第九章　线性空间上的函数

§1　线性函数与双线性函数

1. 设 V 是区间 $[-1,1]$ 上全体连续实函数所组成的线性空间. 证明:

$$\begin{aligned}\psi:\quad V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f(x) &\longmapsto \textstyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

是 V 上的一个线性函数.

证明: 显然 ψ 是 V 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 且对任意的 $f(x), g(x) \in V$, $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\psi(f(x)+g(x)) &= \int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x\\ &= \psi(f(x)) + \psi(g(x)),\end{aligned}$$

$$\psi(kf(x)) = \int_{-1}^{1} kf(x)\mathrm{d}x = k\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = k\psi(f(x)).$$

所以 ψ 是 V 上的一个线性函数.

2. 设 V 是数域 K 上的一个 3 维线性空间, η_1, η_2, η_3 是它的一个基, f 是 V 上的一个线性函数, 且

$$f(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) = 2,\ f(\eta_1 + \eta_3) = 2,\ f(-\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = -1.$$

求 $f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3)$.

解: 令

$$\begin{cases}\alpha_1 = \eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3\\ \alpha_2 = \eta_1 + \eta_3\\ \alpha_3 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\end{cases}$$

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

则 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}$, 所以

$$f(x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3)=(f(\eta_1),f(\eta_2),f(\eta_3))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(f(\alpha_1),f(\alpha_2),f(\alpha_3))A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(2,2,-1)\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\3&2&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3.$$

3. V 及 η_1,η_2,η_3 同上题. 试求一线性函数 g, 使

$$g(3\eta_1+\eta_2)=2,\ g(\eta_2-\eta_3)=1,\ g(2\eta_1+\eta_3)=2.$$

解: 设

$$g(\eta_1)=a,\quad g(\eta_2)=b,\quad g(\eta_3)=c,$$

则由已知得

$$\begin{cases}3a+b=2\\b-c=1\\2a+c=2.\end{cases}$$

解得 $a=-1$, $b=5$, $c=4$. 从而所求的线性函数为

$$g(x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3)=-x_1+5x_2+4x_3.$$

4. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是它的一个基, $a_1,\cdots,$ a_n 是 K 中任意 n 个数. 证明: 存在 V 上唯一的线性函数 f, 使

$$f(\eta_i)=a_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

证明: (存在性) 设 $\alpha = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_n\eta_n \in V$. 令

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow K \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

容易证明 f 是 V 上线性函数, 且满足所需条件.

(唯一性) 设 g 为 V 的线性函数, 使

$$g(\eta_i) = a_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

则对任意的 $\alpha = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_n\eta_n \in V$ 有

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = f(\alpha).$$

这就证明了唯一性.

5. 设 $V = K^3$, $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$, 判断下列二元函数 f 是否为 V 上的双线性函数:

(1) $f(\alpha, \beta) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$;

(2) $f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2y_1$;

(3) $f(\alpha, \beta) = c, \quad c \in K$;

(4) $f(\alpha, \beta) = (2x_1 + x_2 - 3x_3)(y_1 - y_2 + y_3)$.

解: (1) 是.

(2) 否.

(3) 当 $c \neq 0$ 时, 否; 当 $c = 0$ 时, 是.

(4) 是.

6. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 令

$$W_1 = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in V\},$$
$$W_2 = \{\alpha \in V \mid f(\beta, \alpha) = 0, \forall \beta \in V\}.$$

证明: W_1 与 W_2 都是 V 的线性子空间, 且 $\dim W_1 = \dim W_2$.

证明: (1) 由于对任意的 $\beta \in V$ 有 $f(0, \beta) = 0$, 因此 $0 \in W_1$, W_1 非空. 又对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1$, $k \in K$ 以及任意的 $\beta \in V$ 有

$$f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0,$$

$$f(k\alpha_1, \beta) = kf(\alpha_1, \beta) = 0,$$

因此

$$\alpha_1+\alpha_2\in W_1,\qquad k\alpha_1\in W_1.$$

所以 W_1 是 V 的线性子空间. 同理可证 W_2 也是 V 的线性子空间.

(2) 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的基, f 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为 B. 则对任意的向量

$$\alpha=(x_1\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\qquad \beta=(y_1\ \cdots\ y_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

$$f(\alpha,\beta)=(x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

从而

$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\eta_i\in W_1 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=0\quad \forall(y_1,\cdots,y_n)\in K^n \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B=0 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)$ 为齐次线性方程组 $XB=0$ 的解.

所以 $\dim W_1=$ 齐次线性方程组 $XB=0$ 的解空间的维数 $=n-\operatorname{rank}B$.

同理可证 $\dim W_2=n-\operatorname{rank}B$, 所以 $\dim W_1=\dim W_2$.

7. 设 f 为 K^n 上的一个二元函数, 证明: f 为 K^n 上的双线性函数的充分必要条件是存在矩阵 $A\in M_n(K)$, 使

$$f(X,Y)=X^{\mathrm T}AY,\quad X,Y\in K^n.$$

证明: ($\Rightarrow$) 设 f 为 K^n 上双线性函数, 取 f 的度量矩阵 A, 则 $A\in M_n(K)$, 且

$$f(X,Y)=X^{\mathrm T}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n.$$

($\Leftarrow$) 如二元函数满足

$$f(X,Y)=X^{\mathrm T}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n,$$

则 f 显然是 K^n 上双线性函数.

8. 对于第 5 题中的双线性函数, 试求相应的度量矩阵.

解: (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 当 $c=0$ 时, 度量矩阵 $=0$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

9. 设 $V=K^4$, 如下定义 V 的二元函数 f:

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4,$$

其中

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad \beta=(y_1,y_2,y_3,y_4).$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基

$$\begin{aligned} \eta_1&=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(0,2,1,0),\\ \eta_3&=(1,1,-2,1),\quad \eta_4=(0,0,1,2) \end{aligned}$$

下的度量矩阵;

(3) 找出一个满足 $f(\alpha,\alpha)=0$的向量 $\alpha\neq 0$.

解: (1) 代入验证即可. 证略.

(2) 我们有

$$(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

而 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

因此 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(3) 取 $\alpha=(1,1,1,1)$, 显然有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

10. 设 $V=K^4$, $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,

$$f(\alpha,\beta)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3.$$

(1) 求 f 在基

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(1,2,1,-1),$$
$$\eta_3=(-1,1,2,1),\quad \eta_4=(1,-1,1,2)$$

下的度量矩阵;

(2) 另取 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)T,$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 f 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵.

解: (1) 把 f 在自然基下的度量矩阵记为 B, 把由自然基到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵记为 A, 则

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

于是 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$C=A^{\mathrm{T}}BA=\begin{pmatrix}-1&4&2&-17\\-20&-1&22&-7\\-7&-17&-4&-2\\22&2&-17&-4\end{pmatrix}.$$

(2) f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$D=T^{\mathrm{T}}CT=\begin{pmatrix}-45&9&39&-27\\9&-45&9&-117\\-39&-9&5&3\\27&117&3&45\end{pmatrix}.$$

11. 设 f 是 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 证明: f 非退化的充分必要条件是: 从

$$f(\alpha,\beta)=0,\quad 对所有的\alpha\in V,$$

可以推出 $\beta=0$.

证明: $(\Rightarrow)$ 令

$$W_1=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\},$$

$$W_2=\{\alpha\in V\mid f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in V\}.$$

如 f 非退化, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 $W_1=0$, 从而由习题 6 得 $W_2=0$. 因此由 $f(\alpha,\beta)=0\forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$.

$(\Leftarrow)$ 如 $f(\alpha,\beta)=0\ \ \forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$, 则 $W_2=0$, 同理可得 $W_1=0$, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 f 非退化.

12. 设 $A\in M_m(K)$, $V=M_{m,n}(K)$. 定义 V 上的二元函数 f 如下:

$$f(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY),\quad X,Y\in V.$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵;

(3) 在什么条件下, f 是非退化的.

解: (1) 设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, $Y=(y_{ij})_{m\times n}$, $A=(a_{ij})_m$, 则

$$f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}x_{li}a_{lk}y_{ki},$$

从而知 f 是双线性的.

(2) 由于 $f(E_{st}, E_{uv}) = \delta_{tv} a_{su}$, 因此 f 在基 $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{m1}, \cdots, E_{mn}$ 下的度量矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}E & \cdots & a_{1m}E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}E & \cdots & a_{mm}E \end{pmatrix},$$

其中 E 是 n 阶单位方阵.

(3) 由于 $|B| = |A|^n$, 所以 f 非退化 $\iff |B| \neq 0 \iff |A| \neq 0$. 即 f 非退化的充分必要条件是 A 是可逆矩阵.

13. 证明: $M_n(K)$ 上的双线性函数

$$f(A, B) = \operatorname{Tr} AB, \quad A, B \in M_n(K)$$

是非退化的.

证明: 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. 如果

$$f(A, B) = \operatorname{Tr} AB = 0 \qquad \forall B \in M_n(K)$$

则 $f(A, E_{ij}) = 0\ \forall i, j = 1, \cdots, n$. 而

$$f(A, E_{ij}) = \operatorname{Tr} AE_{ij} = a_{ji},$$

所以 $a_{ji} = 0$ 对 $i, j = 1, \cdots, n$, 即 $A = 0$. 因此 f 非退化.

另证: 因为

$$f(A, B) = \operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} B) = \operatorname{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} EB),$$

由习题 12(3) 可知 f 非退化.

§2　对称双线性函数

1. 设 f 是线性空间 V 上的双线性函数, W 是 V 的真子空间.

证明: 对 $\xi \notin W$, 必有非零向量 $\eta \in W + L(\xi)$, 使对所有的 $\alpha \in W$, 都有 $f(\eta, \alpha) = 0$.

证明: 如 $W=0$, 则结论显然成立. 现设 $W\neq 0$. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 则因 $\xi\notin W$, $\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 考察线性方程组

$$\begin{cases} x_0f(\xi,\alpha_1)+x_1f(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_1)=0\\ x_0f(\xi,\alpha_2)+x_1f(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_2)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_0f(\xi,\alpha_s)+x_1f(\alpha_1,\alpha_s)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_s)=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

此齐次线性方程组的方程个数 s 小于未知量个数 $s+1$, 故 (*) 有非零解 $(a_0,a_1,\cdots,a_s)$. 令

$$\eta=a_0\xi+a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s,$$

则 $\eta\in W+L(\xi)$, 且 $\eta\neq 0$ (因 $\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且 $a_0,a_1,\cdots,a_s$ 不全为零). 且由 (*) 知

$$f(\eta,\alpha_i)=0,\qquad i=1,2,\cdots,s.$$

又因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 故对任意的 $\alpha\in W$ 都有 $f(\eta,\alpha)=0$.

2. V 与 f 同上题, W 是 V 的线性子空间, 令

$$W^\perp=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}.$$

证明: (1) $W^\perp$ 是 V 的线性子空间;

(2) 如果 $W\cap W^\perp=\{0\}$, 则 $V=W\oplus W^\perp$.

证明: (1) 由 $f(0,\beta)=0\ \forall\beta\in W$, 可得 $0\in W^\perp$, 因此 $W^\perp$ 非空.

对任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in W^\perp$, $k\in K$, 则 $\forall\beta\in W$, 有

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=0,$$

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0,$$

因此 $\alpha_1+\alpha_2\in W^\perp$, $k\alpha_1\in W^\perp$, 故 $W^\perp$ 是 V 的线性子空间.

(2) 对任意的 $\xi\notin W$, 由上题所证, 存在 $\eta\neq 0\in W+L(\xi)$, 使得 $f(\eta,\alpha)=0\ \ \forall\alpha\in W$, 即 $\eta\in W^\perp$. 记 $\eta=\alpha+a\xi$, 则因 $W\cap W^\perp=0$, 必有 $a\neq 0$. 所以

$$\xi=a^{-1}\eta-a^{-1}\alpha\in W^\perp+W.$$

证得 $V\subseteq W^\perp+W$.

3. 求可逆矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形. 其中 A 为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

解: (1) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(4) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相合, 其中 $i_1, \cdots, i_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的一个排列.

证明: 考察 n 维线性空间 V. 设 f 为 V 上的对称双线性函数, 它在基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

易知 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 仍是 V 的基, 且 f 在 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

因此这两个矩阵相合.

5. 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表为 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明: 设 A 是秩为 r 的对称矩阵, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i \neq 0.$$

令

$$A_i = T^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_i & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

则 A_i 也是对称矩阵, $\operatorname{rank} A_i = 1$ 且 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$.

6. 设 A 为实矩阵, 证明: $A^{\mathrm{T}}A$ 与 A 的秩相等.

证明: 易知, $A^{\mathrm{T}}A$ 是实对称矩阵. 考察实数域上的齐次线性方程组

$$A^{\mathrm{T}}AX = 0 \tag{1}$$

与

$$AX = 0. \tag{2}$$

显然 (2) 的解都是 (1) 的解.

设 $X \in \mathbb{R}^n$ 为 (1) 的一个解. 令

$$Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则

$$Y^{\mathrm{T}} Y = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} AX = 0,$$

从而

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0.$$

由于 y_i 均为实数, 因此 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, $Y = 0$, 即

$$AX = 0.$$

从而 (1) 的解也都是 (2) 的解. (1) 与 (2) 同解. 由齐次线性方程组解的性质知

$$\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}} A = \operatorname{rank} A.$$

7. 设 A 为正定矩阵, 证明: A^{-1} 与 A^* 都是正定矩阵.

证明: 易知 A^{-1} 与 A^* 都是实对称矩阵. 且 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$. 因 A 正定, 存在可逆实矩阵 C 使 $C^{\mathrm{T}} C = A$. 从而 $A^{-1} = C^{-\mathrm{T}} C^{-1}$ 也正定. 由 $|A| > 0$ 可知 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$ 也正定.

8. 证明任意一个方阵都可唯一表为一个对称矩阵和一个反称矩阵之和.

证明: 设 A 是一个方阵, 则 $B = \dfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ 是一个对称矩阵, $C = \dfrac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$ 是一个反称矩阵, 而且 $A = B + C$. 这就证明了分解的存在性. 再证唯一性. 如果还有分解 $A = B_1 + C_1$, 其中 B_1 是对称矩阵, C_1 是反称矩阵. 与前式相减后可得 $B - B_1 = C_1 - C$. 等式左边是对称矩阵, 右边是反称矩阵, 因而是零矩阵, 即 $B = B_1$, $C = C_1$.

9. 证明: 任意一个双线性函数都可唯一表为一个对称双线性函数和一个反称双线性函数之和.

证明: (1) 设 $f(\alpha, \beta)$ 是一个双线性函数, 易知

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$$

是对称双线性函数,

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)]$$

为反称双线性函数, 且

$$f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta)+h(\alpha,\beta).$$

(2) 又设

$$f(\alpha,\beta)=g'(\alpha,\beta)+h'(\alpha,\beta),$$

其中 $g'(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数, $h'(\alpha,\beta)$ 是反称双线性函数, 则

$$f(\beta,\alpha)=g'(\beta,\alpha)+h'(\beta,\alpha)=g'(\alpha,\beta)-h'(\alpha,\beta).$$

从而

$$g'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)]=g(\alpha,\beta),$$
$$h'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha)]=h(\alpha,\beta).$$

10. 设 A 为实对称矩阵, 证明:

(1) 当实数 λ 充分大之后, $\lambda E+A$ 是正定的;

(2) A 半正定当且仅当对任何的 $\lambda>0$, $\lambda E+A$ 都正定.

证明: (1) 考察 $A(\lambda)=\lambda E+A$, 它的 r 阶顺序主子式

$$D_r(\lambda)=|\lambda E_r+A_r|=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r.$$

所以当 λ 充分大时, 有 $D_r(\lambda)>0$, $r=1,\cdots,n$. 从而当 λ 充分大时, $\lambda E+A$ 正定.

(2) ($\Rightarrow$) 若 A 半正定, 则对任意的 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, $X^{\mathrm{T}}AX\geq 0$. 从而对任意的 $\lambda>0$ 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0.$$

故 $\lambda E+A$ 正定.

($\Leftarrow$) 对任意的 $\lambda>0$ 及 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}AX\geq 0$. 故 A 半正定.

***11.** 证明: 双线性函数 f 具有正交对称性的充分必要条件是 f 为对称或反称双线性函数.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性.

(1) 如对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则对任意的 $\alpha,\beta\in V$,

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)+f(\beta,\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha).$$

因此 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, f 是反称双线性函数.

(2) 如果存在 $\gamma\in V$ 使 $f(\gamma,\gamma)\neq 0$. 则对任意的 $\alpha\in V$, 由于

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\gamma\right)=f(\alpha,\gamma)-f(\alpha,\gamma)=0,$$

所以 $f\left(\gamma,\alpha-\dfrac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=0$. 因此

$$f(\alpha,\gamma)=f(\gamma,\alpha). \tag{$*$}$$

对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 以下再分两种情况讨论:

(a) 如果 $f(\alpha,\gamma)\neq 0$, 则

$$f\left(\alpha,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)-f(\alpha,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\dfrac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma,\alpha\right)=0$, 从而

$$\begin{aligned}0&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\gamma,\alpha)\\&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\alpha,\gamma)\quad \text{由 (*)}\\&=f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

即 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

(b) 如果 $f(\alpha,\gamma)=0$, 则

$$f\left(\alpha+\gamma,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\dfrac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\alpha+\gamma\right)=0$. 从而

$$f(\beta,\alpha)+f(\beta,\gamma)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0.$$

由 (*) 知 $f(\beta,\gamma)=f(\gamma,\beta)$, 因此 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

由 (a) 和 (b) 可得 f 为对称双线性函数.

*__12.__ 设 V 是复数域上的线性空间, 其维数 $n\geqslant 2$, f 是 V 上的一个对称双线性函数. 证明:

(1) V 中有非零向量 ξ, 使 $f(\xi,\xi)=0$;

(2) 当 f 是非退化时, 必有线性无关的向量 ξ,η, 满足:

$$\begin{aligned}&f(\xi,\eta)=1,\\&f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.\end{aligned}$$

证明: (1) 由于 $\dim V\geq 2$. 任取 V 的两个线性无关的向量 α,β. 如果 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则 $\xi=\alpha$ 即为所求. 现设 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$. 则 2 次方程

$$t^2f(\alpha,\alpha)+2tf(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0 \tag{$*$}$$

在复数范围内有解. 设 $t_0\in\mathbb{C}$ 是 t 的一个解. 令

$$\xi=t_0\alpha+\beta,$$

则 $\xi\neq 0$ (因 α,β 线性无关), 且

$$f(\xi,\xi)=t_0^2f(\alpha,\alpha)+2t_0f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0.$$

从而 $\xi=t_0\alpha+\beta$ 即为所求.

(2) 由 (1) 所证, 存在 $\xi\neq 0\in V$ 使 $f(\xi,\xi)=0$. 又因 f 非退化, 故存在 $\alpha\in V$ 使 $f(\xi,\alpha)\neq 0$.

(a) 如 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则令 $\eta=\dfrac{1}{f(\xi,\alpha)}\alpha$, 即有

$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0,\qquad f(\xi,\eta)=1.$$

(b) 如 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$, 则取

$$\eta=\frac{1}{f(\alpha,\xi)}\alpha-\frac{f(\alpha,\alpha)}{2(f(\alpha,\xi))^2}\xi,$$

直接验证可知 $f(\eta,\eta)=0$, $f(\xi,\eta)=1$, 而 ξ,η 的线性无关性是显然的. 故 ξ,η 即为所求.

***13.** 证明: 如果线性空间 V 上的对称双线性函数 f 能分解为两个线性函数之积:

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V,$$

则存在非零数 λ 及线性函数 g, 使

$$f(\alpha,\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

证明: 如果 $f=0$, 则结论当然成立. 现设 $f\neq 0$. 因此存在 $\alpha_0,\beta_0\in V$, 使得 $f(\alpha_0,\beta_0)\neq 0$. 定义

$$\begin{aligned} g: V &\longrightarrow K \\ \gamma &\longmapsto f(\alpha_0,\gamma) \end{aligned}$$

则 g 为 V 上线性函数, 且 $g\neq 0$. 对任意的 $\beta\in V$,

$$\begin{aligned} g(\beta)&=f(\alpha_0,\beta)=f_1(\alpha_0)f_2(\beta)\\ g(\beta)&=f(\alpha_0,\beta)=f(\beta,\alpha_0)=f_1(\beta)f_2(\alpha_0) \end{aligned}$$

显然 $f_1(\alpha_0)\neq 0$, $f_2(\alpha_0)\neq 0$ (否则 $g\neq 0$). 由此知,

$$\left.\begin{aligned} f_1(\beta)&=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\beta)\\ f_2(\beta)&=\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta) \end{aligned}\right.\qquad \forall\beta\in V.$$

令 $\lambda=\dfrac{1}{f_1(\alpha_0)f_2(\alpha_0)}$, 则

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\alpha)\cdot\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

***14.** 设 A 为半正定矩阵, 证明: A^* 也是半正定矩阵.

证明: 如果 $\operatorname{rank}A=n$, 则 A 是正定矩阵, 习题 7 已证明了 A^* 正定. 如果 $\operatorname{rank}A\leq n-2$, 则 $A^*=0$, 从而 A^* 半正定. 最后考虑 $\operatorname{rank}A=n-1$ 的情形. 此时 $\operatorname{rank}A^*=1$, 从而 A^* 的阶数 ≥ 2 的主子式都是 0, 而 A^* 的 1 阶主子式 $=A_{ii}$ $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的代数余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 $n-1$ 阶主子式 ≥ 0 (因 A 半正定). 所以 A^* 半正定.

***15.** 证明定理 2.12.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 半正定, 则存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},\qquad a_i\neq 0.$$

由于 A 半正定, $T^{\mathrm{T}}AT$ 也半正定, 故 $a_i > 0$. 所以 A 的正惯性指数 $p = r = \operatorname{rank} A$;

(2) $\Rightarrow$ (3) 由假设, 存在可逆实矩阵 T_1, 使

$$T_1^{\mathrm{T}}AT_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i > 0.$$

令

$$T_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{A_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{A_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = T_1T_2,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 由假设, 存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$S = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T,$$

则
$$A = S^{\mathrm{T}}S.$$

(4) ⇒ (1) 对任意的 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 令 $Y = SX$, 则 $Y \in \mathbb{R}^n$. 所以
$$X^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}SX = Y^{\mathrm{T}}Y \geq 0,$$
A 半正定.

(1) ⇒ (5) 设 $B_k = A(i_1, \cdots, i_k; i_1, \cdots, i_k)$ 是 A 的一个主子式. 则对任意的
$$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$
可以作一个列向量 $X \in \mathbb{R}^n$, 使得它的第 i_j 列的元素等于 x_j, 而其余元素均等于 0. 则
$$0 \leq X^{\mathrm{T}}AX = X_k^{\mathrm{T}}B_kX_k,$$
因此 B_r 是半正定的. 根据 (4), 可得半正定矩阵的行列式非负, 即 $|B_k| \geq 0$.

(5) ⇒ (1) 对于任意的正实数 $\lambda > 0$, 考察 $\lambda E + A$ 的 k 阶主子阵 $\lambda E_k + A_k$. 这个子矩阵的行列式为
$$f_k(\lambda) = |\lambda E_k + A_k| = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k.$$
则根据习题 7–3.8, $(-1)^i a_i$ 等于 $-A_k$ 的全部 i 阶主子式之和. 而 $-A_k$ 的每个 i 阶主子式等于 A_k 的相应 i 阶主子式的 $(-1)^i$ 倍. 因此 a_i 等于 A_k 的所有 i 阶主子式之和, 由假设, $a_i \geq 0$. 从而
$$f_k(\lambda) > 0 \qquad \forall \lambda > 0,\ i = 1, \cdots, k.$$
根据定理 2.11, $\lambda E + A$ $(\lambda > 0)$ 是正定矩阵.

任取 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 据正定性, λ 的一次式
$$g(\lambda) = X^{\mathrm{T}}(\lambda E + A)X = \lambda X^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}AX > 0, \qquad \forall \lambda > 0.$$
因此 $X^{\mathrm{T}}AX \geq 0$ (否则当 λ 充分小时会有 $g(\lambda) < 0$), 从而 A 半正定.

***16.** 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵称为幂幺上三角形矩阵.

(1) 设 A 是一个对称矩阵, T 为幂幺上三角形矩阵, 证明: $T^{\mathrm{T}}AT$ 与 A 的对应顺序主子式有相同的值;

(2) 如果对称矩阵的顺序主子式全不为零, 则存在一幂幺上三角形矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形.

证明: (1) 设 A_r 为 A 的 r 阶顺序主子式 $(1 \leq r \leq n)$,

$$A = \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

设 T 为幂幺上三角形矩阵,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{其中} T_{11} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_r,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & T_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}}A_rT_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

从而 $T^{\mathrm{T}}AT$ 的 r 阶顺序主子式等于 (注意到 $|T_{11}| = 1$)

$$|T_{11}^{\mathrm{T}}AT_{11}| = |T_{11}^{\mathrm{T}}||A||T_{11}| = |A_r|.$$

(2) 对 A 的阶数用归纳法. 取

$$T_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{n-1} = A(1, \cdots, n-1; 1, \cdots, n-1),$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

这是幂幺上三角形矩阵. 则

$$\begin{aligned} T_1^{\mathrm{T}}AT_1 &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ -B^{\mathrm{T}}A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B \\ B^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $b_n = a_{nn} - B^{\mathrm{T}}A_{n-1}B$. 由于 A 的顺序主子式全不为 0, 故 A_{n-1} 的顺序主子式全不为 0, 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶幂幺上三角形矩阵 T_2 使

$$T_2^{\mathrm{T}}A_{n-1}T_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 为幂幺上三角形矩阵, 且

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}.$$

§3 二次型

1. 用非退化线性替换化下列二次型为平方和:

(1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(3) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(4) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

(5) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$;

(6) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_4$.

解: (1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{5}{6}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{6}y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(2) 原式 $= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 + \left(\dfrac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = \dfrac{x_2 - x_3}{2} \\ y_3 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(3) 令

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\x_2=y_1+y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

有

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2.$$

(4) 原式 $=2(x_1-3x_2+2x_3)^2+\left(\dfrac{3x_2-x_3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3x_2+x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases}y_1=x_1-3x_2+2x_3\\y_2=\dfrac{3x_2-x_3}{2}\\y_3=\dfrac{3x_2+x_3}{2}\end{cases}\quad 即 \quad\begin{cases}x_1=y_1+3y_2-y_3\\x_2=\dfrac{1}{3}y_2+\dfrac{1}{3}y_3\\x_3=-y_2+y_3\end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(5) 令

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_3-y_4\\x_2=\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4\\x_3=\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{3}{2}y_4\\x_4=y_4\end{cases}$$

则有

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(6) 原式 $=x_1^2+\left(\dfrac{x_2+x_1+x_4}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x_2-x_1-x_4}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=\dfrac{x_2+x_1+x_4}{2}\\y_3=\dfrac{x_2-x_1-x_4}{2}\\y_4=x_3\end{cases}\quad 即 \quad\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_4\\x_4=-y_1+y_2-y_3\end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

2. λ 取何值时, 下列二次型是正定的:

(1) $5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$;

(3) $2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.

解: (1) $A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&\lambda\end{pmatrix}$, 它的顺序主子式 $D_1=5>0$, $D_2=1>0$, $D_3=\lambda-2$. 所以当 $\lambda>2$ 时原二次型正定.

(2) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1=2>0$, $D_2=2-\lambda^2$, $D_3=5-3\lambda^2$.

由 $D_2>0$, 得 $|\lambda|<\sqrt{2}$;

由 $D_3>0$, 得 $|\lambda|<\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

所以当 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<\lambda<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 时原二次型正定.

(3) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1=2$, $D_2=4-\lambda^2$, $D_3=-\lambda^2+6\lambda-16=-(\lambda-3)^2-7<0$, 故不论 λ 取何实数都不能使此二次型正定.

3. 下列二次型是否正定或半正定:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$; (2) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$;

(3) $n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$.

解: (1) 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{pmatrix}$, 它的顺序主子式

$$D_r=|A_r|=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}_r=\frac{1}{2^r}(r+1)>0,\qquad r=1,\cdots,n.$$

故原二次型正定.

(2) 原式 $f=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)^2+\frac{1}{2}x_n^2\geq 0$. 因此 $f=0 \iff x_1=0, x_1+x_2=0, x_2+x_3=0,\cdots,x_{n-1}+x_n=0, x_n=0 \iff x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. 故原二次型正定.

(3) 原式 $=(-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}x_ix_j=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}(x_i-x_j)^2\geq 0$. 取 $x_1=x_2=\cdots=x_n\neq 0$ 可使此二次型取零值. 因此原二次型半正定.

4. 设 A, B, C 为三角形的三个内角, 证明: 对任意实数 x, y, z 有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C.$$

证明: 考察二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2xz\cos B-2yz\cos C$.

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\cos A\cos B-2yz\cos C\\&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\sin A\sin B\\&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+(y\sin A-z\sin B)^2.\end{aligned}$$

从而 f 半正定, 由此知结论成立.

5. 证明: 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型, 则

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&y_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&y_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&y_n\\y_1&y_2&\cdots&y_n&0\end{vmatrix}$$

是负定二次型.

证明: 已知 $\begin{pmatrix}E&0\\-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&Y\\Y^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&Y\\0&-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y\end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned}f(y_1,\cdots,y_n)&=\begin{vmatrix}A&Y\\Y^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&Y\\0&-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y\end{vmatrix}\\&=|A|(-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y.\end{aligned}$$

由 A 正定可得 A^* 正定, 于是 $-A^*$ 负定. 因此 $f(y_1,\cdots,y_n)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y$ 是负定二次型.

*6. 设有实系数二次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}2b_ix_i+c,\qquad a_{ij}=a_{ji}.$$

令

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&b_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n&c\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 当 A 负定时, f 有最大值, 且 $f_{\max}=\dfrac{|D|}{|A|}$;

(2) 设 A 负定, 试确定当 $x_1,\cdots,x_n$ 为何值时, f 取得最大值.

解: (1) 取

$$T=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}B\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

令

$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\\y_{n+1}\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix},\tag{$*$}$$

易知 $y_{n+1}=1$. 则

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_n)&=(x_1\ \cdots\ x_n\ 1)D\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}\\&=(y_1\ \cdots\ y_n\ 1)T^{\mathrm{T}}DT\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= (y_1\ \cdots\ y_n\ 1)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= Y^{\mathrm{T}}AY + d.$$

由于 A 负定, 故对任意的 $Y \in \mathbb{R}^n$ 有 $Y^{\mathrm{T}}AY \leq 0$, 所以 $f \leq d$. 可见 f 有极大值 d, 且当 $Y = 0$ 时 f 取极大值. 这里

$$d = \frac{|A|d}{|A|} = \frac{|T^{\mathrm{T}}DT|}{|A|} = \frac{|D|}{|A|}.$$

(2) 由 (*),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $X = Y - A^{-1}B$. 当 $Y = 0$ 时 $X = -A^{-1}B$, 即当

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

时, f 取最大值.

7. 某工厂生产 A 种产品 x (百) 个和 B 种产品 y (百) 个的总成本函数为:

$$C(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 100\,(\text{万元}).$$

甲乙两种产品的需求函数为:

$$x = 26 - p_A, \quad y = 10 - \frac{1}{4}p_B,$$

其中 p_A, p_B 为产品相应的售价 (万元/百个). 求利润最大时产品的数量和利润.

解: 据题意, 利润函数为

$$\begin{aligned} p(x, y) &= xp_a + yp_b - C(x, y) \\ &= x(26 - x) + y(40 - 4y) - C(x, y) \end{aligned}$$

$$= -2x^2 - 2xy - 5y^2 + 26x + 40y - 100.$$

本题就是求二次函数的最大值. 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 13 \\ -1 & -5 & 20 \\ 13 & 20 & -100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

这里 A 是负定矩阵. 根据习题 7, 当

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -A^{-1}B = -A^{-1}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

时, 利润最大, 且最大利润为

$$p_{\max} = \frac{|D|}{|A|} = 25 \text{ 万元}.$$

故当两种产品分别售出 500 个与 300 个时, 可获最大利润 25 万元.

§4　对称变换及其典范形

1. 求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角形, 设 A 为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $T = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&-2\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

(3) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

(4) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$.

(5) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$.

(6) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 设 A 为一个 n 阶实矩阵, 且 $|A|\neq 0$. 证明: A 可分解成

$$A=QT,$$

其中 Q 是正交矩阵, T 是上三角形矩阵.

证明: 取 n 维欧几里得空间 V, 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是它的一个规范正交基. 令

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A \tag{$*$}$$

由于 $|A|\neq 0$, A 可逆, 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基. 应用格拉姆–施密特正交化方法, 可得 V 的一个规范正交基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. 令

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T,$$

由第六章定理 3.4 的证明可知, T 为上三角形矩阵. 令

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q,$$

则 Q 为正交矩阵. 且

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T=(\eta_1,\cdots,\eta_n)QT,$$

与 (*) 比较, 得 $A=QT$.

3. 设 A 为一个 n 阶正定矩阵, 证明: 存在上三角形矩阵 T, 使

$$A=T^{\mathrm{T}}T.$$

证明: 由 A 正定可知存在可逆实矩阵 B 使得 $A=B^{\mathrm{T}}B$. 由上题, 存在正交矩阵 Q 与上三角形矩阵 T, 使得

$$B=QT.$$

从而

$$A=B^{\mathrm{T}}B=T^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QT=T^{\mathrm{T}}T.$$

4. 设 A 为实对称矩阵, 证明: A 正定 (半正定) 的充分必要条件是 A 的特征值全大于 (大于等于) 零.

证明: 存在正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 于是 A 正定 (半正定) $\Longleftrightarrow$ $T^{\mathrm{T}}AT$ 正定 (半正定) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i>0\ (\lambda_i\geq 0),\ i=1,\cdots,n$.

5. 证明: 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式.

证明: 必要性显然. 下证充分性. 设实对称矩阵 A,B 有相同的特征多项式, 从而它们有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 于是存在正交矩阵 T 与 Q, 使得

$$T^{-1}AT=T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}BQ=Q^{\mathrm{T}}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

显然 A 与 B 相似.

6. 设 A 为 n 阶实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为三角形矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是实数.

证明: ($\Rightarrow$) 设有正交矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 恰为 A 的 n 个特征值. 由于 A,T 均为实矩阵, $T^{-1}AT$ 也是实矩阵, 故特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是实数.

($\Leftarrow$) 对 n 用归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 现在假设结论对 $n-1$ 阶满足条件的实矩阵成立. 考察 n 阶实矩阵 A.

设 V 为 n 维欧几里得空间, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的规范正交基. 令 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$, 使得

$$(\mathscr{A}\eta_1,\cdots,\mathscr{A}\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A.$$

设 $\lambda_1\in\mathbb{R}$ 为 $\mathscr{A}$ 的任意特征值, 则 λ_1 也是 $\mathscr{A}$ 的特征值. 令 α_1 为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量, 则 α_1 可扩充为 V 的规范正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 令

$$(\mathscr{A}\alpha_1,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & \\ \vdots & A_1\\ 0 & \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)T_1,$$

则 T_1 为正交矩阵, 且

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}=T_1^{-1}AT_1.$$

易知 A_1 为 $n-1$ 阶实矩阵, 且其特征值全是 A 的特征值, 从而也都是实数. 由归纳假设, 存在正交矩阵 T_2, 使

$$T_2^{-1}A_1T_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则 T 为正交矩阵, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由归纳法原理知结论成立.

7. 证明: 特征值全是实数的正交阵必是对称矩阵.

证明: 设 A 为特征值全是实数的正交阵, 由上题, 存在正交矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = T^{-1}AT = D$$

为上三角形阵. 又因为 D 是正交阵, 故 $D^{-1} = D^{\mathrm{T}}$ 也是上三角形矩阵, 但它又是下三角形阵, 故 D 是对角阵. 从而 D 为对称矩阵. 故

$$A = TDT^{\mathrm{T}}$$

也为对称矩阵.

***8.** 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且 B 正定, 证明: 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT \ \text{与} T^{\mathrm{T}}BT$$

同时为对角形.

证明: 由于 B 正定, 因此存在可逆矩阵 S 使得

$$S^{\mathrm{T}}BS = E.$$

而 $S^{\mathrm{T}}AS$ 仍为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q 使 $D = Q^{\mathrm{T}}(S^{\mathrm{T}}AS)Q$ 为对角阵. 令 $T = SQ$, 则 T 可逆, 且

$$T^{\mathrm{T}}AT = D, \qquad T^{\mathrm{T}}BT = E,$$

均为对角阵.

***9.** 设 A 为正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵 B, 使 $B^2 = A$.

证明: 存在正交阵 T, 使

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T.$$

因为 A 正定, 故 $\lambda_i > 0$. 令

$$B = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} T,$$

则 B 正定, 且

$$B^2 = A.$$

***10.** 设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 n 阶正定 (半正定) 矩阵, 令 $C = (a_{ij}b_{ij})$, 证明: C 也是正定 (半正定) 矩阵.

证明: 存在实矩阵 P, 使

$$P^{\mathrm{T}}P = B.$$

记 $P = (p_{ij})$, 则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}.$$

于是对任意的 $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}CX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\right)x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)\right). \end{aligned}$$

由于 A 正定 (半正定), 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j) \geq 0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}CX \geq 0$, 故 C 半正定. 又若 A 与 B 皆正定, 则 P 可逆. 令 $X^{\mathrm{T}}CX \geq 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j) = 0,$$

而 A 正定, 故

$$p_{k1}x_1 = p_{k2}x_2 = \cdots = p_{kn}x_n = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

又因 P 可逆, P 的任何一列上的元素不可能全为零. 若

$$p_{i_j j} \neq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $x_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 故由 $X^{\mathrm{T}}CX = 0$ 可推出 $X = 0$, 从而 C 正定.

*§5 反称双线性函数

1. 证明: 实反称矩阵的特征值全是零或纯虚数.

证明: 设 A 为实反称矩阵, λ 是 A 的一个特征值. 易知 $-\lambda^2$ 是 $-A^2$ 的一个特征值. 而 $-A^2 = A^{\mathrm{T}}A$, 故 $-A^2$ 半正定, 可知 $-\lambda^2 \leq 0$ (习题 9–4.4), 从而 λ 为零或纯虚数.

2. 证明: 如果 A 是一个实反称矩阵, 则 $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ 是一个正交矩阵.

证明: 由上题知, $E + A$ 可逆, 从而

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{T}}B &= [(E - A)(E + A)^{-1}]^{\mathrm{T}}[(E - A)(E + A)^{-1}] \\ &= (E - A)^{-1}(E + A)(E - A)(E + A)^{-1} \\ &= (E - A)^{-1}(E - A)(E + A)(E + A)^{-1} = E, \end{aligned}$$

故 B 是正交矩阵.

***3.** 设 f 是 n 维欧几里得空间 V 的非零反称双线性函数. 证明: 存在非零向量 $\alpha, \beta \in V$ 及 $a > 0$, 使得对任意的 $\xi \in V$ 有

$$f(\alpha, \xi) = a(\beta, \xi), \quad f(\beta, \xi) = -a(\alpha, \xi).$$

证明: 设 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 V 的一个规范正交基, f 在此基下的度量矩阵为 A, 则 A 为实反称矩阵, 且对任意的 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\eta_i$, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\eta_i$, 有

$$f(\xi, \eta) = X^{\mathrm{T}}AY.$$

因 A 是实反称矩阵, 故 $A^{\mathrm{T}}A$ 为半正定矩阵. 而 $f \neq 0$, 故 $A \neq 0$, 从而 $A^{\mathrm{T}}A \neq 0$, 所以 $A^{\mathrm{T}}A$ 有非零特征值. 任取 $A^{\mathrm{T}}A$ 的一个非零特征值 λ, 则 $\lambda > 0$. 令 $a = \sqrt{\lambda}$. 设

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 设

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\eta_i,$$

则 $\alpha \neq 0$.下证 α, β, a 满足要求.

对任意的 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\eta_i$, 有

$$\begin{aligned} f(\alpha,\xi) &= (a_1 \ \cdots \ a_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\left[A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= a(b_1 \ \cdots \ b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a(\beta,\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\beta,\xi) &= (b_1 \ \cdots \ b_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(a_1 \ \cdots \ a_n)A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{a}\left[A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -a(a_1 \ \cdots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= -a(\alpha,\xi), \end{aligned}$$

又 $f(\beta,\alpha)=-a(\alpha,\alpha)\neq 0$, 所以 $\beta\neq 0$.

*4. 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的反称双线性函数.

证明: 存在规范正交基$\eta_1,\xi_1,\eta_2,\xi_2,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$, 使 f 关于这个基的度量矩阵具有如下分块矩阵的形式:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right),\quad a_i>0.$$

证明: 对 V 的维数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $f=0$, 结论显然成立. 现假设结论对 $m<n$ 都成立, 证明当 $\dim V=n$ 也成立.

如 $f=0$, 结论显然成立. 如 $f\neq 0$, 由习题 3, 存在非零向量 η_1,ξ_1 及数 $a_1>0$, 使对任意的 $\xi\in V$ 有

$$f(\eta_1,\xi)=a_1(\xi_1,\xi),\qquad f(\xi_1,\xi)=-a_1(\eta_1,\xi).$$

由于 η_1,ξ_1 的任一倍数 $k\eta_1,k\xi_1$ 也满足上述等式, 故可设 η_1,ξ_1 都是 V 中单位向量.

又, $0=f(\xi_1,\xi_1)=-a(\eta_1,\xi_1)$, 故 η_1,ξ_1 正交, 从而 η_1,ξ_1 为 V 的规范正交向量组.

令

$$L=L(\eta_1,\xi_1),\qquad W=L^{\perp},$$

则 $V=L\perp W$, $\dim L=2$, $\dim W=n-2$. f 可看作是 W 上的反称双线性函数. 由归纳假设, 存在 W 的规范正交基

$$\eta_2,\xi_2,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$$

及 $a_i>0$, $i=2,\cdots,r$, 使 $f|_W$ 关于这个基的度量矩阵为分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_2\\ -a_2 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right).$$

易知 $\eta_1,\xi_1,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$ 构成 V 的规范正交基. 由于当 $i\geq 2$ 时有

$$f(\eta_1,\xi_i)=a(\xi_1,\xi_i)=0,\qquad f(\eta_1,\eta_i)=a(\xi_1,\eta_i)=0,$$

$$f(\xi_1,\xi_i)=-a(\eta_1,\xi_i)=0,\qquad f(\xi_1,\eta_i)=-a(\eta_1,\eta_i)=0,$$

因而 f 在基 $\eta_1,\xi_1,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$ 下的度量矩阵为

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right).$$

从而由数学归纳法原理知结论成立.

*§6 酉空间

1. 设酉矩阵

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4+3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i}\\ -4\mathrm{i} & 4-3\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i}\\ 6+2\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i} & 1\end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B=U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\mathrm{i}$, $\lambda_3=-\mathrm{i}$. 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\alpha_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\alpha_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

令

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B=U^{-1}AU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

2. 设埃尔米特矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B = U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. 属于特征值 2 的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

属于特征值 4 的特征向量为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 证明: 上三角形的酉矩阵必为对角矩阵, 而且对角元的模为 1.

证明: 设 A 是上三角形的酉矩阵, 则有 $A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$. 而上三角形矩阵的逆矩阵仍是上三角形矩阵, 但它的转置矩阵则是下三角形矩阵. 因此 A 必须是对角矩阵. 设 $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, 由 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = \mathrm{diag}(|a_1|^2, \cdots, |a_n|^2) = E$ 可得 $|a_i| = 1$, $i = 1, \cdots, n$.

4. 证明: 酉矩阵的特征值的模为 1.

证明: 设 λ_0 为酉矩阵 A 任一特征值,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

为 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量. 则

$$A\alpha = \lambda_0\alpha.$$

从而

$$\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}(\overline{A}^{\mathrm{T}}A)\alpha = (\overline{A\alpha})^{\mathrm{T}}(A\alpha) = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_0\alpha = \overline{\lambda_0}\lambda_0\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha,$$

由于 $\alpha \neq 0$, $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha > 0$, 故 $\overline{\lambda_0}\lambda_0 = 1$.

5. 设 A 为一个可逆复矩阵, 证明: A 可分解为

$$A = UT,$$

其中, U 是酉矩阵, T 是一个对角线上元素全为正实数的上三角形矩阵. 并证明这个分解是唯一的.

证明: (a) 首先用归纳法证明:

如 B 为一 $n \times r$ 列满秩矩阵, 则存在对角线上元素全为正的 r 阶上三角形阵 T, 使 $C = BT$ 的列向量组为 $\mathbb{C}^n$ 中单位正交向量组.

对 r 用归纳法. 当 $r = 1$ 时结论显然成立. 现假定结论对列数 $< r$ 的列满秩矩阵成立. 考察 $n \times r$ 列满秩矩阵.

设 B 的列为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关. 令 $a_1 = \dfrac{1}{|\alpha_1|}$, $a_{1i} = -\dfrac{(\alpha_i, \alpha_1)}{|\alpha_1|}$, $i = 2, \cdots, r$,

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = BT_1 = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r),$$

则 C_1 仍为列满秩, 且

$$|\beta_1| = 1, \qquad (\beta_1, \beta_i) = 0, \quad i = 2, \cdots, r.$$

令

$$B_1 = (\beta_2, \cdots, \beta_r).$$

则 B_1 为 $n \times (r-1)$ 的列满秩矩阵, 由归纳法假设, 存在 $r-1$ 阶上三角形矩阵

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}, \qquad a_i > 0, \quad i \geq 2,$$

使 B_1T_2 的列向量为单位正交向量组. 令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

为上三角形的, 且 $a_i > 0$. 令 $C = BT = (\beta_1 \mid B_1T_1)$, 则 C 的各列都是单位向量, 又因 β_1 与 B_1 的各列正交, 而 B_1T 的各列为 B_1 的线性组合, 故 C 的列向量组为单位正交向量组.

(b) 设 A 为 n 阶可逆复矩阵, 则由 (a) 知, 存在对角线上元素全为正的上三角形矩阵 S, 使 AS 的列向量组为单位正交向量组. 从而

$$U = AS$$

为酉矩阵. 令 $T = S^{-1}$, 则 T 为上三角形矩阵, 又因 S 的对角线上元素全正, 故 T 的对角线上元素全正, 且

$$A = UT.$$

(c) 设另有酉矩阵 U_1 及对角线上元素全正的上三角形矩阵 T_1, 使 $A = U_1T_1$. 则

$$UT = U_1T_1,$$

从而

$$TT_1^{-1} = U^{-1}U_1.$$

上式左边是上三角形阵, 右边为正交阵, 从而 $U^{-1}U_1$ 为对角阵. 又因此矩阵的对角线上元素全正, 故 $U^{-1}U_1=E$. 于是

$$U=U_1, \qquad T=T_1.$$

唯一性得证.

6. 证明: 对任一复矩阵 A, 必存在酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为上三角形矩阵.

证明: 对 A 的阶数 n 用归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 现假定结论对阶数小于 n 的矩阵成立. 考察 n 阶矩阵 A.

设 λ_1 为 A 的任一特征值, $\alpha_1\in\mathbb{C}^n$ 为 A 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量. 将 α_1 扩充为酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 令

$$U_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

则 U_1 为酉矩阵, 且

$$AU_1=U_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

则

$$U_1^{-1}AU_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶酉矩阵 U_2, 使

$$U_2^{-1}A_1U_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令

$$U=U_1\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & U_2\end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

7. 证明: 对任一酉矩阵 A, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角阵.

证明: 由上题, 存在酉矩阵 U 使

$$U^{-1}AU = B$$

为上三角形矩阵. 因上式左边为酉矩阵, 故 B 为酉矩阵. 于是 B 既是酉矩阵又是上三角形矩阵, 必为对角阵.

8. 证明: 埃尔米特矩阵的特征值全是实数, 且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明: (a) 设 λ 为埃尔米特矩阵 H 的一个特征值, $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 为 H 的属于特征值 λ 的特征向量. 则

$$\lambda\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}A\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha.$$

由于 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha > 0$, 所以 $\lambda = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) 设 α, β 分别为 H 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则

$$\lambda_2\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}A\beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}\beta = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = \lambda_1\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta.$$

(注意: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$) 于是 $(\lambda_1 - \lambda_2)\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = 0$. 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = 0$, 即 $\alpha \perp \beta$.

9. 证明: 对任一埃尔米特矩阵 H, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}HU$ 为对角形.

证明: 由习题 6, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}HU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\overline{T}^{\mathrm{T}} = \overline{(U^{-1}HU)}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}}HU}^{\mathrm{T}} = \overline{U}^{\mathrm{T}}HU = U^{-1}HU = T.$$

因此 T 是对角阵.

*__10.__ 设 A 为复矩阵, 如果 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = A\overline{A}^{\mathrm{T}}$, 则称 A 为规范方阵. 证明: 对任一规范方阵, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角形.

证明: 由习题 6, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}AU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\begin{aligned}\overline{T}^{\mathrm{T}}T &= \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} \cdot U^{-1}AU = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}}AU}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{U}^{\mathrm{T}}AU \\ &= \overline{U}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}AU = \overline{U}^{\mathrm{T}}A\overline{A}^{\mathrm{T}}U \\ &= U^{-1}AU \cdot \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} = T\overline{T}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

因此 T 也是规范方阵. 由矩阵的乘法容易证明: 上三角形的规范方阵必为对角阵, 因此结论成立.

*§7 对偶空间

1. 在 K^3 中, 求基 $(1,0,2)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ 的对偶基.

解: 设 K^3 的自然基为 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, f_1,f_2,f_3 为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的对偶基, g_1,g_2,g_3 为 $\alpha_1=(1,0,2)$, $\alpha_2=(1,2,1)$, $\alpha_3=(0,2,1)$ 的对偶基, 令 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

由命题 7.1 知,

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)A^{-\mathrm{T}},$$

这里

$$A^{-\mathrm{T}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&-4\\-1&1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}.$$

因此对任意的 $\alpha=(x,y,z)\in K^3$, 有

$$\begin{aligned}g_1(x,y,z)&=\frac{1}{4}(-f_2+2f_3)(x,y,z)=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z,\\g_2(x,y,z)&=\frac{1}{4}(4f_1+f_2-2f_3)(x,y,z)=x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z,\\g_3(x,y,z)&=\frac{1}{4}(-4f_1+f_2+2f_3)(x,y,z)=-x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z.\end{aligned}$$

2. 设 η_1,η_2,η_3 是线性空间 V 的一个基, f_1,f_2,f_3 是它的对偶基,

$$\alpha_1=\eta_1+2\eta_2+3\eta_2,\ \alpha_2=\eta_1+\eta_2-\eta_3,\ \alpha_3=\eta_1+\eta_2.$$

试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个基并求其对偶基 (用 f_1,f_2,f_3 表出).

解: 设

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A,$$

则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&-1&0\end{pmatrix}.$$

易知 A 可逆, 且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&3&-1\\5&-4&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一个基. 设 f_1',f_2',f_3' 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基, 令

$$(f_1',f_2',f_3')=(f_1,f_2,f_3)S,$$

则由命题 7.1 得

$$S=A^{-\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&-3&5\\1&3&-4\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(f_1',f_2',f_3')=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}-1&-3&5\\1&3&-4\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

3. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1,\cdots,f_s$ 是 V 的 s 个线性函数. 集合

$$W=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,i=1,\cdots,s\}.$$

证明: (1) W 是 V 的一个线性子空间 (称为线性函数 $f_1,\cdots,f_s$ 的零化子空间);

(2) V 的任意线性子空间都是某些线性函数的零化子空间.

证明: (1) 由 $f_i(0)=0$, $i=1,\cdots,s$, 得 $0\in W$, W 非空. 设 $\alpha,\beta\in W$, $k\in K$, 则对 $i=1,\cdots,s$,

$$f_i(\alpha+\beta)=f_i(\alpha)+f_i(\beta)=0,$$

$$f_i(k\alpha)=kf_i(\alpha)=0,$$

所以 $\alpha+\beta\in W$, $k\alpha\in W$, W 是 V 的线性子空间.

(2) 设 W 为 V 的一个线性子空间. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 W 的基, 将它扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 对任意的

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+x_n\alpha_n,$$

定义

$$f_1(\alpha)=x_{r+1},f_2(\alpha)=x_{r+2},\cdots f_{n-r}(\alpha)=x_{r+n},$$

则易知 $f_1,\cdots,f_{n-r}$ 都是 V 的线性函数. 显然对任意的 $\alpha\in W$ 有 $f_i(\alpha)=0$, $i=1,\cdots,n-r$. 又若 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$ 满足

$$f_i(\alpha)=0,\qquad i=1,\cdots,n-r,$$

则有 $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$, 从而

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r \in W.$$

因此 W 是 $f_1, \cdots, f_{n-r}$ 的零化子空间.

4. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的非零线性函数, 证明: 存在 V 的基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$, 使

$$\forall \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i,\ \text{都有} f(\alpha) = x_1.$$

证明: 由于 f 非零, 故存在 $\gamma \in V$ 使得

$$f(\gamma) = c \neq 0 \in K.$$

令 $\alpha = \dfrac{\gamma}{c}$, 则 $\alpha \neq 0$, 且 $f(\alpha) = 1$. 将 α 扩充为 V 的基 $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 令

$\eta_1 = \alpha_1, \eta_2 = \alpha_2 - f(\alpha_2)\alpha_1, \cdots, \eta_i = \alpha_i - f(\alpha_i)\alpha_1, \cdots, \eta_n = \alpha_n - f(\alpha_n)\alpha_1$,

则 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 也是 V 的基, 且

$$f(\eta_1) = 1, \quad f(\eta_i) = 0, \quad i = 2, \cdots, n.$$

从而对任意的 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\eta_i$, 有

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\eta_i) = x_1.$$

5. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 V 的基. $f_1, \cdots, f_n$ 为 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 的对偶基.

(1) 证明: 对 V 的任一线性函数 f, $f\mathscr{A}$ 仍是 V 的线性函数;

(2) 定义 V^* 到自身的映射 $\mathscr{A}^*$ 为:

$$\mathscr{A}^* : f \longmapsto f\mathscr{A}$$

证明: $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换;

(3) 如 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵是 A, 试求 $\mathscr{A}^*$ 在基 $f_1, \cdots, f_n$ 下的矩阵.

证明: (1) 显然 $f\mathscr{A}$ 是 V 到 K 的映射. 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $k \in K$, 有

$$(f\mathscr{A})(\alpha + \beta) = f(\mathscr{A}(\alpha + \beta)) = f(\mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta) = f(\mathscr{A}\alpha) + f(\mathscr{A}\beta)$$

$$= (f\mathscr{A})(\alpha) + (f\mathscr{A})(\beta),$$

$$(f\mathscr{A})(k\alpha) = f(\mathscr{A}(k\alpha)) = f(k\mathscr{A}\alpha) = kf(\mathscr{A}\alpha) = k(f\mathscr{A})(\alpha),$$

所以 $f\mathscr{A}$ 是 V 上的线性函数.

(2) 由 (1) 知, $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的一个变换. 对任意的 $f, g \in V^*$, $k \in K$, $\alpha \in V$, 有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*(f+g))(\alpha) &= (f+g)(\mathscr{A}\alpha) = f(\mathscr{A}\alpha) + g(\mathscr{A}\alpha)\\ &= (f\mathscr{A})(\alpha) + (g\mathscr{A})(\alpha) = (\mathscr{A}^*f)(\alpha) + (\mathscr{A}^*g)(\alpha),\end{aligned}$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(f+g) = \mathscr{A}^*f + \mathscr{A}^*g.$$

又由

$$(\mathscr{A}^*(kf))(\alpha) = (kf)(\mathscr{A}\alpha) = k(f\mathscr{A})(\alpha) = k(\mathscr{A}^*f)(\alpha),$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(kf) = k\mathscr{A}^*f.$$

因此 $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换.

(3) 由已知,

$$(\mathscr{A}\eta_1, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)A,$$

设

$$(\mathscr{A}^*f_1, \cdots, \mathscr{A}^*f_n) = (f_1, \cdots, f_n)S,$$

则

$$\mathscr{A}^*f_j = \sum_{k=1}^n s_{kj}f_k, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

从而

$$(\mathscr{A}^*f_j)(\eta_i) = \sum_{k=1}^n s_{kj}f_k(\eta_i) = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*f_j)(\eta_i) &= f_j(\mathscr{A}\eta_i) = f_j\left(\sum_{l=1}^n a_{lj}\eta_l\right)\\ &= \sum_{l=1}^n a_{lj}f_j(\eta_l) = a_{ji}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.\end{aligned}$$

于是

$$a_{ji} = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

由此得

$$S = A^{\mathrm{T}}.$$

6. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1, \cdots, f_s$ 是 V 的 s 个非零线性函数, 证明: 存在向量 $\alpha \in V$, 使

$$f_i(\alpha) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 设

$$W_i = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

则 W_i 是 V 的子空间, 又因为 $f_i \neq 0$, $W_i \neq V$. 令

$$W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s,$$

则 W 不是 V 的线性子空间 (第三章习题 3–4.5). 因此 $W \neq V$. 又 $W \subset V$, 必有 $\alpha \in V$, $\alpha \notin W$, 于是对所有的 $i = 1, \cdots, s$ 有 $\alpha \notin W_i$, 即 $f_i(\alpha) \neq 0$.

7. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性空间 V 中的 s 个非零向量, 证明: 存在 V 上的线性函数 f, 使

$$f(\alpha_i) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 考察对偶空间 V^*, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可看作 V^* 上的 s 个线性函数, 故由上题, 存在 $f \in V^*$, 使

$$\alpha_i^*(f) = f(\alpha_i) \neq 0, \qquad i = 1, \cdots, s.$$