习 题 解 答

第一章　向量代数

习 题 1–1

1. 如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E、F 分别是棱 BC、C_1D_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{c}$. 试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 表示下列向量:

(1) $\overrightarrow{AC_1}$;　(2) $\overrightarrow{BD_1}$;　(3) $\overrightarrow{AF}$;　(4) $\overrightarrow{EF}$.

解: (1) 因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1},$$

所以

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}$, 而

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\qquad \overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1}.$$

所以

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}.$$

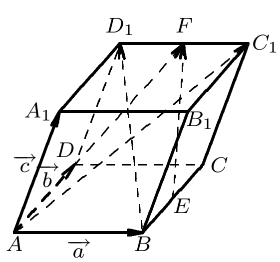
(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1F}$, 而

$$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1},\qquad \overrightarrow{D_1F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

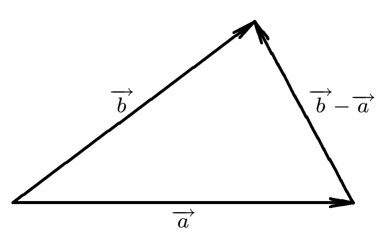
所以

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}.$$

(4) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AF}-\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.



第 1 题图



第 3(1) 题图

2. 要使下列各式成立, 向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$;

(2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$;

(3) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$;

(4) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

解: (1) 利用"三角形两边之和大于第三边"可知: $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$. 且要使 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$ 必须: $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 同向, 或 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 中至少有一为 0.

(2) 令 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 则 $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$, 原式化为: $|\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{c}|+|\vec{b}|$. 所以 $\vec{b}\parallel\vec{c}$ 且反向. 由此可得: $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 反向, 且 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$, 或 $\vec{b}=0$.

(3) 令 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 原式化为: $|\vec{b}|+|\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$. 由 (1) 知: $\vec{b}\parallel\vec{c}$ 且同向. 所以 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 且同向. 又因 $|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant 0$, 所以 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$, 或 $\vec{b}=0$.

(4) 令 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 原式化为: $|\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{c}|-|\vec{b}|$. 由 (2) 知: $\vec{c}\parallel\vec{b}$ 且反向, 或 $\vec{b}=0$, 同时, $|\vec{c}|\geqslant|\vec{b}|$. 所以 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 且反向, 或 $\vec{b}=0$ 或 $\vec{a}=0$.

3. 证明下列不等式, 并说明等号什么时候成立.

(1) $|\vec{b}-\vec{a}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

(2) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

证明: (1) 如图, 利用"三角形两边之差小于第三边"可得欲证的不等式. 等式成立的条件可参见习题2(3): $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 同向, 且 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$, 或 $\vec{b}=0$.

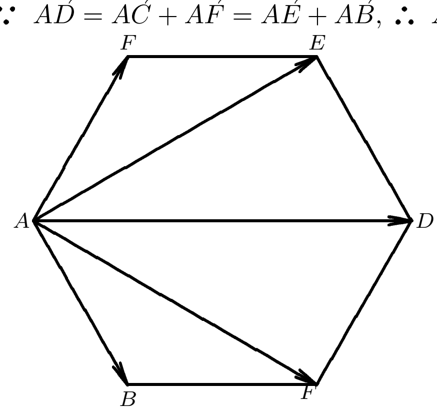
(2) 令 $\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. 则: $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{d}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{d}|=|\vec{a}|+|\vec{b}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$. 等号成立当且仅当 (i) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 互相平行且同向, 或 (ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 中至少两个为0 (也可看成 (i) 的特例).

4. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ 都是非零向量). 证明 $ABCD$ 为梯形.

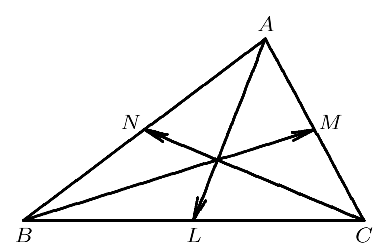
证明: $\because$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\vec{a}-2\vec{b}=2\overrightarrow{BC}$, $\therefore$ $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$. 但 $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$, 所以 $ABCD$ 是梯形.

5. 设 $ABCDEF$ 为正六边形, 求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

解: $\because$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, $\therefore$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.



第5题图



第6题图

6. 设 L, M, N 分别是三角形 ABC 的三边 BC, CA, AB 的中点. 证明三中线向量 $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

证明: 因为 $\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形, 当且仅当将这三个向量之和为零向量. 由

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\qquad \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}),\qquad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),$$

可得: $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$.

7. 在三角形 ABC 中求一点 O, 使

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0.$$

解: 设L是BC的中点,则$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 在线段$AL$上取$O$点,使$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,则$O$点在$\triangle ABC$的内部. 验证:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=0.\end{aligned}$$

8. 设A,B,C,D是一个四面体的四个顶点, M,N分别是边AB, CD的中点. 证明:

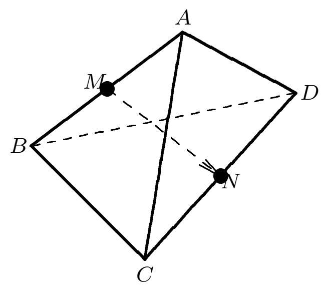
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

证明: 如图,

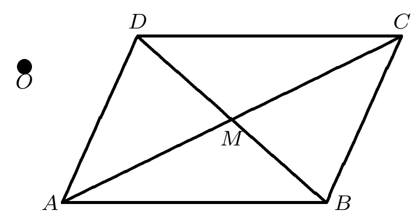
$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),\qquad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$



第8题图



第9题图

9. 设M是平行四边形$ABCD$的中心, O是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

证明: 如图, 因为

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}),$$

所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

10. 设$ABCD$是平行四边形, P,Q分别是边BC,CD的中点. 证明AP,AQ与对角线BD相交于E,F, 而将BD三等分.

证明: 设$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\\ \overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b},\\ \overrightarrow{AQ}&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}.\end{aligned}$$

又设

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AP}\quad(k>0),\qquad \overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AQ}\quad(m>0),$$

则

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{a}+\frac{k}{2}\overrightarrow{b},\qquad \overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{b}+\frac{m}{2}\overrightarrow{a}.$$

但是

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{a}+t(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\quad(t>0).$$

所以

$$k\overrightarrow{a}+\frac{k}{2}\overrightarrow{b}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b},$$

即:

$$(k+t-1)\overrightarrow{a}=\left(t-\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{b},$$

由于 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不平行, 所以

$$\begin{cases} k+t-1=0 \\ t-\dfrac{k}{2}=0 \end{cases} \qquad \text{即} \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

同理, 由

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BD}=(1-s)\overrightarrow{b}+s\overrightarrow{b}\quad(s>0),$$

可得:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}+s-1=0 \\ s-m=0, \end{cases} \qquad \text{即:} \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ s=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

最后得到:

$$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD},\qquad \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD},$$

说明 E,F 是线段 BD 的三等分点.

11. O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心. 证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

证明: 先考虑 n 为偶数的情形. 此时. 显然有: $\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$. 再看 n 为奇数的情形: 我们增加一倍顶点 $B_1,\cdots,B_n$ 使原来正 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 成为: $A_1B_1A_2B_2\cdots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$, 这是一个 $2n$ 边形. 所以

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OB_n}=0.$$

注意到 $\overrightarrow{OB_i}$ 是由 $\overrightarrow{OA_i}$ 旋转一个定角 θ 而得到 $(0<\theta<\pi)$, 若记:

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n},$$
$$\overrightarrow{q}=\overrightarrow{OB_1}+\cdots+\overrightarrow{OB_n},$$

那么 $\overrightarrow{q}$ 是由 $\overrightarrow{p}$ 旋转 θ 角而得到. 由于 $0<\theta<\pi$, $\overrightarrow{q}$ 与 $\overrightarrow{p}$ 不平行, 故 $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}=0$.

12. O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, P 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}.$$

证明: 因为

$$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{A_iO}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$n\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}+(\overrightarrow{A_1O}+\cdots+\overrightarrow{A_nO})=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}$$

(利用第 11 题的结论).

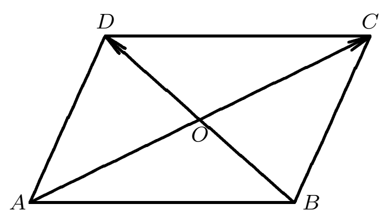
习 题 1–2

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 AC 和 BD. 设 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

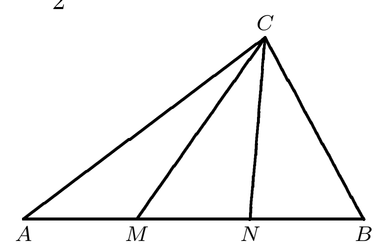
解: 如图,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}),$$
$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}).$$



第1题图



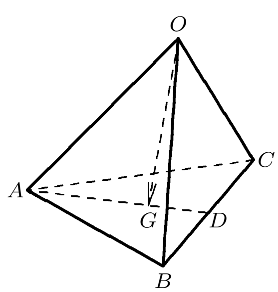
第2题图

2. 在三角形 ABC 中, 点 M, N 是 AB 边上的三等分点. 设 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$.

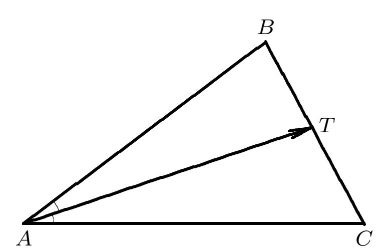
解: 如图, 因为
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$
所以
$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{a},$$
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{a}.$$

3. 在四面体 $O-ABC$ 中, 设点 G 是三角形 ABC 的重心. 用 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 来表示向量 $\overrightarrow{OG}$.

解: 如图, 由
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG},\qquad \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$
可得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, 所以
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}),\qquad \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$



第3题图



第4题图

4. 设 AT 是三角形 ABC 中 $\angle A$ 的平分线 (与 BC 交于 T 点), 将 $\overrightarrow{AT}$ 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 来表出.

解: 设 $\overrightarrow{BT}=k\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{TC}=(1-k)\overrightarrow{BC}$. 由角平分线的性质可知, $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{AC}|=k:(1-k)$, 因此 $k=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$. 于是
$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).$$

5. 已知 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 不共线, 则向量 $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{d}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 是否线性相关?

解: 设有 k、 m 使: $k\overrightarrow{c}+m\overrightarrow{d}=0$, 即

$$3k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}+2m\overrightarrow{a}-m\overrightarrow{b}=0,$$

整理后为

$$(3k+2m)\overrightarrow{a}+(k-m)\overrightarrow{b}=0.$$

由于 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 不共线, 故 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} 3k+2m=0 \\ k-m=0 \end{cases} \qquad \text{解得 } k=m=0,$$

即 $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ 线性无关.

6. 证明三个向量 $k_1\overrightarrow{a}-k_2\overrightarrow{b}$, $k_2\overrightarrow{b}-k_3\overrightarrow{c}$, $k_3\overrightarrow{c}-k_1\overrightarrow{a}$ 共面.

证明: 由等式

$$(k_1\overrightarrow{a}-k_2\overrightarrow{b})+(k_2\overrightarrow{b}-k_3\overrightarrow{c})+(k_3\overrightarrow{c}-k_1\overrightarrow{a})=0,$$

可知这 3 个向量线性相关, 所以共面.

7. O 是一个定点, 证明: 对于不在一直线上的 3 个点 A,B,C, 点 M 位于平面 ABC 上的充分必要条件是存在实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3=1.$$

证明: 已知 A、B、C 三点不共线, 故 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性无关. 任意点 M 位于平面 ABC 上当且仅当 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 共面, 即: $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性相关, 当且仅当存在不全为 0 的实数 m_1,m_2,m_3, 使

$$m_1\overrightarrow{AM}+m_2\overrightarrow{AB}+m_3\overrightarrow{AC}=0,$$

当且仅当对于定点 O 有:

$$m_1(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})+m_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m_3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$m_1\overrightarrow{OM}=(m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{OA}-m_2\overrightarrow{OB}-m_3\overrightarrow{OC}.$$

显然 $m_1\neq 0$, 不然与 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性无关矛盾. 因此若记:

$$k_1=\frac{1}{m_1}(m_1+m_2+m_3), \qquad k_2=-\frac{m_2}{m_1},$$

$$k_3=-\frac{m_3}{m_1},$$

则

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},$$

且 $k_1+k_2+k_3=1$.

8. O 是一个定点, 证明: 点 M 位于 $\triangle ABC$ 上 (包括它的边) 的充分必要条件是存在非负实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3=1.$$

证明: 延长 AM, 必可交 BC 于 D 点. 因此 $\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD}$, 其中 $0\leqslant l\leqslant 1$. 由于 D 在线段 BC 上, 根据例 2.1, 存在实数 m_1,m_2, 使得

$$\overrightarrow{OD}=m_1\overrightarrow{OB}+m_2\overrightarrow{OC}, \qquad m_1+m_2=1, m_1,m_2\geqslant 0.$$

于是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OD}=(1-l)\overrightarrow{OA}+lm_1\overrightarrow{OB}+lm_2\overrightarrow{OC}.$$

令 $k_1=1-l$, $k_2=lm_1$, $k_3=lm_2$, 即得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},\qquad k_1+k_2+k_3=1,\ k_1,k_2,k_3\geqslant 0.$$

反之, 不妨设 $k_1\neq 1$, 解方程组

$$\begin{cases}1-l=k_1\\ lm_1=k_2\\ lm_2=k_3\end{cases}\qquad \text{可得}\begin{cases}l=1-k_1,\\ m_1=\dfrac{k_2}{1-k_1},\\ m_2=\dfrac{k_3}{1-k_1},\end{cases}$$

则有

$$m_1+m_2=1,\qquad m_1,m_2\geqslant 0,\qquad 0<l\leqslant 1.$$

令

$$\overrightarrow{OD}=m_1\overrightarrow{OB}+m_2\overrightarrow{OC},$$

则 D 点在线段 BC 上. 由

$$\overrightarrow{OM}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OD}$$

可以得出 $\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD}$, 因此 M 在线段 AD 上, 从而在 $\triangle ABC$ 上.

9. 证明: 任意不同的三点 A,B,C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},\quad \text{且}\, k_1+k_2+k_3=0.$$

证明: A、B、C 共线, 当且仅当 $l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=0$ (l,m 都不为零), 当且仅当

$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$-(l+m)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0.$$

令 $k_1=-(l+m)$, $k_2=l$, $k_3=m$, 显然它们不全为零, 且:

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0,\qquad k_1+k_2+k_3=0.$$

10. 证明: 任意不同的四点 A,B,C,D 共面的充分必要条件是存在四个不全为零的实数, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD},\quad \text{且}\, k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

证明: A、B、C、D 共面当且仅当 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 线性相关, 当且仅当有不全为零的数 l,m,n 使:

$$l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}=0,$$

当且仅当

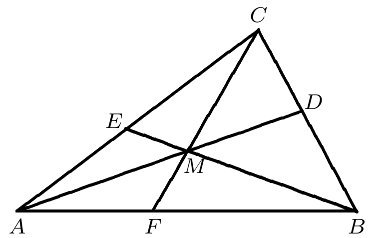
$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$-(l+m+n)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OD}=0.$$

记 $k_1=-(l+m+n)$, $k_2=l$, $k_3=m$, $k_4=n$, 显然它们不全为零, 使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}=0,\qquad k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$



第11题图

*11. 用向量的方法证明契维定理: 若三角形ABC的三条边AB, BC, CA依次被分割成$AF:FB=k_1:k_2$, $BD:DC=k_3:k_1$, $CE:EA=k_2:k_3$, 其中, $k_1,k_2.k_3$均为正数. 则三角形ABC的顶点与它对边的分点的连线交于一点M, 且对于任意一点O有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).$$

证明: 根据分点D与E的定义可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC},\qquad \overrightarrow{AE}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

设AD与BE交于M, 则有

$$\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD},\qquad \overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BE}.$$

把前面得到的表达式代入以下等式: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, 得到

$$l\left(\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+m\left(\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).$$

由于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$线性无关, 由上述等式得到方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{lk_3}{k_1+k_3}=\dfrac{mk_3}{k_2+k_3}\\[2mm]\dfrac{lk_1}{k_1+k_3}=1-m\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}l=\dfrac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\\[2mm]m=\dfrac{k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}.\end{cases}$$

即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD}.$$

又设AD与CF相交于M', 同理可得

$$\overrightarrow{AM'}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD},$$

即M与M'重合, 因此AD,BE,CF交于同一点M.

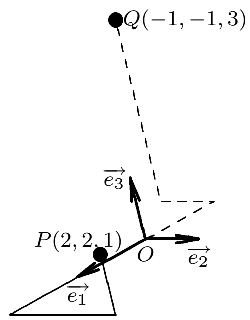
对任意点O, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\left(\frac{k_2}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

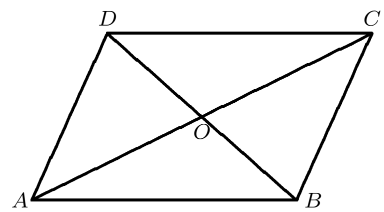
习 题 1–3

1. 设 P, Q 两点在标架 $[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]$ 下的坐标分别是 $(2,2,1)$, $(-1,-1,3)$. 试画出 P,Q 点的位置.

解: 见附图.



第 1 题图



第 2 题图

2. 对于平行四边形$ABCD$, 求A, D, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$在标架$[C;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]$ 下的坐标.

解: $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=(-1)\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{BD}$, 点 A 坐标为 $(-1,0)$;

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

点 D 坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{AD}$ 坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}=0\overrightarrow{AC}+(-1)\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{DB}$ 坐标为 $(0,-1)$.

3. 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1,5,2)$, $(0,-3,4)$, $(-2,3,-1)$. 求向量 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$, $-3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}$ 的坐标.

解: $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}=2(1,5,2)+(-2,3,-1)=(2,10,4)+(-2,3,-1)=(0,13,3)$.

$$\begin{aligned}-3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}&=-3(1,5,2)+2(0,-3,4)+4(-2,3,-1)\\&=(-3,-15,-6)+(0,-6,8)+(-8,12,-4)=(-11,-9,-2).\end{aligned}$$

4. 证明三角形的三条中线交于一点 (重心).

证明: 设 D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 上的中点. AD 与 BE 交于 G, AD 与 CF 交于 G'. 则

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AD}=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}.$$

若建立仿射标架 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$, 则点 G 坐标为 $\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)$. 又

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG}=m\overrightarrow{BE}&=m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=m\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\right]\\&=\frac{m}{2}\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

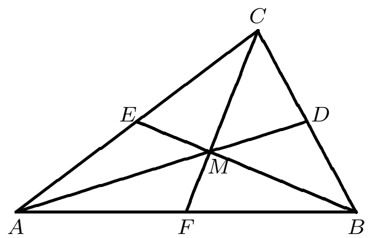
所以 $\overrightarrow{BG}$ 坐标为 $\left(-m,\frac{m}{2}\right)$. 但 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$, 所以,

$$\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)=(1,0)+\left(-m,\frac{m}{2}\right),$$

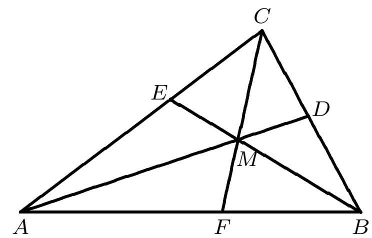
解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 - m \\ \dfrac{k}{2} = \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

得 $k = m = \dfrac{2}{3}$. 所以 G 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. 同理, 可以推得 G' 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. 证得 $G = G'$.



第 4 题图



第 5 题图

5. 证明三角形的三条角平分线交于一点.

证明: 设 $\triangle ABC$ 的三条角平分线分别为 AD, BE 和 CF. 且设 AD 与 BE 交于 T 点. 令

$$\overrightarrow{AT} = k\overrightarrow{AD} = \frac{k}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).$$

建立仿射标架 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, 且令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. 则 T 点坐标 $\left(\dfrac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \dfrac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$. 我们还知道

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|}(|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA} + |\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}),$$

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BT} = m\overrightarrow{BE} &= \frac{m}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}(-|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|\overrightarrow{a} + |\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})) \\ &= -m\overrightarrow{a} + \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

由于 $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, 所以

$$\left(\frac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right) = (1, 0) + \left(-m, \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\right),$$

即:

$$\begin{cases} \dfrac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = 1 - m \\ \dfrac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|} \end{cases}$$

解得:

$$k = \frac{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}.$$

又设 AD 与 CF 交于 T' 点,

$$\overrightarrow{AT'} = s\overrightarrow{AD} = \frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} + \frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}.$$

得 T' 点的坐标为 $\left(\dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$.

$$\overrightarrow{CT'} = t\overrightarrow{CF} = \frac{t}{|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|}(|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA} + |\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}) = \frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b},$$

由 $\overrightarrow{AT'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CT'}$, 得:

$$\left(\frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|},\frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}\right)=(0,1)+\left(\frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|},-t\right),$$

即:

$$\begin{cases}\dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|}\\ \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}=1-t\end{cases}$$

解得:

$$s=\frac{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|}.$$

由此可见 $s=k$, 即 $T=T'$.

6. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分, 试求出这线段的两个端点 A,B 的坐标.

解: 不妨设 A,B,C,D 四点如图所示. 设 A,B 两点的坐标分别为 (x_A,y_A,z_A) 与 (x_B,y_B,z_B), 则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$. 所以

$$(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C),$$

即:

$$\begin{cases}x_A=2x_C-x_D=-1\\ y_A=2y_C-y_D=2\\ z_A=2z_C-z_D=4.\end{cases}$$

同理,

$$\begin{cases}x_B=2x_D-x_C=8\\ y_B=2y_D-y_C=-4\\ z_B=2z_D-z_C=-2.\end{cases}$$

因此 A,B 两点的坐标分别为 $(-1,2,4)$ 与 $(8,-4,-2)$ (两种可能).

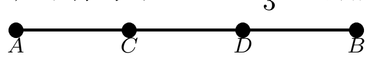
7. 已知 A、B 两点的坐标分别为 $(1,-2,3)$, $(4,1,2)$.

(1) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 AB 成定比 $3:2$;

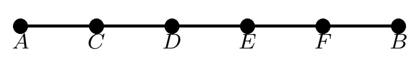
(2) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 BA 成定比 $-2:3$.

解: (1) 由 $|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PB}|=3:2$ 可得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$. 利用例 3.1 的定比分点公式, 取 $k=\dfrac{3}{2}$, 可得 P 点坐标 $\left(\dfrac{14}{5},-\dfrac{1}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.

(2) 由已知条件可得 $\overrightarrow{BP}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$, 用定比分点公式算得 P 点坐标 $(10,7,0)$.



第 6 题图



第 9 题图

8. $ABCD$ 为平行四边形. 已知 A, B 及对角线交点的坐标分别为 $(-3,1,5)$, $(2,-3,4)$, $(1,-1,2)$. 试确定点 C, D 的坐标.

解: 设对角线交点为 M, C,D 的坐标分别为 (x_C,y_C,z_C), (x_D,y_D,z_D). 由于 M 是 A,C 的中点, 因此

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(-3+x_C)=1\\ \dfrac{1}{2}(1+y_C)=-1\\ \dfrac{1}{2}(5+z_C)=2,\end{cases}$$

解得 C 点坐标为 $(5,-3,-1)$. 由于 M 也是 B,D 的中点, 同理可得 D 点坐标为 $(0,1,0)$.

9. 设 A,B 两点的坐标分别为 $(-6,5,-8)$, $(4,0,7)$, 试确定点 C,D,E,F, 使 C,D,E,F 将线段 AB 五等分.

解: 不妨设 A,B,C,D,E,F 如图. 所以

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB},\qquad \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB},$$
$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EB},\qquad \overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}.$$

利用定比分点公式算得 C 点坐标为 $(-4,4,-5)$, D 点坐标为 $(-2,3,-2)$, E 点坐标为 $(0,2,1)$, F 点坐标为 $(2,1,4)$.

10. 如图, 已知平行六面体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中, 点 P 在棱 AA_1 上, 且 $|AP|=2|PA_1|$, 点 S 在棱 CC_1 上, 且 $|CS|=\frac{1}{2}|SC_1|$, 点 Q,R 分别是棱 O_1C_1, AB 的中点. 求证: 直线 PQ 与直线 RS 平行.

证明: 建立坐标系 $[O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}]$. 因为 $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PA_1}|$, 所以

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},$$
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1Q}=\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

从而

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

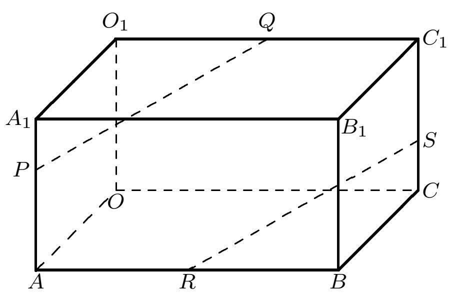
类似地,

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$

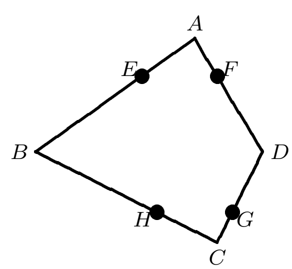
所以

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

这样就有 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$, 于是 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{RS}$.



第 10 题图



第 11 题图

11. 已知空间四边形 $ABCD$, 将 AB,AD,CD 及 CB 以相同比分之, 证明这四个分点构成一个平行四边形.

证明: 如图. 设分点为 E,F,G,H. 设

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EB}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{FD}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD},$$

则

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BD}.$$

类似地, 由 $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CB}$ 以及 $\overrightarrow{CG}=k\overrightarrow{CD}$ 可以得到 $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. 因此 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, 证明了 $EFGH$ 是平行四边形.

12. 证明: 四面体的四条中线交于一点(即四面体的重心), 且此交点将每一条中线分成定比为 $3:1$ (由顶点算起) 的两部分. (注: 四面体的中线即四面体的顶点到其对面的重心的连线)

证明: 建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$. G 点为 $\triangle ABC$ 的重心, G_1 为 $\triangle VBC$ 的重心, 由习题 1–2 的第 3 题知:

$$\overrightarrow{VG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_1}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AV})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VB}-\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VA}-\overrightarrow{VA})\\&=\frac{1}{3}(-3\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(-1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

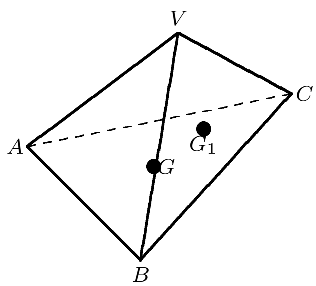
取把中线 VG 分成 $3:1$ 的分点 M, 即

$$\overrightarrow{VM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{VG}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$

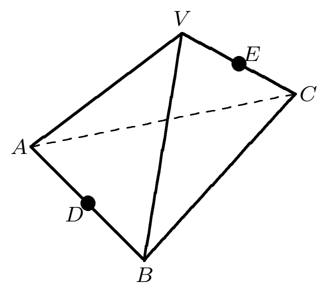
同时,

$$\overrightarrow{VA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM}.$$

所以 M 在 VG 与 AG_1 上. 同理, 可证得: 若设 G_2,G_3 分别是 $\triangle VAB$ 和 $\triangle VAC$ 的重心. 则 CG_2 与 BG_3 也必交于点 M', 且 $\overrightarrow{VM'}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, 因此 $M'=M$, 且交点分每一中线成定比 $3:1$.



第 12 题图



第 13 题图

13. 四面体的不相交的两条棱称为对棱, 每一对对棱的中点的连线称为四面体的拟中线. 证明: 四面体的三条拟中线交于它的重心, 且此重心把每一条拟中线分成长度相等的两部分.

证明: 同上题建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$, 设 M 是四面体的重心, 则 $\overrightarrow{VM}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. 设 D,E 分别为 AB,VC 的中点. 则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{VA},$$

$$\overrightarrow{VD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

$$\overrightarrow{VE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VC}=\left(0,0,\frac{1}{2}\right),$$

所以

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

由于

$$\overrightarrow{VE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM},$$

说明重心 M 在 ED 上且等分 ED. 同理可证其它.

习 题 1–4

1. 计算下列2阶与3阶行列式:

解: (1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5.$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2.$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -22.$ (6) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz.$

2. 利用2阶或3阶行列式解线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+2y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-3, \\ x+3y-2z=-6. \end{cases}$

解: (1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{13}{13} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-13}{13} = -1.$

(2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-42}{49} = -\dfrac{6}{7}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{189}{49} = \dfrac{27}{7}.$

3. 设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 为基.

(1) 证明: 向量 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}$ 线性无关;

(2) 求向量 $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ 在基 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 下的坐标;

(3) 求向量 $\overrightarrow{f}$, 使 $-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{f} = 0$.

解: (1) 设有实数 x_1, x_2, x_3 满足线性关系式 $x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} + x_3\overrightarrow{c} = 0$, 表达成坐标形式就是

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -x_1-10x_2+6x_3=0, \end{cases}$$

它的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -10 & 6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

因此这个方程组只有零解, 即 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 线性无关.

(2) $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 3(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) - 2(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}) + (-\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 17\overrightarrow{e_2} + 23\overrightarrow{e_3}$, 故 $\overrightarrow{d}$ 的坐标是 $(-2, 17, 23)$.

(3) $\overrightarrow{f} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) = \dfrac{1}{3}(-6\overrightarrow{e_1} + 15\overrightarrow{e_2} + 37\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + \dfrac{37}{3}\overrightarrow{e_3}.$

4. 判断下列每组的三个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 是否共面? 能否将 $\overrightarrow{c}$ 表示成其它两个向量的线性组合? 若能, 写出具体的表示式子.

(1) $\overrightarrow{a}(5,2,1)$, $\overrightarrow{b}(-1,4,2)$, $\overrightarrow{c}(-1,-1,5)$;

(2) $\overrightarrow{a}(3,3,2)$, $\overrightarrow{b}(6,6,4)$, $\overrightarrow{c}(1,-1,0)$;

(3) $\overrightarrow{a}(1,2,-3)$, $\overrightarrow{b}(-2,-4,6)$, $\overrightarrow{c}(1,0,5)$.

解: 问题归结为求解 $x_1\overrightarrow{a}+x_2\overrightarrow{b}+x_3\overrightarrow{c}=0$.

(1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+5x_3=0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=121\neq 0,$$

方程只有零解, 故原向量组不共面.

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2+x_3=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3=0 \\ 2x_1+4x_2=0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3=-1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2=1 \\ 3x_1+6x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=0, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 的线性组合.

(3) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-4x_2=0 \\ -3x_1+6x_2+5x_3=0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3=-1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ 2x_1-4x_2=0 \\ -3x_1+6x_2=-5, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 的线性组合.

5. 设向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1,-1,2)$, $(2,k,1)$, $(1,1-k,k)$. 问: 当 k 取什么值时, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面? 特别地, k 取什么值时, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 共线?

解: 这 3 个向量共面的充分必要条件是其坐标的行列式等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1-k & k \end{vmatrix}=k^2-3k+2=0.$$

因此当$k=1$或2时这3个向量共面. 要使 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ 共线必须使它们的相应坐标成比例, 即 $\frac{1}{1}=\frac{1-k}{-1}=\frac{k}{2}$, 解得$k=2$. 因此当$k=2$时 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ 共线.

6. 设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 为基. 问向量 $\overrightarrow{v}$ 能否表为向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的线性组合? 如能, 则写出表达式.

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=6\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+15\overrightarrow{e_3}$;

(2) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{e_1}+6\overrightarrow{e_2}+5\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$.

解: 设 $\overrightarrow{v}=x_1\overrightarrow{a}+x_2\overrightarrow{b}+x_3\overrightarrow{c}$, 问题归结为解线性方程组.

(1) 方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ 4x_1+x_2+3x_3=15, \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, 不能断定方程组是否有解. 用加减消去法解得 $\begin{cases} x_1=3-\frac{2}{3}x_3 \\ x_2=3-\frac{1}{3}x_3, \end{cases}$ 令 $x_3=3k$ 可以得到线性表示式 $\overrightarrow{v}=(3-2k)\overrightarrow{a}+(3-k)\overrightarrow{b}+3k\overrightarrow{c}$, 其中$k$为任意数.

(2) 方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ -2x_1+2x_2+6x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=0, \end{cases}$ 系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=36,$$

方程组有解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{36}=-\frac{11}{36}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{36}=\frac{16}{9}, \quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{36}=-\frac{19}{36}.$$

线性表示式为 $\overrightarrow{v}=-\frac{11}{36}\overrightarrow{a}+\frac{16}{9}\overrightarrow{b}-\frac{19}{36}\overrightarrow{c}$.

7. 当a为何值时, 下列四点共面:

$$M_1(1,a,a^2), \quad M_2(1,-1,1), \quad M_3(2,1,-2), \quad M_4(-1,2,2).$$

解: 根据推论 4.5, 此 4 点共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2-1 & -1-1 \\ -1-a & 1-a & 2-a \\ 1-a^2 & -2-a^2 & 2-a^2 \end{vmatrix}=-7a^2-5a+2=0,$$

解得$a=-1$或$\frac{2}{7}$.

习 题 1–5

1. 根据n维向量的定义证明: 对任意n维向量α, 有

(1) $0\alpha=0$;

(2) $(-1)\alpha=-\alpha$;

(3) $k0=0$ (任意数k);

(4) 从$k\alpha=0$推出$k=0$或$\alpha=0$.

证明: 对任意的$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, 则:

(1) $0\alpha = (0a_1, \cdots, 0a_n) = (0, \cdots, 0) = 0$.

(2) $(-1)\alpha = ((-1)a_1, \cdots, (-1)a_n) = (-a_1, \cdots, -a_n) = -\alpha$.

(3) $k0 = (k0, \cdots, k0) = (0, \cdots, 0) = 0$.

(4) $k\alpha = (ka_1, \cdots, ka_n) = (0, \cdots, 0)$. 若 $\alpha \neq 0$, 则存在 $a_i \neq 0$, 由 $ka_i = 0$ 可得 $k = 0$.

2. 证明: 任一数域都包含有理数域.

证明: 设 K 为一个数域, 则 $1 \in K$. 所以对任意的正整数 n 有 $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \in K$, 并且 n 的负元 $-n \in K$. 因此 K 含有全部整数. 又因对任意的整数 $n \neq 0$, $n \in K$, $\dfrac{1}{n}$ 为 n 的逆元, 则 $\dfrac{1}{n} \in K$, 所以对任意的有理数 $\dfrac{m}{n}$ (其中 m, n 是整数), 有 $\dfrac{m}{n} = m \times n \in K$, 故有理数域 $\mathbb{Q} \subseteq K$.

3. 证明: 全体形如

$$a + b\sqrt{2}, \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

的数组成的集合构成一个数域.

证明: 把这个集合记为 K, 设 $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in K$, 则

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2} \in K$$

(因为有理数的和与差仍是有理数);

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in K$$

(因为有理数的和、差与乘积仍是有理数); 当 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ 时,

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{a_2^2 - 2b_2^2} = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} \in K$$

(有理数关于除法也是封闭的). 因此集合 K 关于加减乘除法都封闭, 成为一个数域.

4. 设 K 为数域, V 为 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对所有的 $k \in K$, $\alpha, \beta \in V$, 有

(1) $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$;

(2) $\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n\text{个}} = n\alpha$;

(3) 若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, 则 $\beta = \gamma$.

证明: 设 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ $(a_i, b_i \in K)$. 则对任意的 $k \in K$,

(1) $k(\alpha - \beta) = k(a_1 - b_1, \cdots, a_n - b_n) = (k(a_1 - b_1), \cdots, k(a_n - b_n)) = (ka_1 - kb_1, \cdots, ka_n - kb_n) = k(a_1, \cdots, a_n) - k(b_1, \cdots, b_n) = k\alpha - k\beta$.

(2) $\underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n} = (\underbrace{a_1 + \cdots a_1}_{n}, \underbrace{a_2 + \cdots + a_2}_{n}, \cdots, \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{n}) = (na_1, \cdots, na_n) = n\alpha$.

(3) 若设 $\gamma = (c_1, \cdots, c_n)$, 且 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, 即: $(a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n) = (a_1 + c_1, \cdots, a_n + c_n)$, 则有 $a_i + b_i = a_i + c_i$, 即 $b_i = c_i$, 所以 $\beta = \gamma$.

习 题 1–6

1. 将下列向量单位化:

(1) $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{k}$.

解: (1) $\overrightarrow{a^0} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \dfrac{\sqrt{70}}{70}(5\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k})$.

(2) $\overrightarrow{b^0} = \dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{k})$.

2. 计算下列向量的夹角:

(1) $\overrightarrow{a} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{b} = (2, 1, -2)$;

(2) $\overrightarrow{a} = (-2, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 4)$.

解: (1) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{b}| = 3$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -6$, 所以

$$\cos\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{14}}{7}, \qquad \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \pi - \arccos \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

(2) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{b}| = 3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -7$, 所以

$$\cos\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \frac{-7}{6\sqrt{3}} = -\frac{7\sqrt{3}}{18}, \qquad \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \pi - \arccos \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

3. 求向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{e^0}$ 上的投影:

(1) $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{e} = (1, 1, 1)$;

(2) $\overrightarrow{a} = (-2, 1, 3)$, $\overrightarrow{e} = (1, 2, 0)$.

解: (1) $\overrightarrow{e^0} = \dfrac{\overrightarrow{e}}{|\overrightarrow{e}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$, 则

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e^0}}\, \overrightarrow{a} = (\Pi_{\overrightarrow{e^0}}\, \overrightarrow{a})\overrightarrow{e^0} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e^0})\overrightarrow{e^0} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{e^0} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) = \frac{2}{3}(1, 1, 1).$$

(2) 因 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e} = 0$, 所以 $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e^0}}\, \overrightarrow{a} = 0$.

4. 证明: 以 $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$, $C(-3, 2, 1)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证明: $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-6, 3, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, 6, -1)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{46} \neq |\overrightarrow{AB}|$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. 证明: 以 $A(3, -2, 1)$, $B(7, 6, 9)$, $C(9, 1, -5)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明: $\overrightarrow{AB} = (4, 8, 8)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 3, -6)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12(2 + 2 - 4) = 0$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

6. 试问 $(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})$ 一定成立吗? 请给出该向量等式成立的条件.

解: 等式左端是与 $\overrightarrow{c}$ 共线的向量, 右端是与 $\overrightarrow{a}$ 共线的向量. 如果两端都不等于 0, 则 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 即存在 $k \neq 0$, 使 $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{c}$. 反之若 $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{c}$, 左边 $= k(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = (k\overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) =$ 右边.

若等式两边都等于 0, 则或者 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 中至少有一个零向量; 或者三个向量都不等于 0, 但 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$, 即 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 均正交.

7. 求解向量方程 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$.

解: 因为 $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\overrightarrow{x} = 0$, 分两种情况: (a) 若 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \neq 0$, 则解 $\overrightarrow{x}$ 为任意与 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ 垂直的向量; (b) 若 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 0$, 则任意向量 $\overrightarrow{x}$ 都是解向量.

8. 设有三个向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 两两构成 $60°$ 角, 且知 $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $|\overrightarrow{c}| = 6$. 求 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ 的长度.

解: $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}|^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 16 + 4 + 36 + 2(8 + 24 + 12)\cos 60° = 100$. 所以 $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}| = 10$.

9. 已知 $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \dfrac{\pi}{6}$. 试求 $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ 与 $2\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ 的内积.

解: $(3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) \cdot (2\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}) = 6\overrightarrow{a}^2 - 10\overrightarrow{b}^2 - 11\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 54 - 40 - 11 \times 3 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 14 - 33\sqrt{3}$.

***10.** 设一个四边形各边之长分别是 a, b, c, d, 且其对角线互相垂直. 求证各边之长也是 a, b, c, d 的任一四边形的两条对角线也相互垂直.

证明: 如图, 有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.$$

考虑以下内积:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC};$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=-\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

将上述 4 式相加, 可得:

$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

由

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$$

可得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}.$$

由

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})^2$$

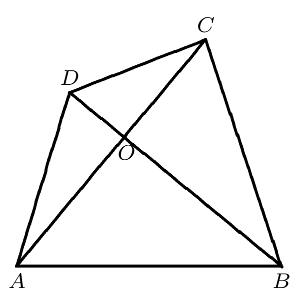
整理得

$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2=2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}).$$

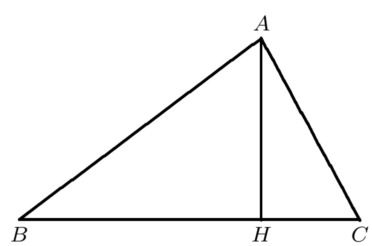
代入上式得

$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2)=2(b^2+d^2-a^2-c^2).$$

这说明对角线垂直的充分必要条件是 $a^2+c^2=b^2+d^2$, 只与四边形的边长有关.



第 10 题图



第 11 题图

11. 三角形 ABC 中, 已知 BC 边上的高为 AH. 试用 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AH}$.

解: 将 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}$ 代入 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BC}^2=0$. 因此

$$k=\frac{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2},$$

得

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2}.$$

再用 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 代入, 整理后得

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2}[(\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AC}].$$

12. 在直角坐标系中, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(3,5,7)$, $(0,4,3)$, $(-1,2,-4)$. 求 $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}$ 与 $2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 的夹角.

解: 记

$$\overrightarrow{p}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}=(14,21,53), \qquad \overrightarrow{q}=2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(-1,10,2),$$

则

$$\overrightarrow{p}^2=3446, \quad \overrightarrow{q}^2=105, \quad \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=302.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}\rangle=\frac{151\sqrt{361830}}{180915}.$$

13. 求下列向量的方向余弦:

(1) $\overrightarrow{a}=(2,-3,-6)$; (2) $\overrightarrow{b}=(2,3,-10)$.

解: (1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{-3}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{-6}{7}$.

(2) $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{113}}{113}$, $\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{113}}{113}$, $\cos\gamma=-\dfrac{10\sqrt{113}}{113}$.

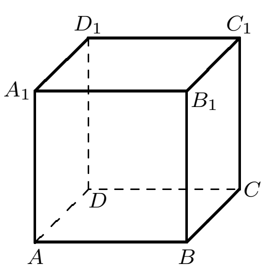
14. 计算正方体的对角线与它的任一个面的对角线之间的夹角.

解: 建立直角坐标系 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}]$, 以对角线 AC_1 来计算此题.

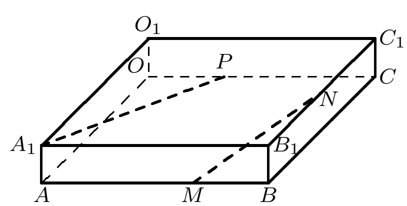
$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=(1,1,1).$$

(a) $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=(1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 由对称性, $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{AC}$ 的夹角余弦也为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$, 即 $\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$. 同理. $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CD_1}$ 的夹角也为 $\dfrac{\pi}{2}$.



第 14 题图



第 15 题图

15. 如图, 已知长方体 $OABC\text{–}O_1A_1B_1C_1$ 中, $|OA|=8$, $|OC|=6$, $|OO_1|=1$. P 是棱 OC 上的点, 且 $|PC|=2|OP|$, M 是棱 AB 上的点, 且 $|AM|=2|MB|$, N 是棱 B_1C_1 的中点. 求直线 A_1P 与直线 MN 所成的角.

解: 把向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}$ 的单位向量记为 $\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}$, 建立直角坐标系 $[O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]$. 则

$$\overrightarrow{OA_1}=8\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}=(8,0,1);$$
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{j}=(0,2,0);$$
$$\overrightarrow{OM}=8\overrightarrow{i}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=8\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}=(8,4,0);$$
$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}=(4,6,1);$$

因此

$$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_1}=(-8,2,-1);$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-4,2,1).$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{A_1P},\overrightarrow{MN}\rangle=\frac{35}{\sqrt{69}\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{161}}{69}.$$

16. 若向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 不共面, 而且 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{x}=0$. 则 $\overrightarrow{x}=0$. 试证之.

证明: 因为 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 不共面, 所以它们线性无关, 且 $\overrightarrow{x}$ 可由它们线性表示, 即: $\overrightarrow{x}=k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}$. 于是 $\overrightarrow{x}^2=k_1(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})+k_2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{x})+k_3(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{x})=0$, 即: $\overrightarrow{x}=0$.

17. 证明三个向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{c}\end{vmatrix}=0.$$

证明: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使: $k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}=0$. 从而

$$\begin{cases}k_1\overrightarrow{a}^2+k_2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+k_3(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})+k_2\overrightarrow{b}^2+k_3(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+k_2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})+k_3\overrightarrow{c}^2=0,\end{cases}$$

也即齐次线性方程组

$$\begin{cases}x\overrightarrow{a}^2+y(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+z(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ x(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})+y\overrightarrow{b}^2+z(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ x(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+y(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})+z\overrightarrow{c}^2=0\end{cases}\tag{$*$}$$

有非零解 $x=k_1$, $y=k_2$, $z=k_3$. 根据引理 4.1, 系数行列式

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2\end{vmatrix}=0.$$

反之, 若

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2\end{vmatrix}=0,$$

则 $(*)$ 必有非零解, 设为 $x=k_1$, $y=k_2$, $z=k_3$, 令 $\overrightarrow{p}=k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}$, 那么. 从 $(*)$ 知:

$$\overrightarrow{p}^2=k_1\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}=0,$$

即 $\overrightarrow{p}=0$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 线性无关, 必定共面.

习 题 1–7

1. 在直角坐标系中, 已知 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的坐标分别是(1,0,1), (1,−2,0), (−1,2,1), 求 $(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})$ 的坐标.

解: $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(4,-2,3)$, $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(2,-4,-1)$, 所以

$$(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -4 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}\right)=(14,10,-12).$$

2. 证明 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2\leqslant\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2$. 并说明等式何时成立.

证明: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle\leqslant|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$, 等号成立当且仅当 $\sin\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=0$. 即: $\overrightarrow{a}\mathrel{/\mkern-5mu/}\overrightarrow{b}$.

3. 已知 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是两个互不平行的向量, 求证 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$, 并说明它的几何意义.

证明: $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$. 几何意义: 若以 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 构成一个平行四边形的相邻两边, 则 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 为此平行四边形的两对角线. 上式说明: 以对角线构成的平行四边形面积为原平行四边形面积 2 倍.

4. 求向量 $\overrightarrow{c}$, 使 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$, 其中,

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$.

解: 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$. 则 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$. 计算得:

(1) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$.

(2) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$. (本题答案不唯一)

5. 设 $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}=-8\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. 求 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, 使 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $\quad\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$.

解: 令 $\overrightarrow{n^0}=\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$, $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\,\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})u^0=\dfrac{-17}{7}(2,3,-1)$. 令

$$\overrightarrow{v_2}=\frac{-17}{7}(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}),\qquad \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}=\frac{2}{7}(-11\overrightarrow{i}+8\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}),$$

则: $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, 且 $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=0$.

6. 设 $\overrightarrow{u}$ 为给定的非零向量, $\overrightarrow{v}$ 为任一向量.

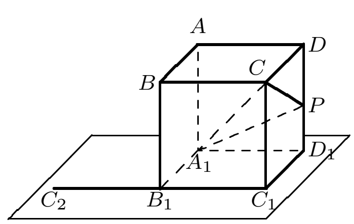
(1) 证明: $\overrightarrow{v}$ 可唯一分解为 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 其中, $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$;

(2) 具体写出 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ 的表达式.

证明: (1) 若 $\overrightarrow{v}$ 有两种分解法: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_1'}+\overrightarrow{v_2'}$, 其中. $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2'}/\!/\overrightarrow{u}$, 则 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}$. 但 $(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'})\cdot\overrightarrow{u}=0$, $(\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2})\times\overrightarrow{u}=0$, 所以 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\neq 0$, 推出: $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=0$, $\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}=0$, 即 $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_1'}$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_2'}$.

(2) 令 $\overrightarrow{v_2}=\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\,\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})u^0=\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}$. 则 $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}^2=0$, 即 $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$. 且知: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 由 (1) 知这种分解是唯一的, 故表达式为

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_2}=\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}.\end{cases}$$



第 7 题图

7. 如图, 已知 $ABCD\text{--}A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体, P 是棱 DD_1 上任意一个点. 线段 C_1C_2 的中点是 B_1. 请指出下列各个向量积所确定的向量:

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}$; $\qquad$ (2) $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}$; $\qquad$ (3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}$.

解: 建立直角标架 $[A_1;\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1D_1},\overrightarrow{A_1A}]$. 设 P 为 DD_1 上任一点. 则:

$$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k),\qquad \overrightarrow{A_1C}=(1,1,1).$$

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k)\times(0,0,1)=(1,0,0)=\overrightarrow{A_1B_1}$.

(2) $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{A_1C}-\overrightarrow{A_1P}=(1,0,1-k)$, $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,0,1-k)\times(0,0,1)=(0,-1,0)=-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{D_1A_1}$.

(3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,1,1)\times(0,0,1)=(1,-1,0)=\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C_2}$.

8. 计算由向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 所张成的平行四边形的面积:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$.

解: (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{30}$. 所以 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $\sqrt{30}$.

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=2\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $2\sqrt{3}$.

9. 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 为两两不共线的向量. 证明: $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$.

证明: 若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=0$, 则此式与 $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 作外积后可得 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{b}=0$ 以及 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=0$, 即 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$.

反之, 设 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$. 由上述等式可得 $\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{b}=0$ 以及 $\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=0$. 如果 $\overrightarrow{p}\neq 0$, 则由 $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{b}$ 共线以及 $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{b}$ 共线可得 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 与假设矛盾.

10. 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 为两不共线的向量, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}+8\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=3(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$. 证明: A,B,D 三点共线.

证明: 要证 A,B,D 三点共线, 只须证明: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BD}=0$ 即可. 由

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=5\overrightarrow{a}+5\overrightarrow{b}=5(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=5\overrightarrow{AB},$$

可得 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BD}=0$, 即: A,B,D 三点共线.

11. 三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 满足

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=0.$$

求证: (1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 共面;

(2) 三点 A,B,C 共线.

证明: (1) 要证: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC}$ 共面只须证明: 存在非零向量 $\overrightarrow{p}$, 使: $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ 即可. 令 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OC}=0$, 又因

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=0,$$

可得

$$\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{OA}=-(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0.$$

若 $\overrightarrow{p}\neq 0$, 则 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 共面; 如果 $\overrightarrow{p}=0$, 则 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 共线, 也有 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 共面.

(2) 要证 A,B,C 共线只须证明: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$. 因

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\qquad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\times(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=0,$$

故 A,B,C 三点共线.

12. 如果 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{q}\times\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{n}$, 则 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面. 试证明之.

证明: 由于 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{c}=0$, 若 $\overrightarrow{n}\neq 0$, 则 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面; 否则, 由 $\overrightarrow{n}=0$ 可得 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}=0$, 也共面.

习 题 1–8

1. 判断下列向量组是否共面:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=5\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=11\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=7\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{k}$;

(4) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$.

解: (1) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & 4 & -3\\ 11 & 0 & -1\end{vmatrix}=88\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(2) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & -4 & -2\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=25\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(3) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -51 & \\ 7 & -5 & 8\end{vmatrix}=-40\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(4) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面.

2. 计算由向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 所张成的平行六面体的体积:

(1) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$;

(4) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.

解: (1) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left|\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=15.$

(2) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left|\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}\right|=|-1|=1.$

(3) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left|\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\right|=|-1|=1.$

(4) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=1.$

3. 确定下列四点是否共面:

(1) $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$;

(2) $A(3,-2,1)$, $B(2,0,-1)$, $C(-1,-4,5)$, $D(3,-2,4)$;

(3) $A(1,2,-3)$, $B(3,5,-1)$, $C(0,-2,7)$, $D(2,1,3)$;

(4) $A(1,0,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(1,2,-2)$, $D(2,0,-21)$.

解: 要确定 A,B,C,D 四点是否共面, 只须确定 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 这三个向量是否共面. 所以只须看 $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ 是否为零.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,4)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=0,\quad 共面.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-2,4)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&2&-2\\-4&-2&4\\0&0&3\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad 不共面.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(2,3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,10)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,6)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&3&2\\-1&-4&10\\1&-1&6\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad 不共面.$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(1,0,-22)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&2&-3\\1&0&-22\end{vmatrix}=45\neq 0,\quad 不共面.$$

4. 确定以 A, B, C, D 为顶点的四面体的体积:

(1) $A(-1,0,1)$, $B(-2,1,4)$, $C(1,3,-3)$, $D(-2,-1,3)$;

(2) $A(2,-1,1)$, $B(5,4,4)$, $C(2,3,-1)$, $D(4,1,2)$;

(3) $A(1,0,2)$, $B(1,-1,0)$, $C(2,2,-1)$, $D(3,1,0)$;

(4) $A(2,2,-1)$, $B(1,2,-2)$, $C(2,-2,1)$, $D(1,1,1)$.

解: (1) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3,-4)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1&1&3\\2&3&-4\\-1&-1&2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(3,5,3)$. $\overrightarrow{AC}=(0,4,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,2,1)$,

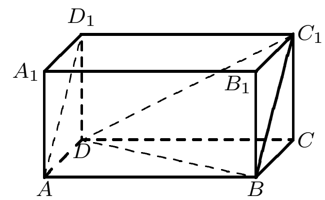
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}3&5&3\\0&4&-2\\2&2&1\end{matrix}\right\|=\frac{|-20|}{6}=\frac{10}{3}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(2,1,-2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}0&-1&-2\\1&2&-3\\2&1&-2\end{matrix}\right\|=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-4,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1&0&-1\\0&-4&2\\-1&-1&2\end{matrix}\right\|=\frac{5}{3}.$$



第 5 题图

5. 如图, 已知长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$, $|AB|=4$, $|AD|=|AA_1|=2$. 求

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离;

(2) 直线 AD_1 与平面 C_1BD 的距离.

解: 设 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的单位向量是 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, 建立直角坐标系 $[D; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$. 则

$$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2), \qquad \overrightarrow{DB}=(2,4,0), \qquad \overrightarrow{DC_1}=(0,4,2).$$

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}2&0&2\\2&4&0\\0&4&2\end{vmatrix}\right|}{|(8,-4,8)|}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

(2) 因为 $AD_1 /\!/ BC_1$, 所以 $AD_1 /\!/$ 平面 C_1BD. 故 AD_1 上任一点到平面 C_1BD 的距离即为 AD_1 到平面 C_1BD 的距离.

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}2&0&0\\2&4&0\\0&4&2\end{vmatrix}\right|}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

6. 设 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3}$. 求证

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

证明: $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3})\times(a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3})=a_1b_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+a_1c_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+b_1a_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}+b_1c_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}+c_1a_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}+c_1b_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2}=(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}$,

$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=[(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}]\cdot(a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3})=[(a_1b_2-b_1a_2)c_3](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})-[(a_1c_2-c_1a_2)b_3](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})+[(b_1c_2-c_1b_2)a_3](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. (只要利用三阶行列式的定义便可计算得).

7. 求证: $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|\leqslant|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

证明: $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\Big||\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\cos\langle\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle\Big|\leqslant|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\rangle\leqslant|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

8. 证明雅可比恒等式:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})+\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0.$$

证明: 由命题 7.7 知:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c},$$

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a},$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b},$$

相加即得结论.

9. 证明: 空间中四点 A, B, C, P 共面的充分必要条件是, 它们所对应的位置向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ 满足

$$(\vec{p},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{p},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\vec{p})-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0.$$

证明: A,B,C,P 共面当且仅当 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面. 已知

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB},\quad \vec{c}=\overrightarrow{OC},\quad \vec{p}=\overrightarrow{OP},$$

故

$$\overrightarrow{PA}=\vec{a}-\vec{p},\quad \overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{p},\quad \overrightarrow{PC}=\vec{c}-\vec{p}.$$

因此 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})=0$, 当且仅当

$$(\vec{a}-\vec{p},\vec{b}-\vec{p},\vec{c}-\vec{p})=0,$$

当且仅当

$$(\vec{a},\vec{b}-\vec{p},\vec{c}-\vec{p})-(\vec{p},\vec{b}-\vec{p},\vec{c}-\vec{p})=0,$$

当且仅当

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})-(\vec{a},\vec{b},\vec{p})-(\vec{a},\vec{p},\vec{c})-(\vec{p},\vec{b},\vec{c})=0,$$

当且仅当

$$(\vec{p},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{p},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\vec{p})-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0.$$

10. 证明

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$;

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$.

证明: (1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=-(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b})=-[\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}-\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}]=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$.

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b}-[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$.

11. 证明对任意四个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 总有

$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}+(\vec{c},\vec{a},\vec{d})\vec{b}+(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}+(\vec{b},\vec{a},\vec{c})\vec{d}=0$.

证明: 由第10题结论可得

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a},$$

移项后再适当改变混合积中向量次序即可证得.

12. 证明下列向量恒等式:

(1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$;

(2) $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=-2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$;

(3) $(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$;

(4) $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$.

证明: (1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a})=[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=[(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$.

(2) $(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d})=-(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=-(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{a})\overrightarrow{d}+(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{a}$, $(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d})=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=-(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})\overrightarrow{d}+(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}$, $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{c},\overrightarrow{d},\overrightarrow{a})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{c},\overrightarrow{d},\overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$, 所以

$$(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d})+(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d})+(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=-2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}.$$

(3) $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}$,

$(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}$,

$(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}$,

将上述等式左、 右两端分别相加则:

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})+(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0.$$

(4) $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}$,

$(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d}$,

$(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d}$,

将上述等式左、右两端分别相加得:

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}).$$

13. 证明对于任意向量 r_i $(i=1,2,3,4)$, 下式成立:

$$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=0.$$

证明: 根据定理 8.7, $(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})\cdot(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})$,

$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})\cdot(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})$,

$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})\cdot(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})$,

将上述等式的左、右两端分别相加后得到结论.

14. 证明 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面.

证明: 因为 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=0$, 但由 12 题的 (1) 知: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})^2$, 所以 $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$ 共面.

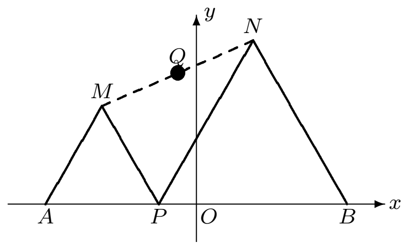
习 题 1–9

1. 三角形 ABC 底边的两个端点为 $B(-3,0)$, $C(3,0)$. 顶点 A 在直线 $7x-5y-35=0$ 上移动, 求三角形重心的轨迹.

解: 设重心的坐标为 (x,y), 则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{x_A}{3} \\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{y_A}{3}, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_A=3x \\ y_A=3y. \end{cases}$$

而 (x_A,y_A) 满足方程 $7x-5y-35=0$, 代入即得 $21x-15y-35=0$.



第 2 题图

2. 在长为 l 的线段 AB 上有一动点 P. 在 AB 的同侧, 以 AP, PB 为边分别作等边三角形 AMP 和 BNP. 求 MN 的中点 Q 的轨迹.

解: 以 AB 的中点 O 为原点, 以 AB 为 x 轴, 建立直角坐标系 $[O;\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}]$. 于是

$$A\left(-\frac{l}{2},0\right),\quad B\left(\frac{l}{2},0\right),\quad P(t,0),\qquad \left(-\frac{l}{2}<t<\frac{l}{2}\right).$$

则

$$M\left(\frac{t-\frac{l}{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{l}{2}\right)\right),\qquad N\left(\frac{t+\frac{l}{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}-t\right)\right).$$

所以 MN 的中点 Q 的坐标为:

$$\begin{cases} x_Q=\dfrac{t}{2} & \left(-\dfrac{l}{2}<t<\dfrac{l}{2}\right) \\ y_Q=\dfrac{\sqrt{3}}{4}l. & \end{cases}$$

即 Q 点的轨迹方程为: $y=\frac{\sqrt{3}}{4}l\left(-\frac{l}{4}<x<\frac{l}{4}\right)$.