习 题 解 答

第十二章 多项式矩阵与若尔当典范形

习 题 12–1

1. 下列多项式矩阵中, 哪些是可逆的? 若可逆试求其逆.

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda+3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ -1+\lambda & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 可逆, 逆矩阵为 $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda+1 \\ -\lambda-3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

(2) 可逆, 逆矩阵为 $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda^2+\lambda \\ -\lambda-2 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}$.

(3) 可逆, 逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+1 & \lambda & \lambda^2 \\ -\lambda^2+\lambda-2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) 不可逆.

2. 求下列多项式矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\operatorname{diag}(1,\lambda-1)$.

(2) $\operatorname{diag}(\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda-2))$.

(3) $\operatorname{diag}(1,\lambda,0)$.

(4) $\operatorname{diag}\left(1,\lambda(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

(5) $\operatorname{diag}(1,1,(\lambda+2)^3)$.

(6) $\operatorname{diag}(\lambda-1,\lambda(\lambda-1)(\lambda+1),\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1))$.

3. 判断下列多项式矩阵是否等价:

(1) $A=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-3 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ 2\lambda-2 & 2\lambda-5 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} \lambda^2-3\lambda+3 & 2\lambda-3 & \lambda-3 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 4\lambda-7 & 2\lambda-5 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & 2\lambda-4 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ (\lambda+1)^2 & \lambda^2+\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 等价; (2) 不等价.

4. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是对所有的复数 c, $A(c)$ 都可逆.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $A(\lambda)$ 可逆, 则

$$|A(\lambda)| = a \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

故对任意的 $c \in \mathbb{C}$, $|A(c)| = a$, 所以 $A(c)$ 可逆.

$(\Leftarrow)$ 考察 $f(\lambda) = |A(\lambda)|$, 则对任意的 $c \in \mathbb{C}$, $f(c) \neq 0$, 故 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中无根. 所以 $f(\lambda) = a \neq 0 \in \mathbb{C}$, $|A(\lambda)| = a \neq 0 \in \mathbb{C}$. 因此 $A(\lambda)$ 可逆.

5. 下列结论是否成立: (如成立, 则加以证明, 如不成立, 则举出反例.)

两个多项式矩阵等价的充分必要条件是, 对所有的 $k \in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 都等价.

解: 不成立. 如

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 不等价, 但对任意的 $k \in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 等价.

习 题 12–2

1. 求下列多项式矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & -1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda^2 \\ 2\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}$.

解: (1) 3; (2) 2.

2. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $\operatorname{rank} A(\lambda) = \max\{\operatorname{rank} A(k) | k \in K\}$.

解: 设 $\operatorname{rank} A(\lambda) = r$, 则 $A(\lambda)$ 有一个 r 阶子式 $M_{r+1}(\lambda) = 0$. 故对所有的 $k \in K$, $M_{r+1}(k) = 0$, 这说明 $\operatorname{rank} A(k) \leqslant r$. 又因 $M_r(\lambda) \neq 0$, 存在 $c \in K$ 使 $M_r(c) \neq 0$, 这说明 $r = \max\{\operatorname{rank} A(k) \mid k \in K\}$.

3. 试求下列矩阵的不变因子:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -\lambda+2 & (\lambda-1)^2 & -\lambda+1 \\ 1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda^2-2 & -(\lambda-1)^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $1, 1, (\lambda-1)^3$.

(2) $1, \lambda-1, \lambda(\lambda-1)$.

(3) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, 1, [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2$; 如 $\beta = 0$, $1, 1, (\lambda+\alpha)^2, (\lambda+\alpha)^2$.

(4) $1, 1, 1, (\lambda-1)^4$.

(5) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, \cdots, 1, (\lambda-\alpha)^n$; 如 $\beta = 0$, $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha, \cdots, \lambda-\alpha$.

(6) $1, 1, \cdots, 1, \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

4. 设 $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$ 为 $A(\lambda)$ 的行列式因子, 证明:

$$D_k^2(\lambda) \mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda), \quad k = 2, 3, \cdots, r-1.$$

证明: 设 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda),$$

则

$$\begin{aligned}
&D_{k-1}(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{k-1}(\lambda),\\
&D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda) = D_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda),\\
&D_{k+1}(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{k+1}(\lambda),
\end{aligned}$$

所以

$$D_k^2(\lambda) = D_{k-1}^2(\lambda)d_k^2(\lambda) \mid D_{k-1}(\lambda)D_k(\lambda)d_k(\lambda)d_{k+1}(\lambda),$$
$$D_k^2(\lambda) \mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda).$$

5. 设 $A(\lambda)$ 为 n 阶方阵, 证明: $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

证明: 存在可逆矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = Q(\lambda)^{\mathrm{T}}A(\lambda)^{\mathrm{T}}P(\lambda)^{\mathrm{T}},$$

于是 $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

6. 设 $f_1(x), \cdots, f_n(x) \in K[x]$, 且 $(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = 1$.

证明: 存在多项式 $f_{ij}(x) \in K[x]$ $(i = 2, 3, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, n)$, 使

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = 1.$$

证明: 考察多项式矩阵

$$A(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)),$$

由已知, $A(x)$ 的不变因子为 1, 故存在可逆矩阵 $P(x)$, 使

$$A(x)P(x) = (1, 0, \cdots, 0). \tag{*}$$

设 $|P(x)| = c \neq 0$, 则存在可逆矩阵 $Q(x)$, 使

$$Q(x)P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix}. \tag{**}$$

记

$$Q(x) = (f_{ij}(x)),$$

作

$$B(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

则由 (*) 与 (**) 知

$$B(x)P(x)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix},$$

于是 $|B(x)||P(x)|=c$, 又因 $|P(x)|=c$, 得 $|B(x)|=1$, 从而 $f_{ij}(x)$ 即为所求.

习 题 12–3

1. 判断下列矩阵是否相似:

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

解: (1) 是; (2) 是; (3) 否.

2. 证明: 任何方阵 A 与它的转置矩阵 A^{T} 相似.

证明: 由于 $\lambda E-A^{\mathrm{T}}=(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}$ 等价于 $\lambda E-A$ (习题 12–2.5), 因此 A 与 A^{T} 相似.

***3.** 设 A 与 B 为 n 阶方阵, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$

证明: 考察等式

$$\begin{aligned} &[(\lambda E+A)(\lambda E+B)][(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^* \\ &=|(\lambda E+A)(\lambda E+B)|E=|\lambda E+A|E\cdot|\lambda E+B|E \\ &=(\lambda E+A)(\lambda E+B)(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*. \end{aligned}$$

所以

$$(\lambda E+A)(\lambda E+B)\left\{[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*\right\}=0.$$

比较上式两边的次数, 知

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*=0,$$

即

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*=(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*.$$

令 $\lambda=0$ 就有

$$(AB)^*=B^*A^*.$$

***4.** 证明: 如果矩阵 A 与 B 相似, 则它们的伴随矩阵 A^* 与 B^* 也相似.

证明: 试 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. 于是利用习题 4 的结论,

$$B^*=(P^{-1}AP)^*=P^*A^*(P^{-1})^*=P^*A^*(P^*)^{-1}.$$

故 A^* 与 B^* 相似.

*5. 证明: 矩阵的相似与数域的扩张无关.

证明: 设 A,B 是数域 K_1 中的矩阵, 则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的不变因子都是系数在 K_1 中的多项式. 设数域 $K_1\subset K_2$, 那么这些多项式也可以看成系数在 K_2 中的多项式, 从而不变因子组与数域的扩张无关 (最多差一个常数因子). 而矩阵 A,B 相似当且仅当 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 有相同的不变因子组. 因此矩阵的相似与数域的扩张无关.

*6. 设 A 为 n 阶方阵, λ_0 为 A 的一个特征值. 证明: 特征值 λ_0 的代数重数 $\geqslant n-\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)$.

证明: 设 λ_0 为 A 的 r 重特征值, 设 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 则 $\lambda-\lambda_0\mid d_n(\lambda)$, 但 $\lambda-\lambda_0\nmid d_{n-r}(\lambda)$, (否则, 如 $\lambda-\lambda_0\mid d_{n-r}(\lambda)$, 则 $\lambda-\lambda_0\mid d_{n-r+1}(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0\mid d_n(\lambda)$, 于是 $\lambda-\lambda_0$ 的重数 $\geqslant r+1$) 因此存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E-A)Q(\lambda_0)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda_0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix},$$

由于 $d_1(\lambda_0)\neq 0,\cdots,d_{n-r}(\lambda_0)\neq 0$, 所以

$$\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)\geqslant \operatorname{rank}P(\lambda_0)(\lambda_0E-A)Q(\lambda_0)\geqslant n-r.$$

因此

$$r\geqslant n-\operatorname{rank}(\lambda_0E-A).$$

习 题 12–4

1. 求下列多项式矩阵的初等因子:

(1) $\begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda-3 & \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & \lambda^2-1 & \lambda^2+3\lambda-4\\ \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\lambda^2-2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2\\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5\end{pmatrix}$.

解: (1) $\lambda,\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+3$.

(2) $\lambda+1,\lambda-3$.

2. 已知多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子, 秩 r 与阶数 n, 求 $A(\lambda)$ 的正规形:

(1) $\lambda+1,\lambda+1,(\lambda+1)^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2$; $r=4$, $n=5$;

(2) $\lambda-2,(\lambda-2)^2,(\lambda-2)^3,\lambda+2,(\lambda+2)^3$; $r=4$, $n=4$;

(3) $\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,\lambda+2,(\lambda+2)^2$; $r=3$, $n=5$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1,\lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-1),(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,0)$.

(2) $\mathrm{diag}(1,\lambda-2,(\lambda-2)^2(\lambda+2),(\lambda-2)^3(\lambda+2)^3)$.

(3) $\mathrm{diag}(\lambda-1,(\lambda-1)^2(\lambda+2),(\lambda-1)^3(\lambda+2)^2,0,0)$.

3. 求下列矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 \\ \lambda^2-4 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1,\lambda(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1),\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1))$.

(2) $\mathrm{diag}(1,\lambda(\lambda^2-4),\lambda(\lambda^2-4),\lambda^2(\lambda^2-4))$.

(3) $\mathrm{diag}(1,\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda+1),0)$.

(4) $\mathrm{diag}(1,1,\lambda^2-4,0)$.

4. 求下列矩阵的不变因子, 行列式因子与初等因子:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

解: (1) 不变因子: $1,1,\lambda^2(\lambda-1)$, 行列式因子: $1,1,\lambda^2(\lambda-1)$, 初等因子: $\lambda^2,\lambda-1$.

(2) 不变因子: $1,\lambda,\lambda(\lambda+1)$, 行列式因子: $1,\lambda,\lambda^2(\lambda+1)$, 初等因子: $\lambda,\lambda,\lambda+1$.

(3) 不变因子: $1,\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{n-2\text{个}},\lambda(\lambda-n)$, 行列式因子: $1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-2},\lambda^{n-1}(\lambda-n)$, 初等因子: $\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{n-1\text{个}}$, $\lambda-n$.

(4) 不变因子: $1,1,1,(\lambda+1)^4$, 行列式因子: $1,1,1,(\lambda+1)^4$, 初等因子: $(\lambda+1)^4$.

5. 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 证明: 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数等于 $n-\mathrm{rank}(\lambda_0E-A)$.

证明: 设 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 如 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数为 r, 则

$$\lambda-\lambda_0 \mid d_n(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0 \mid d_{n-r+1}(\lambda),\lambda-\lambda_0 \nmid d_{n-r}(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0 \nmid d_1(\lambda).$$

因此存在可逆矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E - A)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E - A)Q(\lambda_0) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$n - r = \operatorname{rank} P(\lambda_0)(\lambda_0 E - A)Q(\lambda_0) = \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A),$$

即

$$r = n - \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A).$$

习 题 12–5

1. 求下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 14 \\ -6 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; (8) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$; (10) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(11) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (8) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1+2\sqrt{6}&0\\0&0&1-2\sqrt{6}\end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; (10) $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$;

(11) $\operatorname{diag}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})$, $1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是 x^n-1 的 n 个根;

(12) $\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$.

2. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&2\end{pmatrix}.$$

(1) 矩阵 A 可能有怎样的若尔当典范形?

(2) 试确定 A 可对角化的条件.

解: (1) A 仅有一个特征值 $\lambda_0=2$, 所以 A 的若尔当块的块数 = A 的初等因子的个数 = $\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)$ (参见习题 12–4.5) 而

$$\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)=\begin{cases}2 & \text{当 } ac\neq 0,\\ 1 & \text{当 } a,c \text{ 中一个等于 } 0, \text{ 另一个不等于 } 0, \text{ 或 } a,c \text{ 都是 } 0, \text{ 但 } b\neq 0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } a=b=c=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此当 $ac\neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$; 当 a,c 中一个等于 0, 另一个不等于 0, 或 a,c 都是 0, 但 $b\neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$; 当 $a=b=c=0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(2) A 可对角化 $\iff a=b=c=0$.

3. 设矩阵 A 的特征多项式

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4-5\lambda^3-\lambda^2+8\lambda-4.$$

试求出 A 所有可能的若尔当典范形.

解: $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+2)^2$, 因此 A 的可能的初等因子为:

(a) $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+2,\lambda+2$;

(b) $(\lambda-1)^2,\lambda-1,\lambda+2,\lambda+2$;

(c) $(\lambda-1)^3,\lambda+2,\lambda+2$;

(d) $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1,(\lambda+2)^2$;

(e) $(\lambda-1)^2,\lambda-1,(\lambda+2)^2$;

(f) $(\lambda-1)^3, (\lambda+2)^2$.

故 A 的可能的若尔当典范形为:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

*__4.__ 设矩阵 A 的秩为 1. 证明: A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix}\beta&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix},\qquad \text{如 } \beta=\operatorname{Tr}A\neq 0,$$

或

$$\begin{pmatrix}0&1&&&\\0&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix},\qquad \text{如 } \operatorname{Tr}A=0.$$

证明: 由于 A 的秩等于 1, 因此 J_A 的秩也等于 1. 故 A 的若尔当块中仅有一个的秩为 1, 其余的秩都等于 0. 而秩为 0 的若尔当块就是一阶零矩阵 (0), 秩为 1 的若尔当块可能是一阶阵 (β) 或 2 阶若尔当块 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 所以 A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix}\beta&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix},\quad \text{或}\quad \begin{pmatrix}0&1&&&\\0&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix}.$$

又因 $\operatorname{Tr}J_A=\operatorname{Tr}A$, 即得所需结论.

*__5.__ 利用上题的结论计算下列矩阵的行列式:

(1) $\begin{pmatrix}a_1&x&x&\cdots&x\\x&a_2&x&\cdots&x\\x&x&a_3&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&x&x&\cdots&a_n\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}a_i\neq x,\\ x\neq 0;\end{matrix}$ (2) $\begin{pmatrix}x_0&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_0&x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_0&a_1&x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_0&a_1&a_2&\cdots&x_n\end{pmatrix}$, $x_i\neq a_i$.

解: (1) $|A|=\left|\begin{pmatrix}a_1-x&&\\&\ddots&\\&&a_n-x\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\right|$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left| E + x \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1 - x} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 - x} \\ \dfrac{1}{a_2 - x} & \cdots & \dfrac{1}{a_2 - x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n - x} & \cdots & \dfrac{1}{a_n - x} \end{pmatrix} \right| \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left| E + x \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i - x} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{a_i - x}\right].
\end{aligned}
$$

(2) 同样的方法可得

$$|A| = \prod_{i=0}^{n}(x_i - a_i)\left[1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right].$$

*6. 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值. 令

$$n_0 = \operatorname{rank} E = n, n_k = \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A)^k,$$

$$a_k = n_{k-1} - n_k, b_k = a_k - a_{k+1},\ k = 1, 2, \cdots$$

如下表所示:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
n_0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_4 & & \cdots \\
& \diagdown\diagup & & \diagdown\diagup & & \diagdown\diagup & & \diagdown\diagup & & & \\
& a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots & & \\
& & \diagdown\diagup & & \diagdown\diagup & & \diagdown\diagup & & & & \\
& & b_1 & & b_2 & & b_3 & \cdots & & &
\end{array}
$$

证明: (1) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的若尔当块的块数等于 a_1;

(2) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数等于 b_k;

证明: (1) 由习题 12–4.5 立即可得.

(2) 由于 n_i 是矩阵的相似不变量, 故所有的 a_i, b_i 也都是矩阵的相似不变量. 设 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数为 m_k, 而其余不属于特征值 λ_0 的各若尔当块的阶数之和为 m, 则

$$
\begin{aligned}
n_0 &= \sum_{k \geqslant 1} m_k k + m, \\
n_1 &= \sum_{k \geqslant 1} m_k (k-1) + m, \\
n_2 &= \sum_{k \geqslant 2} m_k (k-2) + m, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_r &= \sum_{k \geqslant r} m_k (k-r) + m, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(\sum_{k\geqslant 1} m_k k + m\right) - \left(\sum_{k\geqslant 1} m_k(k-1) + m\right) = \sum_{k\geqslant 1} m_k, \\
a_2 &= \left(\sum_{k\geqslant 1} m_k(k-1) + m\right) - \left(\sum_{k\geqslant 2} m_k(k-2) + m\right) \\
&= \left(\sum_{k\geqslant 2} m_k(k-1) + m\right) - \left(\sum_{k\geqslant 2} m_k(k-2) + m\right) = \sum_{k\geqslant 2} m_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_r &= \left(\sum_{k\geqslant r-1} m_k(k-r) + m\right) - \left(\sum_{k\geqslant r} m_k(k-r) + m\right) \\
&= \left(\sum_{k\geqslant r} m_k(k-r) + m\right) - \left(\sum_{k\geqslant r} m_k(k-r) + m\right) = \sum_{k\geqslant r} m_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$b_r = a_r - a_{r+1} = \sum_{k\geqslant r} m_k - \sum_{k\geqslant r+1} m_k = m_r.$$

*7. 利用上题的结论计算下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 易知, $\lambda_0 = 1$是矩阵的一个特征值. 可得下表:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
 & 2 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & \cdots & \\
 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & \cdots & &
\end{array}
$$

所以

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = , \qquad b_3 = 1.$$

即此矩阵有1阶与3阶的若尔当块各1个. 从矩阵的阶数可知它没有别的特征值. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 此矩阵仅有1个特征值$\lambda_0 = 2$. 可得下表:

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & & 2 & & 0 & & 0 \\
 & 2 & & 2 & & 0 & \\
 & & 0 & & 2 & &
\end{array}
$$

故此矩阵有 2 个 2 阶若尔当块. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*8. 设矩阵 A 的特征值(在复数范围内)全是 1. 证明: A^k 与 A 相似, 其中, k 为任一非零整数(正的或负的).

证明: 先设 A 为若尔当块:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $k > 0$, 则

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & k & & & * \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 J^k 的若尔当块的块数 $= r - \operatorname{rank}(E - J^k) = r - (r-1) = 1$. 所以 J^k 的若尔当典范形也是 J, 从而 J^k 与 J 相似.

又因

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & * \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

同理可证 J^{-1} 与 J 相似, 于是 J^{-k} 与 J^k 相似, 从而也与 J 相似.

对于一般的情形, 设 A 的若尔当典范形为

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

则

$$A^k \sim J_A^k \sim \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{pmatrix} \sim J_A \sim A.$$

习 题 12–6

1. 求下列矩阵的极小多项式:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; *(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $(\lambda-2)^3$.

(2) $\lambda^3-6\lambda^2-4\lambda$.

(3) λ^2.

(4) $(\lambda+1)^2$.

(5) $\lambda(\lambda-n)$.

(6) 设

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda)=1+2\lambda+\cdots+n\lambda^{n-1}.$$

则

$$A=E+2P+3P^2+\cdots+nP^{n-1}=f(P).$$

由于 P 的特征值为 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$, 其中 ε 为 n 次本原单位根. 所以 A 的特征多项式为

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-f(1))(\lambda-f(\varepsilon))\cdots(\lambda-f(\varepsilon^{n-1}))=\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)g(\lambda).$$

因为

$$f(\lambda)=\frac{n\lambda^{n+1}-(n+1)\lambda^n+1}{(1-\lambda)^2},$$

所以

$$f(\varepsilon^k)=\frac{n\varepsilon-n}{(1-\varepsilon^k)^2}=-\frac{n}{1-\varepsilon^k}. \tag{*}$$

$$\begin{aligned} g(\lambda)&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda+\frac{n}{1-\varepsilon^k}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon^k)}\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+n-\lambda\varepsilon^k) \\ &=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}-\varepsilon^k\right)=\frac{\lambda^{n-1}}{n}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n-1}{\frac{\lambda+n}{\lambda}-1} \\ &=\frac{\lambda^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n-1\right]=\frac{1}{n^2}[(\lambda+n)^n-\lambda^n]. \end{aligned}$$

所以

$$\chi_A(\lambda)=\frac{1}{n^2}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n-\lambda^n].$$

又由 $(*)$ 知, $\chi_A(\lambda)$ 无重根, 故 A 的极小多项式就是其特征多项式, 从而 A 的极小多项式为

$$\frac{1}{n^2}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n-\lambda^n].$$

2. 设 A 为 n 阶方阵, $m(\lambda)$ 是它的极小多项式, $g(\lambda)$ 为任一多项式, $d(\lambda)=(m(\lambda),g(\lambda))$.

证明: (1) $\operatorname{rank} d(A)=\operatorname{rank} g(A)$;

(2) $g(A)$ 可逆的充分必要条件是 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 互素;

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g^{-1}(A)$ 一定是 A 的多项式.

证明: (1) 存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$, 使

$$m(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=d(\lambda).$$

故

$$m(A)u(A)+g(A)v(A)=d(A).$$

由 $m(A)=0$ 可得 $d(A)=g(A)v(A)$. 所以

$$\operatorname{rank} d(A)\leqslant \operatorname{rank} g(A).$$

又因 $d(\lambda)\mid g(\lambda)$, 存在 $h(\lambda)$ 使 $d(\lambda)h(\lambda)=g(\lambda)$, 即 $d(A)h(A)=g(A)$. 于是

$$\operatorname{rank} g(A)\leqslant \operatorname{rank} d(A).$$

最后得

$$\operatorname{rank} g(A)=\operatorname{rank} d(A).$$

(2) $(\Rightarrow)$ 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 则 $g(A)$ 的全部特征值为 $g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$. 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g(A)$ 的每个特征值 $g(\lambda_i)\neq 0$. 由于 $m(\lambda)$ 的根都是 A 的特征值, 因此 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 无公共根, 从而 $(g(\lambda),m(\lambda))=1$.

$(\Leftarrow)$ 如 $(g(\lambda),m(\lambda))=1$, 则由 (1) 所证, $d(\lambda)=1$, 因此 $d(A)=E$. 故对于 (1) 中的 $v(\lambda)$, 有

$$g(A)v(A)=E,$$

$g(A)$ 可逆.

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 在 (2) 的充分性的证明中, 已得 $g(A)v(A)=E$. 所以 $g(A)^{-1}=v(A)$ 为 A 的多项式.

3. 证明: 矩阵 A (在复数域上) 可对角化的充分必要条件是其极小多项式无重根.

证明: $(\Rightarrow)$ A 可对角化, 从而此对角形就是 A 的若尔当典范形. 因此 A 的若尔当块全是一阶的, A 的初等因子全是一次的. 而 A 的极小多项式作为初等因子的最小公倍式, 一定是不同一次因子的乘积, 从而无重根.

$(\Leftarrow)$ 如 A 的极小多项式无重根, 则此极小多项式是不同一次因子的乘积. 于是 A 的初等因子都是一次的, 即若尔当典范形中的若尔当块都是一阶的, 是一个对角矩阵, 说明 A 可对角化.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

解: A 的特征多项式为 $\lambda(\lambda^2-2)$. 令

$$\lambda^{100}=\lambda(\lambda^2-2)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c,$$

分别以 $\lambda=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ 代入上式, 的

$$c=0,\qquad 2^{50}=2a+\sqrt{2}b,\qquad 2^{50}=2a-\sqrt{2}b.$$

解得 $b=0$, $a=2^{49}$. 所以

$$A^{100}=2^{49}A^2=2^{49}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

***5.** 证明: 如果对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$, 则 $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.

证明: 由于矩阵的迹就是矩阵的全部特征值之和, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = s_k.$$

由 $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ 可得 $s_k = 0$. 从牛顿公式可得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的所有初等对称多项式 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0$, 于是

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n.$$

***6.** 设 A 的特征多项式 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$, 且 $(h(\lambda), g(\lambda)) = 1$,

证明: $\mathrm{rank}\, h(A) = \deg g(\lambda)$, $\mathrm{rank}\, g(A) = \deg h(\lambda)$.

证明: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $h(A)$ 的特征值为 $h(\lambda_1), \cdots, h(\lambda_n)$, $g(A)$ 的特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$. 由于 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$ 且 $(h(\lambda), g(\lambda)) = 1$, 因此 $\{h(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg h(\lambda)$, $\{g(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg g(\lambda)$, 且 $\deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) = n$.

由习题 12–3.6 知,

$$\deg h(\lambda) \geqslant n - \mathrm{rank}(h(A)) \tag{1}$$

$$\deg g(\lambda) \geqslant n - \mathrm{rank}(g(A)) \tag{2}$$

因此

$$n = \deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) \geqslant 2n - (\mathrm{rank}\, h(A) + \mathrm{rank}\, g(A)),$$
$$\mathrm{rank}\, h(A) + \mathrm{rank}\, g(A) \geqslant n.$$

又因

$$h(A)g(A) = \chi(A) = 0,$$
$$\mathrm{rank}\, h(A) + \mathrm{rank}\, g(A) \leqslant n.$$

于是

$$\mathrm{rank}\, h(A) + \mathrm{rank}\, g(A) = n.$$

从而 (1), (2) 式全都取等号, 使得

$$\mathrm{rank}\, h(A) = n - \deg h(\lambda) = \deg g(\lambda),$$
$$\mathrm{rank}\, g(A) = n - \deg g(\lambda) = \deg h(\lambda).$$