习 题 解 答

第三章 线性方程组与线性子空间

习 题 3–1

1. 用消元法解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

解: (1) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 1$.

(2) $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$, $x_4 = -4$.

2. 分别用矩阵的初等行变换和列变换将下列矩阵化为行阶梯矩阵和列阶梯矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 4 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & -11 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{11} & -\frac{16}{11} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{10}{3} & -\frac{17}{18} & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 证明: 线性方程组的第二类, 第三类初等变换把线性方程组化成与它同解的线性方程组.

证明: (略)

4. 证明推论 1.4.

证明: 对矩阵 A^{T} 应用推论 1.3, 则 A^{T} 可以经过一系列初等行变换化成简化行阶梯矩阵. 将上述变换施行于矩阵 A 的列上, 就将 A 化成简化列阶梯矩阵.

5. 思考题:

(1) 线性方程组的解集可以看作是空间的一个点集. 那么, 线性空间中任一点集是否一定是某个线性方程组的解集合呢? 如果是这样, 那么, 空集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 与两点集 $\{(0,0,\cdots,0),(1,1,\cdots,1)\}$ 分别是怎样的线性方程组的解集合呢? 如果不是这样, 那么, 怎样的点集才是某个线性方程组的解集合呢?

(2) 线性方程组的初等变换把线性方程组变成同解的线性方程组. 那么, 两个同解的线性方程组是否一定可以通过初等变换互化呢?

解: (1) 除了空集与单点集外, 线性方程组的解集合一定是无限集. 空集是矛盾方程组的解集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 可以是以下方程组

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

的解集. 线性方程组的解集合是一个线性流形. 解集合的性质可参看 §2, §6, §7 的讨论.

(2) 在允许添加或删去平凡方程 “$0=0$” 的前提下, 此结论是正确的.

习 题 3–2

1. 用消元法解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=2 \\ x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_5=2 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_5=3 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=-4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=12 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-4x_2+2x_3-2x_4+3x_5=0 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

解: (1) 无解.

(2) $x_3=1-x_1+2x_2$, $x_4=-4x_1+5x_2$, $x_5=-1-x_1+2x_2$, x_1,x_2 为自由未知量.

(3) $x_1=2x_2-x_3$, $x_4=1$, x_2,x_3 为自由未知量.

(4) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-2.$

(5) $x_1=\dfrac{1}{3}x_5,\ x_2=\dfrac{1}{6}(3x_3-3x_4+5x_5),\ x_3,x_4,x_5$ 为自由未知量.

2. 选择 λ, 使方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ \ \ x_4=1 \\ \ \ x_1+2x_2-\ \ x_3+\ \ 4x_4=2 \\ \ \ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$

有解, 并求它的一般解.

解: 仅当 $\lambda=5$ 时有无穷多解, 其一般解为 $x_1=\dfrac{1}{5}(4-x_3-6x_4),\ x_2=\dfrac{1}{5}(3+3x_3-7x_4),\ x_3,x_4$ 为自由未知量.

3. a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-3x_5=a \\ \qquad\ \ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ \ x_5=b \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求一般解.

解: 仅当 $a=0, b=2$ 时有解, 其一般解为 $x_1=-2+x_3+x_4+5x_5,\ x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5,\ x_3,x_4,x_5$ 为自由未知量.

4. 证明方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0.$$

在有解的情况下, 求它的一般解.

证明: $(\Rightarrow)$ 如线性方程组有解, 设 (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5) 为其一个解, 将它代入原方程组, 并将各式相加, 即得 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$.

$(\Leftarrow)$ 如 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$, 则由最后一个方程得 $x_5=x_1+a_5$, 依次代入前一个方程, 得 $x_4=a_4+a_5+x_1,\ x_3=a_3+a_4+a_5+x_1,\ x_2=a_2+a_3+a_4+a_5+x_1$, 将 x_2,x_3,x_4,x_5 代入第一个方程, 得

$$x_1-(a_2+a_3+a_4+a_5+x_1)=-a_2-a_3-a_4-a_5=a_1.$$

所以原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_2=a_2+a_3+a_4+a_5+x_1 \\ x_3=a_3+a_4+a_5+x_1 \\ x_4=a_4+a_5+x_1 \\ x_5=a_5+x_1 \end{cases} \qquad x_1\ \text{为自由未知量.}$$

5. 求一多项式 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 使 $f(1)=-3,\ f(-1)=-7,\ f(2)=-1,\ f(-2)=-21$.

解: $f(x)=x^3-2x^2+x-3$.

习 题 3–3

1. 设 $\alpha_1=(2,5,1,3)$, $\alpha_2=(10,1,5,10)$, $\alpha_3=(4,1,-1,1)$. 求一向量 α, 使 $3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$.

解: $\alpha=(1,2,3,4)$.

2. 已知 $3\alpha+4\beta=(2,1,1,2)$, $2\alpha-3\beta=(-1,2,3,1)$. 求 α 与 β.

解: $\alpha=\dfrac{1}{17}(2,11,15,10)$, $\beta=\dfrac{1}{17}(7,-4,-7,1)$.

3. 把向量 β 表成向量 α_1, α_2, α_3 的线性组合:

(1) $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,1,-1)$, $\alpha_3=(1,-1,-1)$, $\beta=(1,2,1)$;

(2) $\alpha_1=(1,3,5)$, $\alpha_2=(6,3,-2)$, $\alpha_3=(3,1,0)$, $\beta=(5,8,8)$;

解: (1) $\beta=\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2-\dfrac{1}{2}\alpha_3$.

(2) $\beta=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

4. 判别下列向量组是否线性相关:

(1) $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(1,3,6)$;

(2) $\alpha_1=(3,2,-5,4)$, $\alpha_2=(2,1,-3,-5)$, $\alpha_3=(3,5,-13,11)$, $\alpha_4=(4,5,-14,-3)$;

(3) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(1,7,8,9)$, $\alpha_4=(3,2,1,2)$;

(4) $\alpha_1=(1,2,-1,4)$, $\alpha_2=(9,1,2,-3)$, $\alpha_3=(3,5,0,2)$, $\alpha_4=(3,2,2,1)$, $\alpha_5=(1,3,3,2)$.

解: (1) 否; (2) 是; (3) 否; (4) 是.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数, 令

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{n-1}),\\ \alpha_2&=(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n&=(1,a_n,a_n^2,\cdots,a_n^{n-1}).\end{aligned}$$

证明: 任一 n 维向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

又对任意的 n 维向量 β, 向量组 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 从而向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

6. 设向量组 α_1, α_2, α_3 线性无关. 证明:向量组 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

证明: 设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0,$$

则

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

7. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ (其中 $\alpha_1 \neq 0$) 线性相关的充要条件是至少有一个 α_i $(1 < i \leqslant s)$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

证明: 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

设 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 中最后一个不为零的为 k_i, 则 $i \neq 1$ (否则 $\alpha_1 = 0$ 与假设矛盾), 从而 $i > 1$. 故

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} = -k_i\alpha_i,$$

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_i}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}.$$

8. 证明: 如果向量组的一个延伸组线性相关, 则此向量组也线性相关.

证明: 设向量组 (II) 为 (I) 的延伸组, 如向量组 (I) 线性无关, 则由例 3.9 知, (II) 也线性无关, 与已知矛盾, 故此向量组线性无关.

9. 下列论断是否成立? 对的, 加以证明; 错的, 举出反例.

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则其中每一个都可由其余向量线性表示;

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也线性无关;

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_s + \beta_s$ 也线性无关;

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 则一定存在 r 个不等于零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0;$$

(5) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则它的任何线性组合都不等于零.

解: (1) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1)$ 线性相关, 但 α_2 不可由 α_1 线性表示.

(2) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2)$ 线性无关, $\beta_1 = (2, 2)$, $\beta_2 = (0, 1)$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性相关.

(3) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1)$, $\beta_1 = (1, -1)$, $\beta_2 = (1, 2)$ 线性无关, 但 $\alpha_1 + \beta_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 + \beta_2 = (1, 3)$ 线性相关.

(4) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$ 线性相关, 但对任意的 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$.

(5) 错. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的零线性组合就等于零.

习 题 3–4

1. 在三维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 下列集合 W 是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?

(1) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \perp (1, 1, 1)\}$;

(2) W 是终点在某直线上的全体向量所构成的集合;

(3) W 是与空间中某固定非零向量 (x_0, y_0, z_0) 的夹角等于定值的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 如直线过原点, 是; 否则, 不是; (3) 夹角等于 $\frac{\pi}{2}$, 是; 否则, 不是.

2. 设 V 为数域 K 上 n 维向量空间, 判断 V 的下列子集 W 是否构成 V 的线性子空间.

(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量,

$$W=\{\beta\in V\mid \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta\text{线性相关}\};$$

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量, W 是 V 中不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 不是.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 K^n 中给定的 r 个向量, 证明:

$$W=\{(c_1,c_2,\cdots,c_r)\mid c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r=0\}$$

组成 K^r 的子空间.

证明: 显然 $W\subseteq K^r$ 且 $(0,0,\cdots,0)\in W$, 从而 W 非空.

对任意的 $(a_1,\cdots,a_r),(b_1,\cdots,b_r)\in W$ 以及 $k\in K$, 有

$$(a_1+b_1)\alpha_1+\cdots+(a_r+b_r)\alpha_r=a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r+b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r=0+0=0.$$

所以

$$(a_1,\cdots,a_r)+(b_1,\cdots,b_r)\in W.$$

$$(ka_1)\alpha_1+(ka_2)\alpha_2+\cdots+(ka_r)\alpha_r=k(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r)=k\cdot 0=0.$$

所以

$$k(a_1,\cdots,a_r)\in W.$$

W 成为 K^r 的子空间.

***4.** 设 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 为 K^n 的 s 个线性子空间. $W=W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s$. 证明: W 为 K^n 的线性子空间的充分必要条件是, 存在 $i\,(1\leqslant i\leqslant s)$, 使 $W=W_i$.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性. 对 s 用归纳法. 当 $s=1$ 时结论显然成立. 假定结论对 $s-1$ 成立, 考察 $W=W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s$. 如果 $W\neq W_s$, 则可取 $\beta\in W\setminus W_s$. 对于任意的 $\alpha\in W_s$, 必有 $\beta+k\alpha\in W\setminus W_s$ (从 $\beta+k\alpha\in W_s$ 以及 $\alpha\in W_s$ 可以推得 $\beta\in W_s$, 矛盾). 当 $k=1,\cdots,s$ 时, s 个向量中必有两个向量属于同一个 W_i $(1\leqslant i\leqslant s-1)$. 这两个向量相减后可得 $\alpha\in W_i$. 因此 $W_s\subseteq W_1\cup\cdots\cup W_{s-1}$, 于是 $W=W_1\cup\cdots\cup W_{s-1}$. 利用归纳假设, 可得一个 i, $1\leqslant i\leqslant s-1$ 使得 $W=W_i$. 结论成立.

习 题 3–5

1. 求由下列向量所张成的线性子空间的基与维数:

(1) $\alpha_1=(2,1,11,2),\alpha_2=(1,0,4,-1),\alpha_3=(1,4,16,15),\alpha_4=(2,-1,5,-6)$, $\alpha_5=(1,6,22,23)$;

(2) $\alpha_1=(1,-4,15,5,-4)$, $\alpha_2=(0,7,29,-8,7)$, $\alpha_3=(2,-1,1,1,-3)$, $\alpha_4=(1,-4,3,5,-4)$.

解: (1) 维数 2, 基 α_1,α_2.

(2) 维数 4, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

2. 设 W 为向量空间 V 的子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 W 的一个基, $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j$, $i=1,2,\cdots,r$.

证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基, 设矩阵 $A=(a_{ij})$, $(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 是齐次线性方程组 $XA=0$ 的一个解, 即

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)A=0.$$

则

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=(k_1\ \cdots k_r)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=0.$$

因为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 所以 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$, 即 $XA=0$ 只有零解. 所以 $|A|\neq 0$.

$(\Leftarrow)$ 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0,$$

则

$$(k_1\ \cdots k_r)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=0,$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 所以

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)A=0.$$

由于 $|A|\neq 0$, 故齐次线性方程组只有零解, 即 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 于是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 又因 $\dim W=r$, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 W 的基.

***3.** 设 V 为数域 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对任何大于 n 的自然数 m, 一定存在由 V 的 m 个向量组成的向量组, 使其中任何 n 个向量都构成 V 的基.

证明: 由习题 3–4.4 的结果可以知道, V 不可能表示成它的有限多个真线性子空间的并集. 对 $m\geqslant n$ 施行数学归纳法. 当 $m=n$ 时结论成立. 假设已经找到满足条件的 $m-1\geqslant n$ 个向量的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$. 把其中任意 $n-1$ 的向量生成的线性子空间记为 $W_i\ (i=1,\cdots,s)$, 则因 $V\neq\bigcup W_i$, 存在向量 $\alpha_m\notin\bigcup W_i\ (i=1,\cdots,s)$. 则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 也满足条件.

习 题 3–6

1. λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\lambda\end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: 系数行列式等于 $\lambda^2(\lambda-1)$. 当 $\lambda\neq 0,1$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\lambda-3}{\lambda-1}\\ x_2=\dfrac{\lambda+3}{\lambda-1}\\ x_3=\dfrac{3-\lambda}{\lambda-1},\end{cases}$$

当 $\lambda=0$ 时, 一般解为: $x_1=-x_3$, $x_2=x_3$, x_3 是自由未知量;

当 $\lambda=1$ 时, 原方程组无解.

2. a, b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + \quad x_2 + x_3 = 4 \\ \ x_1 + \ \ bx_2 + x_3 = 3 \\ \ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: (a) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b-1}{b(a-1)} \\ x_2 = \dfrac{1}{b} \\ x_3 = \dfrac{2ab-4b+1}{b(a-1)}; \end{cases}$$

(b) 当 $b = 0$ 时, 或当 $a = 1$, $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时, 原方程组无解;

(c) 当 $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ 时, 一般解为: $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = 2$, x_3 是自由未知量.

3. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 + \ x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 - \ x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + \ x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - \ 5x_3 + \ 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - \ x_2 + \ 3x_3 - \ 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 + \ x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 - 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + \ x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + 6x_3 - \ x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - \ x_3 + \ x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

解: (1) $(1, -2, 1, 0, 0)$, $(1, -2, 0, 1, 0)$, $(3, -4, 0, 0, 1)$.

(2) $(-1, 24, 9, 0)$, $(2, -21, 0, 9)$.

(3) $(-7, 7, -1, 1, 0)$, $(-25, 28, -4, 0, 1)$.

(4) $(0, 1, 2, 1)$.

4. 证明: 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 方程组的秩是 $n-1$, 并且矩阵 A 中 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$, 那么 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

证明: 由于

$$a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=|A|=0,$$
$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,\quad \text{当 } i\neq k \text{ 时},$$

因此 $(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})$ 是题设齐次线性方程组的解. 又因 $A_{kl}\neq 0$, 这是一个非零解. 由假设知道方程组的秩是 $n-1$, 所以此齐次线性方程组的基础解系由一个非零解构成. 因此 $(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

5. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A, M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列所得的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式. 证明:

(1) $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;

(2) 如果这个线性方程组的秩为 $n-1$, 某个 $M_i\neq 0$, 证明方程组的解全是 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{(n-1)}M_n)$ 的倍数.

证明: (1) 作齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

其中 $a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn}=0$, 则此线性方程组与原方程组同解, 且系数矩阵等于0. 故由上题, 最后一行的代数余子式 $(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解. 又 $A_{ni}=(-1)^{n+i}M_i$, 所以 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)=(-1)^{n+1}(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解.

(2) 因原方程组的秩为 $n-1$, 且有一个 $M_i\neq 0$. 因此原方程组的基础解系由一个非零解向量构成. 从而非零解 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 构成原线性方程组的一个基础解系. 故原方程组的每一个解都是 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

6. 给出平面上3个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 共线的充分必要条件.

解: 若点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 共线, 不妨设此直线的方程为 $Ax+By+C=0$, 则

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0\\ Ax_2+By_2+C=0\\ Ax_3+By_3+C=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1t_1+y_1t_2+t_3=0\\ x_2t_1+y_2t_2+t_3=0\\ x_3t_1+y_3t_2+t_3=0 \end{cases}$$

有非零解 (A,B,C)

$\Leftrightarrow$ 其系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}=0.$$

7. 给出平面上 3 条直线

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3&=\ 0 \end{aligned}$$

共点的充分必要条件.

解: 此 3 条直线共点的充分必要条件是相应的齐次线性方程组

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=\ 0 \end{aligned}$$

有非零解, 当且仅当系数矩阵等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

8. 写出通过三点 $(1,2)$, $(1,-2)$, $(0,-1)$ 的圆方程.

解: $(x-2)^2+y^2=5$.

9. 求习题 3–4.3 中所定义的线性子空间的维数.

解: 设

$$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$

则

$$(c_1,\cdots,c_r)\in W\Leftrightarrow \sum c_i\alpha_i=0$$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_r \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow W\text{ 为 }AX=0\text{ 的解空间}$$

所以

$$\dim W=r-\operatorname{rank}A=r-\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}.$$

习 题 3–7

1. 求下列线性方程组的全部解:

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+5x_3+\ \ 7x_4=0\\ 4x_1-2x_2+7x_3+\ \ 5x_4=0\\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3-\ \ 5x_4=0\\ 2x_1-\ \ x_2+6x_3+10x_4=0 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-x_4=2\\ x_1+\ \ x_2+2x_3+x_4=3 \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} x_1+\ \ x_2 \qquad\quad -3x_4-\ \ x_5=2 \\ x_1-\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4 \qquad\quad =1 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=8 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+\ \ x_4+6x_5=-2 \\ 2x_1+5x_2+5x_3+3x_4+\ \ x_5=\ \ 4 \\ x_1-\ \ x_2-\ \ x_3-2x_4+5x_5=-6 \\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-3x_5=\ \ 9 \end{cases}$

解: (1) $k_1(4,0,-3,1)+k_2(0,8,3,-1)$.

(2) $(1,0,1,0)+k(-3,3,-1,2)$.

(3) $(1,0,0,0,-1)+k_1(-1,1,1,0,0)+k_2(7,5,0,2,6)$.

(4) $(1,0,0,1,-1)+k(-1,1,0,-1,0)$.

2. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1\ +a_{12}x_2\ +\cdots+a_{1n}x_n\ =b_1 \\ a_{21}x_1\ +a_{22}x_2\ +\cdots+a_{2n}x_n\ =b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的任意 r 个解, $\eta=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\eta_i\,(k_i\in K, i=1,2,\cdots,r)$. 证明: 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i=1$ 时, η 也是这个非齐次线性方程组的解.

证明: 设 $A=(A_{ij})$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. 则 $B\neq 0$.

$$\eta\text{为上述方程组的解}\Leftrightarrow A\eta=B\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}k_iB=B\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}k_i=1.$$

3. 设 γ_0 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的一个解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是它的导出组的基础解系.

证明: (1) $\gamma_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关;

(2) $\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 也线性无关;

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的任意解, 则 $\gamma,\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 线性相关;

(4) K^n 中向量 γ 是这个非齐次线性方程组的解的充分必要条件是存在 $r+1$ 个数 $k_i\,(i=0,1,\cdots,r)$, $\sum\limits_{i=0}^{r}k_i=1$, 使得

$$\gamma=k_0\gamma_0+k_1(\gamma_0+\eta_1)+k_2(\gamma_0+\eta_2)+\cdots+k_r(\gamma_0+\eta_r).$$

证明: (1) 设

$$\alpha=k_0\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0,$$

则

$$0 = A\alpha = k_0 A\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i A\eta_i = k_0 B.$$

所以 $k_0 = 0$, $k_1\eta_1 + \cdots + k_r\eta_r = 0$. 由于 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 线性无关, 可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$. 因此 $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 线性无关.

(2) 设

$$k_0\gamma_0 + k_1(\gamma_0 + \eta_1) + \cdots + k_r(\gamma_0 + \eta_r) = 0,$$

则

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_r)\gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_r\eta_r = 0,$$

由 (1), $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 线性无关, 所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0, \qquad k_0 + k_1 + \cdots + k_r = 0,$$

进而 $k_0 = k_1 = \cdots = k_r = 0$. 因此 $\gamma_0, \gamma_0 + \eta_1, \gamma_0 + \eta_2, \cdots, \gamma_0 + \eta_r$ 线性无关.

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的解, 则 $\gamma - \gamma_0$ 是它的导出组的解. 所以存在 $k_i \in K$, 使 $\gamma - \gamma_0 = \sum k_i\eta_i$. 于是

$$\gamma = \gamma_0 + \sum k_i\eta_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} k_i\right)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\gamma_0 + \eta_i),$$

从而 $\gamma, \gamma_0, \gamma_0 + \eta_1, \cdots, \gamma_0 + \eta_r$ 线性相关.

(4) $(\Rightarrow)$ γ 为非齐次线性方程组的解, 则由 (3) 的证明可得

$$\gamma = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} k_i\right)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\gamma_0 + \eta_i),$$

从而此线性表示式的系数之和等于

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{r} k_i\right) + \sum_{i=1}^{r} k_i = 1.$$

$(\Leftarrow)$ 如 $\sum\limits_{i=0}^{r} k_i = 1$, 则由上题的结论可知 γ 是一个解.

4. 证明: K^n 的任一线性子空间必是 K 上某个 n 元齐次线性方程组的解空间.

证明: 设 W 为 K^n 的任一子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (列向量) 为 W 的基. 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, 则 $\operatorname{rank} A = r$. 设 $c_1, \cdots, c_{n-r} \in K^r$ 是 $A^{\mathrm{T}}X = 0$ 的基础解系, 令 $C = (c_1, \cdots, c_{n-r})^{\mathrm{T}}$, 则 $\operatorname{rank} C = n - r$. 于是齐次线性方程组 $CX = 0$ 的解空间的维数等于 r.

由 $A^{\mathrm{T}}c_i = 0$, 可得 $A^{\mathrm{T}}(c_1, \cdots, c_{n-r}) = 0$, 即 $CA = 0$. 这表明 α_i 是 $CX = 0$ 的解.

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关以及 $CX = 0$ 的解空间的维数等于 r, 故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 $CX = 0$ 的基础解系. 从而 W 为 $CX = 0$ 的解空间.

5. 证明: K^n 的一个非空子集 Y 是一个线性流形的充分必要条件是: 它是某一线性方程组的解集合.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 Y 是一个线性流形, 则 $Y = \alpha_0 + W$, 其中 W 是一个线性子空间. $\alpha_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$. 则 W 为某齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间. 令 $B = A\alpha_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. 考察 $AX = B$, 易知, Y 为 $AX = B$ 的解集.

($\Leftarrow$) 就是定理 7.4 的结论.

6. 设 Y_1,Y_2 为向量空间 V 的两个线性流形, 下列集合是否构成 V 的线性流形?

(1) $Y_1 \cup Y_2$;

(2) $Y_1 + Y_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in Y_1, \alpha_2 \in Y_2\}$.

解: (1) 不一定. 如取 α, β 线性无关, 令

$$Y_1 = L(\alpha), \qquad Y_2 = L(\beta),$$

则 Y_1, Y_2 都是线性流形, 但 $\alpha + \beta \notin Y_1 \cup Y_2$.

(2) 是. 如

$$Y_1 = \alpha_1 + W_1, \qquad Y_2 = \alpha_2 + W_2,$$

其中 W_1, W_2 为子空间, 则

$$Y_1 + Y_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (W_1 + W_2),$$

可知 $Y_1 + Y_2$ 也是线性流形.

7. 设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 V 的 $r+1$ 个向量, 证明:

$$Y = \left\{ \sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{r} k_i = 1, k_i \in K, i = 0, 1, \cdots r \right\}$$

构成 V 的一个线性流形.

证明: 设

$$\sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} k_i = 1,$$
$$\sum_{i=0}^{r} l_i \alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} l_i = 1,$$

则对任意的 $k, l \in K$, $k + l = 1$, 有

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i \alpha_i\right) = \sum_{i=0}^{r} (k k_i + l l_i)\alpha_i,$$

而

$$\sum_{i=0}^{r} k k_i + \sum_{i=0}^{r} l l_i = k \sum_{i=0}^{r} k_i + l \sum_{i=0}^{r} l_i = k + l = 1,$$

于是

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i \alpha_i\right) = 0,$$

从而 Y 是线性流形.

8. 设 Y 为向量空间 V 的一个线性流形. 证明: 存在 Y 中的 $r+1$ 个向量 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 使

$$Y = \left\{ \sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{r} k_i = 1, k_i \in K, i = 0, 1, \cdots r \right\}.$$

证明: 设 $Y = \alpha_0 + W$, 其中 W 是子空间. 设 W 的基为 $\eta_1, \cdots, \eta_r$, 令

$$\alpha_0 = \alpha_0, \alpha_1 = \alpha_0 + \eta_1, \cdots, \alpha_r = \alpha_0 + \eta_r,$$

则 $\alpha_i \in Y$, 且对任意的 $k_i \in K$, $\sum\limits_{i=0}^{r} k_i = 1$, 有

$$\sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_i = \sum_{i=0}^{r} k_i \alpha_0 + \sum_{i=0}^{r} k_i \eta_i \in \alpha_0 + W = Y.$$

反之, 对任意的 $\alpha=\alpha_0+\eta\in Y=\alpha_0+W$, 存在 k_i, 使 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\eta_i$, 从而

$$\alpha=\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)\alpha_0+\sum_{i=1}^{r}k_i(\alpha_0+\eta_i),$$

其中

$$\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)+k_1+k_2+\cdots+k_r=0.$$

这证明了

$$Y=\left\{\sum_{i=0}^{r}k_i\alpha_i\,\middle|\,\sum_{i=0}^{r}k_i=1,k_i\in K,i=0,1,\cdots r\right\}.$$

习 题 3–8

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程和参数方程:

(1) 过 $(-1,2,0),(-2,-1,4),(3,1,-5)$ 三点的平面;

(2) 过点 $(3,1,2)$ 和 $(1,0,-2)$, 平行于向量 $\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 的平面.

解: (1) 过 3 点的平面三点式方程是:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 4\\ y-2 & -3 & -1\\ z & 4 & -5\end{vmatrix}=0,$$

展开后得

$$19x+11y+13z-3=0.$$

它的参数方程为:

$$\begin{cases} x=-1-u+4v\\ y=2-3u-v\\ z=4u-5v.\end{cases}$$

(2) 由已知条件, 平面通过 $(3,1,2)$, 它的方向向量是 $\xi_1=\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 以及 $\xi_2=(1-3,0-1,-2-2)=(-2,-1,-4)$, 因此平面的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+u-2v\\ y=1-2u-v\\ z=2-3u-4v,\end{cases}$$

平面的一般方程为

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2\\ y-1 & -2 & -1\\ z-2 & -3 & -4\end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $x+2y-z-3=0$.

2. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程:

(1) 过点 $(1,2,-4)$ 和 x 轴的平面;

(2) 过点 $(2,1,2)$ 以及平面 $\Pi_1:\ x+y-z=0$, $\Pi_2:\ 2x-3z-1=0$ 的交线的平面;

(3) 过点 $(0,4,-3)$ 和 $(1,-2,6)$, 且平行于 x 轴的平面;

(4) 过点 $(3,1,-2)$ 且平行于平面 $x-2y-2z+1=0$ 的平面.

解: (1) 设平面的一般方程是 $Ax+By+Cz+D=0$, 因为它过 x 轴, 所以 $A=D=0$; 又因它过点 $(1,2,-4)$, 所以 $B=2C$. 故平面的方程为 $2y+z=0$.

(2) 解线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3z-1=0 \end{cases}$$

求得平面交线上的两个点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 以及 $\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 得到所求平面的三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ y-1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ z-2 & -2 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $5x+3y-6z-1=0$.

(3) 所求平面的一个方向向量是 $(1,0,0)$, 因此所求平面的方程为:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-4 & 0 & -6 \\ z+3 & 0 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $3y+2z-6=0$.

(4) 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $x-2y-2z+D=0$. 因该平面过 $(3,1,-2)$ 点, 所以 $3-2+4+D=0$, 即 $D=-5$. 故所求方程为 $x-2y-2z-5=0$.

3. 已知一平面通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $(z_0\neq 0)$, 且在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 求它的方程.

解: 设平面在 z 轴上的截距为 c, 则该平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

又因 P_0 点在平面上, 所以 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$, 得 $\frac{1}{c}=\frac{1}{z_0}\left(1-\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$, 所以平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\left(1-\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\frac{z}{z_0}=1.$$

4. 求过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 且平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的平面的方程.

解: 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $Ax+By+Cz+D_1=0$. 因该平面过 P_0 点, 所以 $D_1=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 故所求平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

5. 证明命题 8.2.

证明: 因为向量与线性流形平行定义为这个向量在线性子空间 W 内, 因此 $\overrightarrow{v}$ 与平面平行的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}\in W$. 而线性子空间 W 又是由导出方程 $Ax+By+Cz=0$ 定义的, 所以 $\overrightarrow{v}\in W$ 的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}$ 的分量 (X,Y,Z) 满足导出方程, 即 $AX+BY+CZ=0$.

6. 判断下列各平面的相关位置:

(1) $2x+y-z=0$ 与 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z+2=0$;

(2) $x-2y+z-2=0$ 与 $3x+y-2z-1=0$;

(3) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 其中 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

6. (1) 因为

$$\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{-1}{-\frac{1}{4}}\neq\frac{0}{2},$$

所以两平面平行.

(2) 因为 $\frac{1}{3}\neq\frac{-2}{1}$, 所以两平面相交.

(3) 因为 $A_1:B_1\neq A_2:B_2$, 所以两平面相交.

7. 已知两个平面 $\Pi_1:\ x-2y+pz-1=0$, $\Pi_2:\ 2x-4y+5z+q=0$. 问当 p,q 取何值时:

(1) Π_1 与 Π_2 相交;　　(2) Π_1 与 Π_2 平行;　　(3) Π_1 与 Π_2 重合.

解: (1) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{p}{5}$, 即 $p\neq\frac{5}{2}$, q 取任意实数时两平面相交.

(2) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{p}{5}\neq\frac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\frac{5}{2}$, $q\neq-2$ 时两平面平行.

(3) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{p}{5}=\frac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\frac{5}{2}$, $q=-2$ 时两平面重合.

8. 已知点 $A(3,10,-5)$ 和平面 $\Pi:\ 7x-4y-z-1=0$. 求 z 轴上的点 B 的坐标, 使 AB 平行于 Π.

解: 设 B 点的坐标为 $(0,0,k)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(-3,-10,k+5)$. 根据命题 8.2, $\overrightarrow{AB}$ 的分量必须满足 $7(-3)-4(-10)-(k+5)=0$, 即 $k=14$. 故 B 点的坐标为 $(0,0,14)$.

9. 证明三个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)+m=0$$

当 $m\neq kd_1+ld_2$ 时, 没有公共点.

证明: 三个平面有公共点当且仅当线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=-d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=-d_2\\ k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)=-m\end{cases}$$

有解. 对这个方程组作初等变换, 从第 3 个方程减去第 1 个方程的 k 倍和第 2 个方程的 l 倍后得到 $0=kd_1+ld_2-m$, 当 $m\neq kd_1+ld_2$ 时, 这是个矛盾方程, 因此没有公共点.

10. 证明任何一个经过相交的两平面

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的相交直线 L 的平面方程能写成

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中, α,β 是不全为零的实数.

证明: L 中的点的坐标满足 Π_1 与 Π_2 的方程, 从而也满足方程 $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, 因此 L 在此平面上.

反之, 如果平面 Π' 通过直线 L, 我们可在 Π' 上取一个不含于 L 的点 $M(x_0,y_0,z_0)$. 令

$$\alpha_0=A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2,\ \beta_0=A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1,$$

由于 $M\notin L$, 所以 $\alpha_0, beta_0$ 不全为 0. M_0 的坐标显然满足以下方程:

$$\alpha_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-\beta_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

由前面的讨论知上述方程确定的平面一定通过交线 L, 由通过一条直线及线外一点的平面的唯一性, 可见上述方程定义的平面就是 Π'.

11. 设平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线相交于点 M, 而且 $\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$. 证明:

$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

证明: 设点 M 的坐标是 (x_0, y_0, z_0), 则由定比分点公式知

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + kx_2}{1+k} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + ky_2}{1+k} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + kz_2}{1+k} \end{cases} \qquad (k \neq -1).$$

但由于 $M_0 \in \Pi$, 所以

$$A\frac{x_1 + kx_2}{1+k} + B\frac{y_1 + ky_2}{1+k} + C\frac{z_1 + kz_2}{1+k} + D = 0,$$

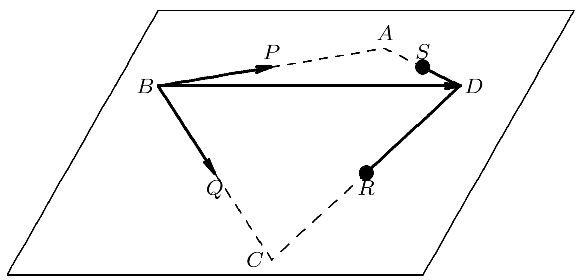
化简后即得

$$k = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

*__12.__ 一平面与空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 分别交于 P, Q, R, S, 则

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

试证之.



第12题图

证明: 如图, 我们以 B 点为原点, 以 $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{BD}$ 为基向量构作一个仿射坐标系 $[B; \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BD}]$. 令

$$\overrightarrow{QC} = a\overrightarrow{BQ},\ \overrightarrow{CR} = b\overrightarrow{RD},\ \overrightarrow{DS} = c\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{PA} = d\overrightarrow{BP}.$$

设

$$\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BQ} + l\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{e_2} + l\overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{BS} = m\overrightarrow{BP} + n\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{e_1} + n\overrightarrow{e_3},$$

则

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BR} - \overrightarrow{BC} = (k-1-a)\overrightarrow{e_2} + l\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BR} = -k\overrightarrow{e_2} + (1-l)\overrightarrow{e_3}.$$

由 $\overrightarrow{CR} = b\overrightarrow{RD}$ 可得:

$$\begin{cases} k-1-a = -bk \\ l = b(1-l), \end{cases} \quad 即 \begin{cases} a = \dfrac{k+l-1}{1-l} \\ b = \dfrac{l}{1-l}. \end{cases}$$

又因

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{e_1} + (n-1)\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BS} = (1+d-m)\overrightarrow{e_1} - n\overrightarrow{e_3}.$$

由 $\overrightarrow{DS} = c\overrightarrow{SA}$ 可得:

$$\begin{cases} m = c(1+d-m) \\ n-1 = -cn, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} c = \dfrac{1-n}{n} \\ d = \dfrac{m+n-1}{1-n}. \end{cases}$$

所以

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{dbc}{a}=\frac{l(m+n-1)}{n(k+l-1)}. \tag{*}$$

又,

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BQ}=(k-1)\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},$$
$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2},$$
$$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BQ}=m\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+n\overrightarrow{e_3},$$

因为这3个向量共面, 所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ k-1 & -1 & -1 \\ l & 0 & n \end{vmatrix}=l(m-1)-n(k-1)=0.$$

从而

$$l(m+n-1)=ln+l(m-1)=ln+n(k-1)=n(k+l-1).$$

将上式代入 (*) 即得:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

习 题 3–9

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列直线的方程:

(1) 过点 $P(3,1,-1)$ 且平行于向量 $\overrightarrow{v}(4,7,-8)$;

(2) 过点 $P_0(-3,0,1)$ 和 $P_1(2,5,1)$;

(3) 已知三角形的三个顶点是 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$, 求三条中线的方程.

解: (1) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+1}{-8}$.

(2) 用两点式方程可得 $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{0}$.

(3) $\dfrac{x-x_i}{x_i-\dfrac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}}=\dfrac{y-y_i}{y_i-\dfrac{y_{i+1}+y_{i+2}}{2}}=\dfrac{z-z_i}{z_i-\dfrac{z_{i+1}+z_{i+2}}{2}}$, 当 $i+1$, $i+2$ 大于3时即减去3.

2. 在直角坐标系中, 求过点 $P(1,6,3)$ 且平行于平面 $3x+y-2z-5=0$ 的直线的方程.

解: 设直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$, 则 ξ 与平面 $3x+y-2z-5=0$ 平行, 故 $3A+B-2C=0$, 而直线方程为 $\dfrac{x-1}{A}=\dfrac{y-6}{B}=\dfrac{z-3}{C}$.

3. 求过点 $A(0,-2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+6y-4z+2=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ 的直线方程.

解: 先将直线方程化为标准方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$, 其方向向量为 $\xi(2,-1,-1)$, 故所求直线方程为 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

4. 求直线 $L:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{2}$ 与平面 $\Pi:\ 2x-3y+2z-2=0$ 的交点坐标.

解: 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases} x=3t \\ y=2-2t \\ z=-4+2t. \end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$2(3t)-3(2-2t)+2(-4+2t)-2=0,$$

解得 $t=1$, 所以交点为 $(3,0,-2)$.

5. 求过点 $A(3,1,2)$ 及直线 $L:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$ 的平面的方程.

解: 直线上有一点 $(0,0,-2)$, 因此平面的方向向量是 $\xi_1=(1,-2,-3)$, $\xi_2=(-3,-1,-4)$. 故平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -3 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

计算得 $5x+13y-7z-14=0$.

6. 已知直线 $L:\ \dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-a}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$, 平面 $\Pi:\ x-2y-4z+1=0$. 问当 a,m 取什么值时

(1) L 与 Π 相交; (2) L 平行于 Π; (3) L 在 Π 内.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi=(m,-2,3)$, 若 L 与 Π 相交, 则 ξ 不与 Π 平行, 故 $m+4-12\neq 0$, 即 $m\neq 8$, a 是任意实数.

(2) ξ 必须与 Π 平行, 即 $m=8$, 同时 L 上的点 $(1,a,-2)$ 不在 Π 上, 即 $1-2a+8+1\neq 0$, $a\neq 5$.

(3) $m=8$, $a=5$.

7. 求通过点 $(2,2,2)$ 且与两直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\ \text{和}\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解: 设所求直线的方向向量是 $\xi=(X,Y,Z)$. 已知第一条直线上的点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量 $\xi_1=(1,2,3)$. 第二条直线上的点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量 $\xi_2=(2,1,4)$. 为使所求直线与第一条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & X \\ 2 & 2 & Y \\ 2 & 3 & Z \end{vmatrix}=2X-4Y+2Z=0.$$

同理, 为使所求直线与第二条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & Y \\ -1 & 4 & Z \end{vmatrix}=X-6Y+Z=0.$$

解此线性方程组得 $X:Y:Z=1:0:-1$. 因此所求直线的方程是

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

8. 将下列直线的一般式方程化成标准方程.

(1) $\begin{cases} 2x-3y+4z-12=0 \\ x+4y-2z-10=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y-4z-5=0 \\ 6x-y-2z-4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 4y+3z+1=0. \end{cases}$

解: (1) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)=(-10,8,11).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(8,0,-1)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x-8}{-10}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{11}.$$

(2) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}\right)=(-8,-18,-15).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $\left(\frac{1}{3}, 0, -1\right)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{8}=\frac{y}{18}=\frac{z+1}{15}.$$

(3) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)=(-3,-9,12).$$

此向量可化简为 $(1,3,-4)$. 为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(0,2,-3)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-4}.$$

9. 求直线与平面的交点.

(1) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ 与 $3x+2y+z=0$;

(2) $\begin{cases}2x+3y+z-1=0\\ x+2y-z+2=0\end{cases}$ 与 xOy 平面.

解: (1) 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases}x=-1-2t\\ y=-1+3t\\ z=3+4t.\end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$3(-1-2t)+2(-1+3t)+(3+4t)=0,$$

解得 $t=\frac{1}{2}$, 所以交点为 $\left(-2, \frac{1}{2}, 5\right)$.

(2) 交点的坐标是 $(x,y,0)$, 解方程组 $\begin{cases}2x+3y-1=0\\ x+2y+2=0\end{cases}$ 得 $x=8$, $y=-5$. 故交点为 $(8,-5,0)$.

10. 求出过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且与相交平面

$$\Pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad i=1,2$$

都平行的直线的方程.

解: 根据命题 9.1, 平面 Π_1 与 Π_2 的交线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

因所求直线必须与交线平行, 因此这也是所求直线的方向向量. 故所求直线的方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

11. 直线方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOz 坐标平面内.

解: 平面 xOz 的方程是 $y=0$, 因此直线落在平面 xOz 内的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ y=0\end{cases}$$

有无穷解. 而上述方程组与

$$\begin{cases} A_1x+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+C_2z+D_2=0 \\ y=0 \end{cases} \tag{*}$$

同解. 而方程组 (*) 有无穷多解的充分必要条件是前两个方程的系数成比例, 即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

最后一个不等式是直线方程的必要条件.

习 题 3–10

1. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且满足下列条件之一的平面:

(1) 通过原点;

(2) 与 y 轴平行;

(3) 通过 $(0,0,1)$ 点;

(4) 与 xOy 平面的交线平行于方向 $(4,5,0)$.

解: (1) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,0)$ 代入得 $k=2m$. 所以平面方程为

$$9x+3y+5z=0.$$

(2) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

y 轴的方向向量是 $\xi=(0,1,0)$, 平面与 ξ 平行的条件是 $-k+5m=0$, 即 $k=5m$. 所以平面方程为

$$21x+14z-3=0.$$

(3) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,1)$ 代入得 $2k+m=0$, 即 $m=-2k$. 所以平面方程为

$$2x-11y+5z-5=0.$$

(4) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

此平面与向量 $(4,5,0)$ 平行的条件是 $4(4k+m)+5(-k+5m)=0$, 即 $11k=-29m$. 所以平面方程为

$$-105x+84y-98z+51=0.$$

2. 求与平面 $x-2y-z+2=0$ 平行且在 x 轴上的截距为 4 的平面.

解: 根据平行平面束性质, 所求平面的方程为 $x-2y-z+D=0$. 化为截距式:

$$\frac{x}{-D}+\frac{y}{\frac{D}{2}}+\frac{z}{D}=1.$$

可见 $D=-4$. 故所求方程为 $x-2y-z-4=0$.

3. 直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOy 平面内.

解: 过已知直线的平面束的方程为

$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

平面 $z=0$ 应该在此平面束内, 所以有以下关系式:

$$\begin{cases} kA_1+mA_2=0 \\ kB_1+mB_2=0 \\ kC_1+mC_2\neq 0 \\ kD_1+mD_2=0. \end{cases}$$

结论是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

4. 与不共面的直线

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

和直线

$$L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

都相交的直线 L 的方程为

$$\begin{cases} k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \\ k'(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+m'(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0, \end{cases}$$

其中, k,m 是不全为零的实数, k',m' 也是不全为零的实数.

解: 由相交直线 L 与 L_1 确定的平面方程一定有以下形式:

$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 k,m 不同时为 0. 同理, 由 L 与 L_2 确定的平面方程为

$$k'(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+m'(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 k',m' 不同时为 0. 由于 L_1,L_2 不共面, 上述两个平面不重合, 它们的交线就是 L.