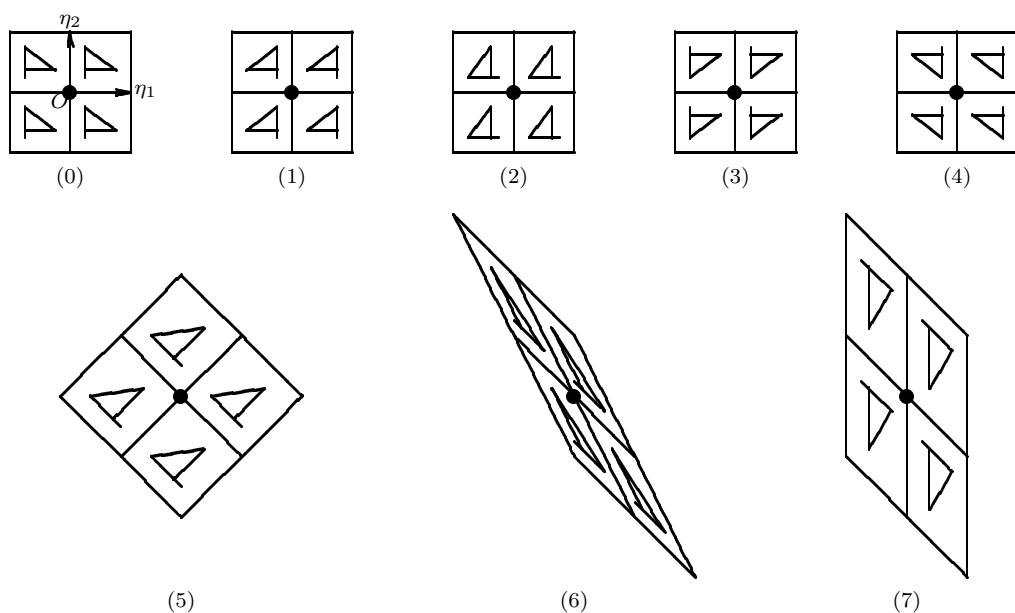
3. 设  $\mathcal{A}$  为向量空间  $V_1$  到向量空间  $V_2$  的线性映射,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V_1, \mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \dots, m$ .  
证明: 如果  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  也线性无关.

证明: 设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m) &= 0 \\ \Rightarrow k_1\mathcal{A}(\alpha_1) + k_2\mathcal{A}(\alpha_2) + \dots + k_m\mathcal{A}(\alpha_m) &= 0 \\ \Rightarrow k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_m\beta_m &= 0, \end{aligned}$$

由于  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  线性无关, 可得  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ , 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

4. 下面图中的 (1)–(7) 都是图 (0) 经过整数系数矩阵的线性变换而得到的. 图 (0) 中标出了原点  $O$  及基向量  $\eta_1, \eta_2$ . 试通过确定基向量在图 (1)–(7) 中的象以及它们关于  $\eta_1, \eta_2$  的坐标 (均为整数) 以写出相应线性变换的矩阵.



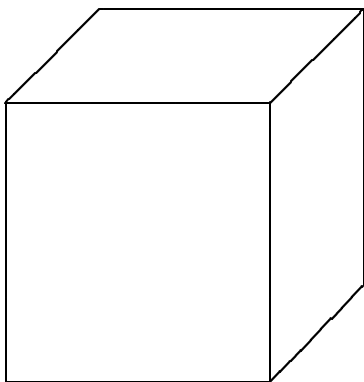
第4题图

解: (1)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 (2)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 (4)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 (5)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 (6)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 (7)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

5. 有一个边长为1的立方体的每个表面都贴上了相同的浮雕马的平面图. 广告设计师决定采用第三章 §8 所述的斜二测投影画出它的立体图 (如附图). 他发现只要对正面的图形作两个线性变换就能



得到顶面和侧面的两个图形(为什么?). 如果把每个侧面的左下角取为原点, 请写出顶面和右侧面的图形对应的变换矩阵.



第5题图

解: 顶面:  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ , 右侧面:  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{pmatrix}$ .

### 习题 4-5

1. 在几何空间中取直角标架  $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ .  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  分别表示空间按右手系绕  $x, y, z$  轴旋转  $45^\circ$  的变换.

- (1) 以坐标的形式写出  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  的表达式;
- (2) 求  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  在基  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  下的矩阵;
- (3) 求  $\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{B}\mathcal{A}, \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}, \mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}^4\mathcal{B}^4$  在基  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  下的矩阵;
- (4) 证明:  $\mathcal{A}^8 = \mathcal{B}^8 = \mathcal{C}^8 = \mathcal{E}$ , 这里  $\mathcal{E}$  表示恒同映射.

解: (1)  $\mathcal{A}(x, y, z) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$ ,

$\mathcal{B}(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$ ,

$\mathcal{C}(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z\right)$ .

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ,

$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(3)  $AB = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $ABC =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $A + B = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,

$$A^4B^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 略.

2. 计算下列矩阵的运算:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix};$$

求  $AB, AB - BA, (A - B)^2$ .

$$\text{解: (1) } AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, AB - BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}, (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(2) AB = \begin{pmatrix} ac + ba + cb & ac + ba + cb & a^2 + b^2 + c^2 \\ ac + ba + cb & a^2 + b^2 + c^2 & ac + ba + cb \\ a^2 + b^2 + c^2 & ac + ba + cb & ac + ba + cb \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} (b - c)(a - b) & -(a - c)(a - b) & (a - b)^2 \\ -(a - c)(a - b) & (a - b)^2 & (b - c)(a - b) \\ (a - b)^2 & (b - c)(a - b) & -(a - c)(a - b) \end{pmatrix},$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} (a - c)(a + b - 2c) & 0 & -(a - c)(a + b - 2c) \\ -(a - b)(a + b - 2c) & 0 & (a - b)(a + b - 2c) \\ -(b - c)(a + b - 2c) & 0 & (b - c)(a + b - 2c) \end{pmatrix}.$$

3. 计算:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5; \quad (4) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n;$$

$$(5) (a \ b \ c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a \ b \ c);$$

$$(7) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n; \quad (8) (\lambda E_n + A)^n, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1) } \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

$$(5) (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$(6) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

$$(8) \lambda^n \left( E - \frac{1}{n} A \right) + \frac{1}{n} (\lambda + n)^n A.$$

4. 计算矩阵多项式, 设

$$(1) f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: (1)  $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 11 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

5. 如果  $AB = BA$ , 称矩阵  $A$  与  $B$  可交换. 设

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求所有与  $A$  可交换的矩阵.

解: (1)  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}.$

(2)  $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & c & a+b-c \end{pmatrix}.$

(3)  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$

6. 设

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \text{其中 } a_i \neq a_j, \forall i \neq j.$$

证明: 与  $A$  可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明: 设  $B = (b_{ij})$  与  $A$  可交换, 则

$$a_i b_{ij} = b_{ij} a_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

于是

$$(a_i - a_j) b_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

但当  $i \neq j$  时有  $a_i \neq a_j$ , 所以对于  $i \neq j$  有  $b_{ij} = 0$ , 即

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

7. 证明: 与所有矩阵可交换的矩阵只能是标量矩阵.

证明: 显然标量矩阵与所有矩阵可交换. 设  $B$  与所有矩阵可交换, 则由上题知  $B = \text{diag}(b_1, \cdots, b_n)$ . 又对任意的  $i \neq j$  有  $BE_{ij} = E_{ij}B$ , 因此对  $i \neq j$  有  $b_i = b_j$ , 即  $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$ , 所以  $B = bE_n$ .

8. 证明: 不存在矩阵  $A, B$ , 使  $AB - BA = E_n$ .

证明:  $AB - BA$  的对角线元素之和 =  $\sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki} \right) = 0$ , 而  $E_n$  的对角线元素之和 =  $n$ , 可见  $AB - BA \neq E_n$ .

9. 设  $A = B + E$ . 证明:  $A^2 = 2A$  当且仅当  $B^2 = E$ .

证明:  $(\Rightarrow) B^2 = (A - E)^2 = A^2 - 2A + E = E$ .

$(\Leftarrow) A^2 = (B + E)^2 = B^2 + 2B + E = 2(B + E) = 2A$ .

10. 已知数域  $K$  上的两个方阵  $A$  与  $B$  可交换. 证明:

(1)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ;

(2)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ;

(3)  $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k}$ .

证明: 略.

11. 证明: 上(下)三角形矩阵的乘积还是上(下)三角形矩阵.

证明: 设  $A = (a_{ij})$  与  $B = (b_{ij})$  都是上三角形矩阵, 即对  $i > j$  有  $a_{ij} = 0$  以及  $b_{ij} = 0$ . 于是当  $i > j$  时有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

因此  $AB$  是上三角形矩阵. 对于下三角形矩阵也可以类似地证明.

12. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵. 证明:  $\text{rank } A = 1$  的充分必要条件是存在  $m$  维非零向量  $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$  与  $n$  维非零向量  $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ , 使  $A = \alpha^T \beta$ .

证明:  $(\Rightarrow)$  设  $\text{rank}(A) = 1$ , 则  $A$  必有一行(设为  $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ ) 不等于 0, 而其余各行都是这一行的倍数, 从而

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \alpha^T \beta.$$

$(\Leftarrow)$  设  $\alpha, \beta$  是两个非零向量, 则必有某个  $a_i \neq 0, b_j \neq 0$ , 从而  $a_i b_j \neq 0$ , 使得  $A = \alpha^T \beta = (a_i b_j) \neq 0$ . 于是

$$1 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{\text{rank}(\alpha), \text{rank}(\beta)\} = 1.$$

13. 求出平方为零的所有二阶方阵.

解: 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = 0$ . 如果  $b_{12} = 0$ , 则

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & (a_{11} + a_{22})a_{12} \\ 0 & a_{22}^2 \end{pmatrix} = 0,$$

于是  $a_{11} = a_{22} = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

再设  $a_{12} = b \neq 0$ ,  $a_{11} = a$ , 由于  $0 < \text{rank}(A) = 1 < 2$ , 则有  $A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}$ . 于是

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(a+kb) & ka(a+kb) \\ b(a+kb) & kb(a+kb) \end{pmatrix} = 0.$$

由于  $b \neq 0$ , 可得  $a+kb=0$ ,  $k = -\frac{a}{b}$ . 因此矩阵  $A$  的可能形式是

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

14. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明: 存在  $n \times s$  非零矩阵  $B$ , 使  $AB = 0$  的充分必要条件是  $\text{rank } A < n$ .

证明: ( $\Rightarrow$ ) 设有非零矩阵  $B$  使得  $AB = 0$ , 则  $B$  的列向量都是齐次线性方程组  $AX = 0$  的解, 而且其中有非零解. 因此  $\text{rank } A < n$ .

( $\Leftarrow$ ) 设  $\text{rank } A < n$ , 则齐次线性方程组  $AX = 0$  有非零解

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

令

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times s} \neq 0,$$

则  $AB = 0$ .

15. 设  $A, B$  分别为  $m \times n$  与  $n \times s$  矩阵. 证明: 如果  $AB = 0$ , 则

$$\text{rank } A + \text{rank } B \leq n.$$

证明:  $B$  的列向量都是齐次线性方程组  $AX = 0$  的解, 而这个齐次线性方程组的解空间最多含有  $n - \text{rank } A$  个线性无关的向量, 从而

$$\text{rank } B \leq n - \text{rank } A,$$

移项得  $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$ .

16. 设  $A$  为  $n \times r$  矩阵,  $B$  为  $r \times s$  矩阵,  $\text{rank } B = r$ . 证明:

(1) 如果  $AB = 0$ , 则  $A = 0$ ;

(2) 如果  $AB = B$ , 则  $A = E$ .

证明: (1) 由上题,  $\text{rank } A + \text{rank } B \leq r$ , 由  $\text{rank } B = r$  可得  $\text{rank } A = 0$ , 从而  $A = 0$ .

(2) 因为  $(A - E)B = 0$ , 由 (1) 得  $A - E = 0$ ,  $A = E$ .

17. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵. 证明: 如果对所有的  $n$  维向量  $X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$  都有  $AX = 0$ , 则  $A = 0$ .

证明: 由假设知单位矩阵的列向量也是  $AX = 0$  的解, 因此  $A = AE = 0$ .

## 习题 4-6

1. 计算下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: (1)  $-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

(2)  $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(4)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

(5)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

(6)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -4 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2. 求下列矩阵的伴随矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1)  $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

(2)  $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

(3)  $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$

(4)  $\begin{pmatrix} 3 & -11 & 10 \\ 6 & -14 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

3. 设  $A \in M_n(K)$ . 证明: 如果存在常数项非零的多项式  $f(x)$ , 使  $f(A) = 0$ , 则  $A$  可逆.

证明: 设  $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ ,  $a_m \neq 0$ , 使

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE = 0,$$

则

$$A \left( -\frac{a_0}{a_m} A^{m-1} - \frac{a_1}{a_m} A^{m-2} - \dots - \frac{a_{m-1}}{a_m} E \right) = E,$$

因此  $A$  可逆.

4. 设  $B^3 = 0$ . 证明:  $E - B$  可逆, 并求  $E - B$  的逆.

证明: 因为  $(E - B)(E + B + B^2) = E - B^3 = E$ , 所以  $E - B$  可逆, 且  $(E - B)^{-1} = E + B + B^2$ .

5. 设  $A^3 = 2E$ ,  $B = A^2 + 2A - E$ , 求  $B^{-1}$ .

证明: 由矩阵方程组

$$\begin{cases} B = A^2 + 2A - E \\ AB = 2A^2 - A + 2E \\ A^2B = -A^2 + 2A + 4E \end{cases}$$

通过加减消去法使等式右边只含  $E$ , 可得  $(5A^2 + 4A - 3E)B = 31E$ , 因此

$$B^{-1} = \frac{1}{31}(5A^2 + 4A - 3E).$$

6. 设  $A^2 = A$ , 证明:  $E + A$  可逆, 并求  $(E + A)^{-1}$ .

证明: 设  $B = E + A$ , 则  $A = B - E$ , 因此  $(B - E)^2 = B - E$ ,  $B^2 - 3B = -2E$ ,  $B(3E - B) = 2E$ . 因此  $B^{-1} = \frac{1}{2}(3E - B) = \frac{1}{2}(3E - E + A) = E - \frac{1}{2}A$ .

7. 设  $A, B \in M_n(K)$ , 证明: 如果  $AB = kE_n$  ( $k \neq 0$ ), 则  $BA = kE_n$ .

证明: 由  $AB = kE_n$  ( $k \neq 0$ ) 可得  $A^{-1} = \frac{1}{k}B$ ,  $B = kA^{-1}$ . 因此  $BA = kA^{-1}A = kE$ .

8. 证明: (1) 上(下)三角形矩阵的伴随矩阵还是上(下)三角形矩阵;

(2) 可逆的上(下)三角形矩阵的逆矩阵还是上(下)三角形矩阵.

证明: (1) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则当  $j > i$  时,  $a_{ij}$  的余子式  $M_{ij}$  还是上三角形的, 且  $M_{ij}$  的  $(i, i)$  元素 =  $A$  的  $(i + 1, i)$  元素 = 0, 所以  $M_{ij} = 0$  ( $j > i$ ). 从而当  $j > i$  时有  $A_{ij} = 0$ . 因此伴随矩阵  $A^*$  是上三角形矩阵. 类似可证下三角形的情形.

(2) 如  $A$  可逆, 则  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$  仍为三角形矩阵.

9. 证明: 对任何  $n$  阶方阵  $A$ , 必存在  $\lambda_0 \in K$ , 使得  $\lambda_0 E_n - A$  是可逆阵.

证明: 因为  $|\lambda E - A|$  是首项系数为 1 的  $n$  次多项式, 而  $n$  次多项式在  $K$  上最多有  $n$  个根, 故必存在  $\lambda_0 \in K$  使得  $|\lambda_0 E - A| \neq 0$ . 从而  $\lambda_0 E - A$  可逆.

10. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . 求多项式  $f(x)$ , 使  $f(A) = A^*$ .

解:  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A - 4 \left[ \frac{1}{2}(A - E) \right] = 2E - A$ , 所以  $f(x) = -x + 2$ .

11. 证明: 对所有的  $A \in M_2(K)$ , 存在  $f(\lambda) = a\lambda + b$ , 使  $f(A) = A^*$ .

证明: 设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则  $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , 所以  $A + A^* = (a + d)E$ ,  $A^* = -A + (a + d)E$ . 故  $f(\lambda) = -\lambda + (a + d)$ .

12. 设  $A \in M_n(K)$ , 证明:

$$\text{rank } A^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n \\ 1, & \text{rank } A = n - 1 \\ 0, & \text{rank } A < n - 1 \end{cases}$$

**证明:** (i) 当  $\text{rank } A = n$  时,  $A$  可逆,  $|A| \neq 0$ . 而  $AA^* = |A|E$ , 故  $A^*$  也可逆, 从而  $\text{rank } A^* = n$ .

(ii) 当  $\text{rank } A < n - 1$  时,  $A$  的  $n - 1$  阶子式都等于 0, 因此  $A_{ij} = 0$ ,  $A^* = 0$ , 所以  $\text{rank } A^* = 0$ .

(iii) 当  $\text{rank } A = n - 1$  时,  $A$  至少有一个  $n - 1$  阶子式不等于 0, 所以  $A^* \neq 0$ . 说明  $\text{rank } A^* \geq 1$ . 另一方面有  $AA^* = |A|E = 0$ , 所以  $\text{rank } A + \text{rank } A^* \leq n$ . 由于  $\text{rank } A = n - 1$ , 可得  $\text{rank } A^* \leq 1$ . 因此  $\text{rank } A^* = 1$ .

13. 设  $A \in M_n(K)$  ( $n > 2$ ), 证明:

(1)  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ ;

(2)  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

**证明:** 当  $\text{rank } A = n$  时,  $AA^* = |A|E$ , 所以  $|A||A^*| = |A|^n$ ,  $|A^*| = |A|^{n-1}$ . 于是  $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$ . 由  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$  可得  $A^* = |A|A^{-1}$ , 故  $(A^*)^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-2}A$ .

当  $\text{rank } A = n - 1$  时,  $\text{rank } A^* = 1$ , 所以  $(A^*)^* = 0 = |A|^{n-2}A$ ,  $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ .

当  $\text{rank } A < n - 1$  时,  $A^* = 0$ , 上述等式也成立.

### 习 题 4-7

1. 设  $A, B$  为两个同阶矩阵. 证明:

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A | B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B.$$

**证明:** 设  $A$  的列向量组为  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $B$  的列向量组为  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , 则  $A + B$  的列向量组为  $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n$ ,  $(A | B)$  的列向量组为  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ , 从而由习题 4-1.7,

$$\begin{aligned} \text{rank}(A + B) &= \text{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n\} \\ &\leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n\} = \text{rank}(A | B) \\ &\leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} + \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \\ &= \text{rank } A + \text{rank } B. \end{aligned}$$

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求  $A^{-1}$ .

**解:** 设

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$



$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
B_{21} &= A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B_{22} &= 0, \quad (\text{因 } A_{12} \text{ 可逆}) \\
B_{12} &= A_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \\
B_{11} &= -A_{21}^{-1}A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 9 & 2 & -1 \\ 1 & -14 & -3 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

3. 设  $A$  为可逆的  $n$  阶方阵,

$$D = \left( \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline a & 0 \end{array} \right), \quad a \neq 0,$$

求  $D^{-1}$ .

解:  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$

4. 设  $A_i$  为  $r_i$  阶可逆方阵 ( $i = 1, 2, \dots, s$ ),

$$A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & & \\ & & A_2 & \\ & \dots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$ .

解:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & & \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \dots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$

5. 设  $E_i$  为  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 阶单位矩阵, 而

$$A = \begin{pmatrix} a_1 E_1 & & & \\ & a_2 E_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & a_s E_s \end{pmatrix}, \quad a_i \neq a_j, \quad i \neq j,$$

证明: 与  $A$  可交换的矩阵只能是分块对角矩阵.

证明: 设分块矩阵  $B = (B_{ij})$  与  $A$  可交换, 而且  $B$  的分块方式与  $A$  相同. 则由  $AB = BA$  得

$$a_i B_{ij} = B_{ij} a_j, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

于是

$$(a_i - a_j) B_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

但当  $i \neq j$  时有  $a_i \neq a_j$ , 所以对于  $i \neq j$  有  $B_{ij} = 0$ , 即

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \quad a_i \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

求  $A^{-1}$ .

$$\text{解: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ a_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

7. 设矩阵  $A_{m \times s}$ ,  $B_{t \times n}$  的秩分别为  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $C$  为任意的  $m \times n$  矩阵, 而

$$D = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

证明: 矩阵  $D$  的秩  $r_D \geq r_A + r_B$ .

**证明:** 设  $A$  的行向量组的极大线性无关组为  $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r_A}}$ ,  $B$  的行向量组的极大线性无关组为  $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_{r_B}}$ . 则

$$\gamma_1 = (\alpha_{i_1}, \underbrace{* \cdots *}_n), \gamma_2 = (\alpha_{i_2}, \underbrace{* \cdots *}_n), \cdots, \gamma_{r_A} = (\alpha_{i_{r_A}}, \underbrace{* \cdots *}_n)$$

线性无关.

$$\delta_1 = (\underbrace{0 \cdots 0}_s, \beta_{j_1}), \delta_2 = (\underbrace{0 \cdots 0}_s, \beta_{j_2}), \cdots, \delta_{r_B} = (\underbrace{0 \cdots 0}_s, \beta_{j_{r_B}})$$

线性无关. 显然

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B},$$

线性无关, 所以

$$r_D \geq \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B}\} = r_A + r_B.$$

8. 设  $A$  为二阶方阵. 证明: 如果  $A^k = 0$ , 则  $A^2 = 0$ .

**证明:** 由  $A^k = 0$  可得  $|A| = 0$ . 故  $\text{rank } A \leq 1$ . 如果  $\text{rank } A = 0$ , 则  $A = 0$ , 结论显然成立. 如果  $\text{rank } A = 1$ , 则

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n), \quad (\text{习题 4-5.12})$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) = \sum_{i=1}^n a_i b_i A,$$

$$A^k = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^{k-1} A = 0.$$

由于  $A \neq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ . 所以  $A^2 = 0$ .

9. 设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 证明: 矩阵方程  $AX = B$  有解的充分必要条件是  $\text{rank } A = \text{rank}(A | B)$ .

**证明:** ( $\Rightarrow$ ) 设矩阵方程  $AX = B$  有解  $X = C$ , 则  $AC = B$ . 从而  $B$  的列向量组可由  $A$  的列向量组线性表示, 所以

$$\text{rank}(A | B) = \text{rank } A.$$

( $\Leftarrow$ ) 如果  $\text{rank}(A | B) = \text{rank } A$ , 则  $B$  的列向量组可由  $A$  的列向量组线性表示, 即存在  $(c_{1j}, \dots, c_{nj})^T$  使得

$$A \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n.$$

令

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则  $AC = B$ .

10. 设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 证明: 齐次线性方程组  $AX = 0$  与齐次线性方程组  $BAX = 0$  同解的充分必要条件是  $\text{rank } A = \text{rank } BA$ .

**证明:** 首先,  $AX = 0$  的解都是  $BAX = 0$  的解, 从而  $BAX = 0$  的基础解系至少含有  $n - \text{rank } A$  个解. 又因为  $\text{rank } A = \text{rank } BA$ , 所以  $BAX = 0$  的基础解系恰含有  $n - \text{rank } A$  个解. 故  $AX = 0$  的基础解系也是  $BAX = 0$  的基础解系. 因此  $AX = 0$  与  $BAX = 0$  同解.

反之, 如果  $AX = 0$  与  $BAX = 0$  同解, 则它们的基础解系含有相同个数的解. 因此  $n - \text{rank } A = n - \text{rank } BA$ ,  $\text{rank } A = \text{rank } BA$ .

### 习题 4-8

1. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**解:** (1)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

(2)  $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(4)  $\frac{1}{4}A.$

2. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: (1)  $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$

(2)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

或

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(3) X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 用多种方法求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解: 仅介绍两种解法:

(i) 因为  $AA = 4E$ , 所以  $A^{-1} = \frac{1}{4}A$ .

(ii) 分块:  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A_1$ .

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1 & | & E & 0 \\ A_1 & -A_1 & | & 0 & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_1 & | & E & 0 \\ 0 & -2A_1 & | & -E & E \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 & | & \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E \\ 0 & -2A_1 & | & -E & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 & | & \frac{1}{2}A_1^{-1} & \frac{1}{2}A_1^{-1} \\ 0 & E & | & \frac{1}{2}A_1^{-1} & -\frac{1}{2}A_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-1} \\ A_1^{-1} & -A_1^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A.$$

4. 设  $A, B, C, D \in M_n(K)$ ,  $|A| \neq 0$ ,  $AC = CA$ . 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证明: 因  $|A| \neq 0$ , 故  $A$  可逆. 而

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| \\ &= |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|. \end{aligned}$$

5. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A - iB| |A + iB|.$$

(其中  $i$  为虚数单位,  $i^2 = -1$ .)

证明: 因为

$$\begin{pmatrix} E & iE \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -iE \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - iB & \\ & A + iB \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A - iB| |A + iB|.$$

6. 设  $A \in M_{m,r}(K)$ . 证明:

(1)  $A$  为列满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵  $P \in M_m(K)$ , 使  $A = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

(2)  $A$  为列满秩矩阵的充分必要条件是存在行满秩矩阵  $B \in M_{r,m}(K)$ , 使  $BA = E_r$ .

证明: (1) 因  $A$  列满秩,  $A$  的典范形为  $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$ . 从而存在可逆矩阵  $P_1, Q_1$ , 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix},$$

则

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这就证明了必要性, 而充分性是显然的.

(2) 充分性是显然的, 再证必要性.

由 (1) 知, 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $A = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$ . 则

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

令

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \end{pmatrix}^r,$$

则  $B$  行满秩, 且  $BA = E_r$ .

7. 对于行满秩矩阵, 叙述并证明类似的结论.

解: (1)  $A$  为行满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵  $Q \in M_m(K)$ , 使  $A = (E_r \ 0)Q$ .

(2)  $A$  为行满秩矩阵的充分必要条件是存在列满秩矩阵  $B \in M_{m,r}(K)$ , 使  $AB = E_r$ .

(证明略)

8. 设  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r$ . 证明: 存在列满秩矩阵  $P$  和行满秩矩阵  $Q$ , 使  $A = PQ$ .

证明: 存在可逆矩阵  $P_1, Q_1$ , 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = (E_r \ 0)Q_1,$$

则  $P$  列满秩,  $Q$  行满秩, 且

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} (E_r \ 0)Q_1 = PQ.$$

9. 设  $A, B$  分别为  $n \times m$  与  $m \times n$  ( $n \geq m$ ) 矩阵,  $\lambda \neq 0$ . 证明:

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

证明: 由于

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & \lambda E_m - AB \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E_n & -A \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n - AB & 0 \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix},$$

所以

$$|\lambda E_n - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix}, \\ |\lambda E_m - BA| = \begin{vmatrix} E_n & A \\ 0 & \lambda E_m \end{vmatrix}.$$

而

$$\lambda^m |\lambda E_n - AB| = \lambda^m \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ \lambda B & \lambda E_m \end{vmatrix} \\ = \lambda^n \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^n |\lambda E_m - BA|.$$

因此

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

10. 设  $A, B$  分别为  $s \times n$  与  $n \times m$  矩阵, 证明:

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n.$$

证明:  $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} AB & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix}$ . 所以

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) + n &= \text{rank} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \geq \text{rank } A + \text{rank } B, \quad (4-7.7) \end{aligned}$$

因此  $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$ .

11. 设  $A, B, C$  分别为  $s \times n, n \times m$  与  $m \times t$  矩阵, 证明:

$$\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank } B.$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) + \text{rank} B &\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC), \\ \text{rank}(ABC) &\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank} B. \end{aligned}$$

12. 设  $A \in M_n(K)$ , 证明:

$$A^2 = E_n \Leftrightarrow \text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(A + E_n) = n.$$

$$\text{证明: } \left( \begin{array}{c|c} E_n & A + E_n \\ \hline A - E_n & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} E_n & A + E_n \\ \hline 0 & E_n - A^2 \end{array} \right), \text{ 所以}$$

$$\text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(A + E_n) = n + \text{rank}(E_n - A^2).$$

$$\text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(A + E_n) = n \Leftrightarrow \text{rank}(E_n - A^2) = 0 \Leftrightarrow A^2 = E_n.$$

13. 设  $A \in M_n(K)$ , 证明:

$$A^2 = A \Leftrightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(A - E_n) = n.$$

$$\text{证明: } \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A - E_n \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} A & -E_n \\ \hline 0 & A - E_n \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{c|c} 0 & -E_n \\ \hline A^2 - A & A - E_n \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline A^2 - A & 0 \end{array} \right).$$

所以

$$\text{rank} A + \text{rank}(A - E_n) = n + \text{rank}(A^2 - A).$$

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(A - E_n) = n \Leftrightarrow A^2 = A.$$

14. 设  $A \in M_n(K)$  是可逆矩阵,  $X, Y$  为  $n$  维列向量, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = -X^T A^* Y.$$

证明:

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & -X^T A^{-1} Y \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |-X^T A^{-1} Y| = -X^T |A| A^{-1} Y = -X^T A^* Y.$$

#### 习题 4-9

1. 设  $\mathcal{A}$  为向量空间  $V_1$  到  $V_2$  的线性映射,  $\mathcal{A}$  在自然基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求  $\mathcal{A}$  的核与象的维数与基;

(2) 分别将  $\mathcal{A}$  的核与象的基扩充为  $V_1$  与  $V_2$  的基.

解: (1) 因为  $\text{rank} A = 3$ , 因此象空间的维数为 3.  $A$  的列向量组的极大线性无关组构成象空间的基:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1) = (-1, 2, 1, -1), \mathcal{A}(\varepsilon_2) = (0, -3, -3, 1), \mathcal{A}(\varepsilon_5) = (3, -4, -1, 2).$$

核的维数 =  $5 - 3 = 2$ ,  $AX = 0$  的基础解系构成核空间的基:

$$\xi_1 = (2, 1, 1, 0, 0), \xi_2 = (1, 1, 0, 1, 0).$$

(2)  $\xi_1, \xi_2$  可扩充为  $V_1$  的基:

$$\xi_1, \xi_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5.$$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \mathcal{A}(\varepsilon_5)$  可以扩充为  $V_2$  的基:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \mathcal{A}(\varepsilon_5), (1, 0, 0, 0).$$

2. 设  $\mathcal{A}$  为  $K^3$  的线性变换, 使

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y - z, x + y + z, x + y - 2z).$$

(1) 求  $\mathcal{A}$  的零度与秩;

(2) 求  $\mathcal{A}$  的核与象空间.

解: (1) 零度 = 1, 秩 = 2.

(2) 核 =  $L((1, -1, 0))$ , 象 =  $L((1, 1, 1), (-1, 1, -2))$ .

3. 设  $W_1, W_2$  为  $V$  的两个子空间, 且  $\dim W_1 + \dim W_2 = n$ . 证明: 存在线性变换  $\mathcal{A}$ , 使  $\text{Ker } \mathcal{A} = W_1$ ,  $\text{Im } \mathcal{A} = W_2$ .

证明: 设  $W_1$  的基为  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ,  $W_2$  的基为  $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ . 将  $W_1$  的基扩充为  $V$  的基:  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ . 对任意的  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in V$ , 定义

$$\mathcal{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-r} a_{n+i} \beta_i,$$

则  $\mathcal{A}$  是  $V$  的线性变换, 且  $\text{Ker } \mathcal{A} = W_1$ ,  $\text{Im } \mathcal{A} = W_2$ .

4. 设  $\mathcal{A}$  为  $n$  维向量空间的线性变换,  $V_1, V_2$  为  $V$  两个线性子空间. 证明: 如果  $\text{Ker } \mathcal{A} = V_1 \cap V_2$ , 则存在线性变换  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ , 使  $V_1 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}_1, V_2 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}_2$ , 且  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

证明: 设  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  为  $V_1 \cap V_2$  的基, 将它扩充为  $V_1$  的基:  $\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t$ , 扩充为  $V_2$  的基:  $\gamma_1, \dots, \gamma_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ . 则由维数公式知  $\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_s$  为  $V_1 + V_2$  的基. 再把它扩充为  $V$  的基:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_s, \eta_1, \dots, \eta_u, \quad (r + t + s + u = n).$$

分别定义线性变换如下:

$$\mathcal{A}_1(\gamma_i) = 0, \quad \mathcal{A}_1(\alpha_i) = 0, \quad \mathcal{A}_1(\beta_i) = \mathcal{A}(\beta_i), \quad \mathcal{A}_1(\eta_i) = \mathcal{A}(\eta_i),$$

$$\mathcal{A}_2(\gamma_i) = 0, \quad \mathcal{A}_2(\alpha_i) = \mathcal{A}(\alpha_i), \quad \mathcal{A}_2(\beta_i) = 0, \quad \mathcal{A}_2(\eta_i) = 0.$$

则易证  $V_1 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}_1, V_2 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}_2$ , 且  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

5. 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  为  $n$  维向量空间  $V$  的两个线性变换, 且  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$ . 证明:

(1)  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}, \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ ;

(2)  $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

证明: (1)  $(\Rightarrow)$  对任意的  $\alpha \in V$  存在  $\beta \in V$ , 使得  $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$ . 所以

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}^2(\beta) = \mathcal{B}(\mathcal{B}(\beta)) = \mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha).$$

即  $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . 同理可证  $\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ .

$(\Leftarrow)$   $\mathcal{B}(V) = \mathcal{A}\mathcal{B}(V) \subseteq \mathcal{A}(V), \mathcal{A}(V) = \mathcal{B}\mathcal{A}(V) \subseteq \mathcal{B}(V)$ , 所以  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{B}$ .



(2)  $(\Rightarrow)$  对任意的  $\alpha \in V$ , 由于

$$\mathcal{B}[(\mathcal{B} - \mathcal{E})(\alpha)] = \mathcal{B}^2(\alpha) - \mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha) - \mathcal{B}(\alpha) = 0,$$

所以  $\mathcal{A}[(\mathcal{B} - \mathcal{E})(\alpha)] = 0$ . 于是  $\mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha)$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}$ . 同理可证  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

$(\Leftarrow)$  对任意的  $\alpha \in \text{Ker } \mathcal{B}$  有

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{A}(0) = 0,$$

所以  $\text{Ker } \mathcal{B} \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}$ . 同理可证  $\text{Ker } \mathcal{A} \subseteq \text{Ker } \mathcal{B}$ . 因此  $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{B}$ .