第八章　线性变换

§1　线性空间的基变换与坐标变换

1. 设 V 为 n 维线性空间, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 为 V 的一个基.

$\alpha_1 = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$, $\alpha_2 = \eta_2 + \cdots + \eta_n$, $\cdots$, $\alpha_n = \eta_n$

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一个基;

(2) 求由基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵;

(3) 设 α 在基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

解: (1), (2) 因为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

设

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的基, 且由基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 T.

(3) 设

$$\alpha = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

则

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},$$

所以 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1})$.

2. 在 K^4 中, 求由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 α 在指定基下的坐标.

(1) $\xi_1=(1,0,0,0),\xi_2=(0,1,0,0),\xi_3=(0,0,1,0),\xi_4=(0,0,0,1)$;
$\eta_1=(2,1,-1,1),\eta_2=(0,-1,1,0),\eta_3=(-1,-1,2,1),\eta_4=(2,1,1,3)$;
$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标;

(2) $\xi_1=(1,2,-1,0),\xi_2=(1,-1,1,1),\xi_3=(-1,2,1,1),\xi_4=(-1,-1,0,1)$;
$\eta_1=(2,1,0,1),\eta_2=(0,1,2,2),\eta_3=(-3,-1,-1,1),\ \eta_4=(1,3,1,2)$;
$\alpha=(1,0,0,0)$ 在 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标;

(3) $\xi_1=(1,1,1,1),\xi_2=(1,1,-1,-1),\xi_3=(1,-1,1,-1),\xi_4=(1,-1,-1,1)$;
$\eta_1=(1,1,0,1),\eta_2=(2,1,2,1),\eta_3=(1,1,1,0),\eta_4=(0,1,-1,-1)$;
$\alpha=(1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

解: (1) $T=\begin{pmatrix}2&0&-1&2\\1&-1&-1&1\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-5&-5&4\\2&0&2&-2\\-2&-4&-4&4\\1&3&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-x_1-5x_2-5x_3+4x_4\\2x_1+2x_3-2x_4\\-2x_1-4x_2-4x_3+4x_4\\x_1+3x_2+3x_3-2x_4\end{pmatrix}.$$

(2) $T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}$, α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标为 $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

(3) $T=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&6&3&-1\\1&0&1&3\\-1&2&1&-1\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}$, ξ在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\3\end{pmatrix}$.

3. 继上题 (2), 求一向量, 它在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标是在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标的 2 倍.

解: $(0,4,2,6)$.

4. 设 $K[x]_n$ 表示系数在数域 K 中次数小于 n 的多项式组成的线性空间.

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $a_i\in K$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为互不相同的数.

(1) 证明: $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 组成 $K[x]_n$ 的一个基;

(2) 取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为全体 n 次单位根 $1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$, 求由基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的过渡矩阵.

解: (1) 只要证 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关即可. 设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0,$$

分别以 $x=a_i$ 代入上式, 得

$$k_if_i(a_i)=0.$$

因为 $f_i(a_i)\neq 0$, 所以 $k_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 故 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关. 又因 $\dim K[x]_n=n$, 可知 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的基.

(2) 设全部 n 次单位根是 $1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$. 则

$$f_i(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_i}=\frac{x^n-\varepsilon_i^n}{x-\varepsilon_i}=x^{n-1}+\varepsilon_ix^{n-2}+\varepsilon_i^2x^{n-3}+\cdots+\varepsilon_i^{n-1},$$

故所求过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&\varepsilon_1^{n-1}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\1&\varepsilon_1^{n-2}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

5. 定义整系数多项式

$$\langle x\rangle^0=1,\langle x\rangle=x,\langle x\rangle^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),\quad k>1$$

(1) 求 $K[x]_5$ 中由基 $1,\langle x\rangle,\langle x\rangle^2,\langle x\rangle^3,\langle x\rangle^4$ 到基 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $K[x]_5$ 中多项式 $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ 在基 $1,\langle x\rangle,\langle x\rangle^2,\langle x\rangle^3,\langle x\rangle^4$ 下的坐标;

*(3) 证明: $\displaystyle\sum_{x=0}^{n}\langle x\rangle^k=\frac{1}{k+1}\langle n+1\rangle^{k+1}$;

*(4) 由此导出数列 $D_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^4$ 的通项公式.

解: (1) $1=1$

$$\begin{aligned}
x &= \langle x\rangle\\
x^2 &= 0+x+x(x-1)=0+\langle x\rangle+\langle x\rangle^2\\
x^3 &= x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=\langle x\rangle+3\langle x\rangle^2+\langle x\rangle^3\\
x^4 &= \langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4
\end{aligned}$$

故所求过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&3&7\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) $(1,4,11,7,1)$.

(3) 易知 $\langle x+1\rangle^{k+1}-\langle x\rangle^{k+1}=(k+1)\langle x\rangle^k$. 所以

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n}\langle x\rangle^k &= \frac{1}{k+1}\sum_{x=0}^{n}[\langle x+1\rangle^{k+1}-\langle x\rangle^{k+1}]\\
&= \frac{1}{k+1}\left[\sum_{x=1}^{n+1}\langle x\rangle^{k+1}-\sum_{x=0}^{n}\langle x\rangle^{k+1}\right]\\
&= \frac{1}{k+1}(\langle n+1\rangle^{k+1}-\langle 0\rangle^{k+1})\\
&= \frac{1}{k+1}\langle n+1\rangle^{k+1}.
\end{aligned}$$

(4) 因为 $x^4=\langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4$, 所以

$$\begin{aligned}
D_n=\sum_{x=0}^{n}x^4 &= \sum_{x=0}^{n}\left(\langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4\right)\\
&= \frac{1}{2}\langle n+1\rangle^2+\frac{7}{3}\langle n+1\rangle^3+\frac{6}{4}\langle n+1\rangle^4+\frac{1}{5}\langle n+1\rangle^5\\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).
\end{aligned}$$

§ 2 基变换对线性变换矩阵的影响

1. 给定 K^3 的两个基:

$$\begin{aligned}
&\xi_1=(1,1,-1), \quad &\eta_1=(1,-1,2),\\
&\xi_2=(1,0,-1), \quad &\eta_2=(2,-1,2),\\
&\xi_3=(1,1,1), \quad &\eta_3=(-2,1,1).
\end{aligned}$$

设 $\mathscr{A}$ 为 K^3 的线性变换, 使:

$$\mathscr{A}\xi_i=\eta_i \quad i=1,2,3.$$

(1) 求由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵;
(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的矩阵;
(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵;
(4) 设 $\alpha=(2,-1,3)$, 分别求 $\mathscr{A}\alpha$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与基 η_1,η_2,η_3 下的坐标.

解: 设 K^3 标准基为 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, 令

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&-1&1\\2&2&1\end{pmatrix},$$

则有

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B, \qquad (\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C.$$

(1) 由于 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)B^{-1}C$, 故由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$T=B^{-1}C=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&-3&\frac{3}{2}\\2&3&-3\\\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $(\mathscr{A}(\xi_1),\mathscr{A}(\xi_2),\mathscr{A}(\xi_3))=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)B^{-1}C$, 故 $\mathscr{A}$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的矩阵为

$$A=B^{-1}C=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&-3&\frac{3}{2}\\2&3&-3\\\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(3) 设 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 A', 则

$$A' = T^{-1}AT = (B^{-1}C)^{-1}(B^{-1}C)(B^{-1}C) = B^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与基 η_1,η_2,η_3 下的坐标分别为

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ 与 } C^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

因此 $\mathscr{A}\alpha$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的坐标为

$$AB^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\mathscr{A}\alpha$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标为

$$A'C^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A \sim C$, $B \sim D$, 证明:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证明: 存在可逆矩阵 T_1, T_2, 使得

$$T_1^{-1}AT_1 = C, \qquad T_2^{-1}BT_2 = D,$$

因此 $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} T_1^{-1}AT_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}BT_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 可逆, 证明: AB 与 BA 相似.

证明: 由于 $A^{-1}(AB)A = BA$, 故 $AB \sim BA$.

4. 设 A 可逆, 且 $A \sim B$, 证明: B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

证明: 由于 T, A 皆可逆, 所以 B 可逆, 且

$$B^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1}T,$$

故 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

5. 设 $A \sim B$, 证明: $A^{\mathrm{T}} \sim B^{\mathrm{T}}$.

证明: 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$. 故 $B^{\mathrm{T}} = (T^{-1}AT)^{\mathrm{T}} = T^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}T^{-\mathrm{T}}$.

6. 设 $A \sim B$, $f(x) \in K[x]$, 证明: $f(A) \sim f(B)$.

证明: 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$. 故

$$T^{-1}(f(A))T = f(T^{-1}AT) = f(B).$$

7. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

其中 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列.

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基. $\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathscr{A}\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_i,$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列, 因此 $\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_n}$ 仍为 V 的基, 而

$$\mathscr{A}\varepsilon_{i_j} = \lambda_{i_j}\varepsilon_{i_j}, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

从而 $A\sim B$.

8. 设 $x,y,z\in K$, 令

$$A=\begin{pmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}z & x & y\\ x & y & z\\ y & z & x\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}y & z & x\\ z & x & y\\ x & y & z\end{pmatrix}.$$

证明: A,B,C 彼此相似.

证明: 取置换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

则 P,Q 皆可逆, 且

$$P^{-1}AP=C,\qquad Q^{-1}AQ=B,$$

所以 $A\sim B$, $A\sim C$. 由相似关系的传递性, 可得 $B\sim C$.

***9.** 证明:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_n \sim \begin{pmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基. $\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathscr{A}\varepsilon_i=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_n.$$

又易知

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n,\quad \alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_n=\varepsilon_1-\varepsilon_n$$

仍为 V 的基, 且 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $A\sim B$.

§ 3 线性变换的特征值与特征向量

1. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量, 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵是:

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $(a\neq 0)$;

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(5) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (6) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

(7) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

解: 数字表示特征值, 紧接在后的向量就是相应的一个特征向量.

(1) 7, $(1,1)$; -2, $(5,-4)$.

(2) $a\mathrm{i}$, $(1,\mathrm{i})$; $-a\mathrm{i}$, $(\mathrm{i},1)$.

(3) 2, $k(1,1,0,0)+l(1,0,1,0)+m(1,0,0,1)$; -2, $(-1,1,1,1)$.

(4) 2, $(-2,1,0)$; $1+\sqrt{3}$, $(-3,1,-2+\sqrt{3})$; $1-\sqrt{3}$, $(-3,1,-2-\sqrt{3})$.

(5) 1, $k(1,0,1)+l(0,1,0)$; -1, $(-1,0,1)$.

(6) -3, $(1,1,1)$; 2, $(1,1,-4)$.

(7) 2, $(0,0,1)$; 1, $(-1,1,8)$.

2. 证明: 欧几里得空间的正交变换的特征值 (如有的话) 只能是 ± 1.

证明: 设 α 是属于正交变换 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$0 \neq (\alpha, \alpha) = (\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = \lambda_0^2(\alpha, \alpha),$$

因此 $\lambda_0^2 = 1$, $\lambda_0 = \pm 1$.

3. 证明: 幂零矩阵 (某个方幂等于零的矩阵) 的特征值全为零.

证明: 设 α 是属于幂零矩阵 A 的特征值 λ_0 的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$. 由于

$$0 = A^k\alpha = \lambda_0^k\alpha,$$

可得 $\lambda_0^k = 0$, $\lambda_0 = 0$.

4. 设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (a_i 不全为零), 求矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值与特征向量.

解: 设 $a_i \neq 0$. 特征值 0 对应的特征向量是

$$\alpha_j = (0, \cdots, 0, \underset{j}{a_i}, \cdots, \underset{i}{-a_j}, 0, \cdots, 0),\ (j{=}1, \cdots, i{-}1, i{+}1, \cdots, n)$$

的线性组合. 特征值$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$的特征向量是$(a_1, \cdots, a_n)$.

5. 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 存在 K 上的一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$.

证明: 因为 $M_n(K)$ 是 K 上 n^2 维线性空间, 故 $E, A, A^2, \cdots, A^{n^2-1}, A^{n^2}$ 线性相关. 于是存在不全为零的 $a_i \in K$, $i = 1, \cdots, n^2$ 使得

$$a_0E + a_1A + \cdots + a_{n^2-1}A^{n^2-1} + a_{n^2}A^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = a_{n^2}x^{n^2} + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

则 $f(A) = 0$.

***6.** 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, 子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}, \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n),$$

称为 A 的一个 k 阶主子式. 令特征多项式

$$\chi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda+(-1)^n a_n.$$

证明: a_k 等于 A 的全部 k 阶主子式之和.

证明: 把 $|\lambda E-A|$ 的每列

$$\begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ \lambda-a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

都拆成两列:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

则行列式 $|\lambda E-A|$ 可分解为 2^n 个 n 阶行列式之和, 其中每个行列式的列都是上述两种形式之一.

设 A_k 为任一含有 k 个 λ 的子行列式, 其 λ 处于 $j_1,\cdots,j_k$ 列, 将 A_k 按这 k 列展开, 得

$$A_k=\lambda^k\cdot(-1)^{n-k}D_{n-k},$$

其中 D_{n-k} 为在 A 中划去第 $j_1,\cdots,j_k$ 列、第 $j_1,\cdots,j_k$ 行而得到的 $n-k$ 阶主子式. 当这 k 个 λ 取遍 n 阶行列式中所有可能的 k 个位置, 则 D_{n-k} 就取遍所有 C_n^k 个主子式. 从而 $\chi_A(\lambda)$ 中 λ^{n-k} 的系数等于 $(-1)^k$ 乘以 A 的所有 k 阶主子式之和. 因此 a_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和.

***7.** 证明: AB 与 BA 有相同的特征值.

证明: 根据习题 5–8 的第 4 题, 当 $|A|\neq 0$, $AC=CA$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

因此

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

又因

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix},$$

两边取行列式, 即得

$$\begin{vmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{vmatrix} = |\lambda E - BA| = \begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

因此 AB 与 BA 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

***8.** 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: 存在可逆矩阵 $T \in GL(n, \mathbb{C})$, 使 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵.

证明: 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时结论自然成立. 现设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立.

设 λ_1 是 A 的一个特征值, 相应的特征向量是 $\alpha_1 \in \mathbb{C}^n$. 把 α_1 扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 令 $T_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则 T_1 可逆, 且

$$AT_1 = T_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad 即 \quad T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. 由归纳假设, 存在可逆矩阵 $T_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, 使得

$$T_2^{-1}A_1T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令 $T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, 则 T 可逆, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

***9.** 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(x)$ 为一复系数多项式. 证明: 如果 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

证明: 由习题 8, 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 从而

$$\begin{aligned}T^{-1}f(A)T=f(T^{-1}AT)&=f\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)\\ &=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & *\\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 为 $f(A)$ 的全部特征值.

§ 4 可对角化线性变换

1. 习题 8–3 第一题中的矩阵, 哪些是可以对角化的? 在可对角化的情况下, 求出相应的过渡矩阵和对角矩阵.

解: (1) $T=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(7,-2)$.

(2) $T=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(a\mathrm{i},-a\mathrm{i})$.

(3) $T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(-2,2,2,2)$.

(4) $T=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(2,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$.

(5) $T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(-1,1,1)$.

(6), (7) 不可对角化.

2. 在 $K[x]_n$ 中, 求微分变换 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}(f(x))=f'(x)$$

的特征多项式, 并证明: $\mathscr{D}$ 在任何一个基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解: 取 $K[x]_n$ 的基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$. 则 $\mathscr{D}$ 在这个基下的矩阵是

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $\mathscr{D}$ 的特征多项式为 $\chi_D(\lambda)=\lambda^n$. 如果 $\mathscr{D}$ 可对角化, 则存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=0$, 即 $D=0$, 而 $\mathscr{D}$ 不是零变换, 矛盾.

3. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$. 求 $\mathscr{A}$ 的特征值, 并证明 $\mathscr{A}$ 可对角化.

证明: 设

$$V_1=\{\mathscr{A}\alpha \mid \alpha\in V\},\qquad V_2=\{\alpha-\mathscr{A}\alpha \mid \alpha\in V\}.$$

则对任意的 $\alpha\in V$, 有 $\alpha=\mathscr{A}\alpha+(\alpha-\mathscr{A}\alpha)$, 因此

$$V=V_1+V_2.$$

若 $\alpha\in V_1\cap V_2$, 则

$$\alpha=\mathscr{A}\beta=\gamma-\mathscr{A}\gamma,\qquad \beta,\gamma\in V.$$

于是

$$\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}^2\beta=\mathscr{A}\beta=\alpha, \tag{$*$}$$

$$\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}\gamma-\mathscr{A}^2\gamma=\mathscr{A}\gamma-\mathscr{A}\gamma=0. \tag{$**$}$$

所以 $\alpha=\mathscr{A}\alpha=0$, 即 $V_1\cap V_2=0$. 这样就证明了

$$V=V_1\oplus V_2.$$

对于 V_1 中的向量 α, 有 (*) 式成立, 说明 V_1 是属于特征值 1 的特征子空间. 类似地由 (**) 式可得 V_2 是属于特征值 0 的特征子空间. 根据推论 4.5, $\mathscr{A}$ 可对角化. $\mathscr{A}$ 的特征值为 0, 1.

(注: 也可利用习题 9 的方法加以证明)

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 先将矩阵 A 对角化, 再求 A^n;

*(2) 利用上述结果, 求斐波那契数列 (参见第六章练习 6–1.8) 的通项公式.

解: (1) A 的特征值为 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} A^n &= T \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 令

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 是第 i 个斐波那契数. 则

$$\alpha_n = A^n \alpha_0.$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

算得

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

5. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶上三角矩阵. 证明:

(1) 若 $a_{ii} \neq a_{jj}$ $(i \neq j)$, 则 A 可对角化;

(2) 若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$, 则 A 不可对角化.

证明: (1) 由于 A 是上三角矩阵, 故 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为 A 的 n 个特征值. 若当 $i \neq j$ 时 $a_{ii} \neq a_{jj}$, 则 A 有 n 个不同的特征值, 从而 A 可对角化.

(2) (反证) 已知 A 的特征值为 $\lambda_0 = a_{11} = \cdots = a_{nn}$, 如 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_0, \cdots, \lambda_0).$$

于是

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

即 A 为纯量阵, 与假设矛盾.

6. 设有分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}.$$

证明: A 可对角化的充分必要条件是每个 A_i 皆可对角化.

证明: 充分性是显然的. 下证必要性.

设 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

令

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_s \end{pmatrix},$$

其中 T_i 的行数等于 A_i 的阶数 r_i. 则

$$A_iT_i = T_i\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

这说明 T_i 的非零列向量都是 A_i 的特征向量. 又因 T 可逆, 故 T 的行向量线性无关, 因而 T_i 的行向量也线性无关. 于是 $\operatorname{rank} T_i = A_i$ 的阶数, T_i 的列秩也等于 A_i 的阶数. 因此 A_i 有 r_i 个线性无关的特征向量, 说明 A_i 皆可对角化.

7. 设 λ_1, λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同的特征值, ε_1, ε_2 分别是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

证明: (反证) 如果 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于某个特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \lambda_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

又 $\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \mathscr{A}\varepsilon_1+\mathscr{A}\varepsilon_2 = \lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$, 所以

$$(\lambda_1-\lambda_0)\varepsilon_1+(\lambda_2-\lambda_0)\varepsilon_2 = 0.$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关, 因此

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0, \qquad \lambda_2 - \lambda_0 = 0,$$

得到 $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda_2$, 矛盾.

8. 证明: 如果线性变换 $\mathscr{A}$ 以每个非零向量作为它的特征向量, 则 $\mathscr{A}$ 为标量乘积变换.

证明: 设对某个非零向量 α 有 $\mathscr{A}\alpha = k\alpha$, 对另一个非零向量 β, 有 $\mathscr{A}\beta = m\beta$. 如果 $k \neq m$, 则根据习题 7 的结论, $\alpha + \beta$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 如果 $\alpha + \beta = 0$, 则有 $\mathscr{A}\beta = -\mathscr{A}\alpha = -k\alpha = k\beta$, 与 $k \neq m$ 矛盾. 因此 $\alpha + \beta$ 是非零向量, 与题设矛盾.

*__9.__ 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$, 则 A 可对角化.

证明: 由习题 5–8.13 知, $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$ 的充分必要条件是 $A^2 = A$. 即对 A 的任一列向量 α 有 $A\alpha = \alpha$. 又 $A(A - E) = 0$, 故对 $A - E$ 的任一列向量 β 有 $A\beta = 0$.

设 A 的列向量组的极大无关组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $A - E$ 的极大无关列向量组为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ (因为 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$). 下证 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

设有

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j \beta_j = 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^{r} k_i A\alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j A\beta_j = \sum_{i=1}^{r} k_i A\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = 0.$$

于是 $k_1 = \cdots = k_r = 0$, 进而 $m_1 = \cdots = m_{n-r} = 0$. 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

令 $T = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r})$, 则 T 可逆, 且

$$AT = A(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$AT = T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*10. 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\operatorname{rank}(A+E) + \operatorname{rank}(A-E) = n$, 则 A 可对角化.

证明: 与上题类似, 略.

*11. 设 $A, B \in M_n(K)$, 且 $AB = BA$. 证明: 如果 A, B 都可对角化, 则存在可逆矩阵 $T \in M_n(K)$, 使 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 同为对角矩阵.

证明: 设 A 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其中 λ_i 的重数为 r_i. 由于 A 可对角化, 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}.$$

令 $B_1 = T^{-1}BT$, 则 $A_1B_1 = B_1A_1$.

令 $B_1 = (B_{ij})$, 其分块方式与 A_1 相同, 则由 $A_1B_1 = B_1A_1$ 得

$$\lambda_i B_{ij} = B_{ij}\lambda_j$$

于是当 $i \neq j$ 时有 $B_{ij} = 0$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

又因 B 可对角化, B_1 也可对角化, 从而由上题知每个 B_{ii} 都可对角化. 即存在可逆矩阵 $S_i \in M_{r_i}(K)$ 使

$$S_i^{-1}B_{ii}S_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{i_{r_i}} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s \end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 且

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}S_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&S_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1E_{r_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_sE_{r_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1&&\\&\ddots&\\&&S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{r_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_sE_{r_s}\end{pmatrix},$$
$$T^{-1}BT=\begin{pmatrix}S_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&S_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&&\\&\ddots&\\&&B_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1&&\\&\ddots&\\&&S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}S_1^{-1}B_{11}S_1&&\\&\ddots&\\&&S_s^{-1}B_{ss}S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_{11}&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_{1r_1}&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_{s1}&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_{sr_s}\end{pmatrix}$$

同为对角形.

§5 线性变换的不变子空间

1. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, 已知 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间.

解: 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零不变子空间. 首先证明: W 必包含某个基向量 η_i.

设

$$0 \neq \alpha = a_k\eta_k + \cdots + a_n\eta_n \in W, \qquad a_k \neq 0.$$

则 $\mathscr{A}^{k-1}\alpha = a_k\eta_1 \in W$, $\eta_1 \in W$.

再设 η_k 是包含于 W 中的下标最大的基向量, 则

$$\eta_{k-1} = \mathscr{A}\eta_k, \eta_{k-2} = \mathscr{A}^2\eta_k, \cdots, \eta_1 = \mathscr{A}^{k-1}\eta_k \in W.$$

下面证

$$W = L(\eta_1, \cdots, \eta_k).$$

用反证法. 如有 $\alpha \in W$, 但 $\alpha \notin L(\eta_1, \cdots, \eta_k)$, 则

$$\alpha = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m, \qquad 其中 a_m \neq 0, m > k.$$

于是

$$a_{m-k}\eta_1 + \cdots + a_{m-1}\eta_k + a_m\eta_{k+1} = \mathscr{A}^{m-k-1}\alpha \in W.$$

又因 $a_{m-k}\eta_1 + \cdots + a_{m-1}\eta_k \in W$, $a_m \neq 0$, 可得 $\eta_{k+1} \in W$, 矛盾. 因此 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间为零子空间以及 $L(\eta_1, \cdots, \eta_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

2. 设 $\mathscr{A}$ 为欧几里得空间的正交变换, 证明: $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明: 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathscr{A}(W) \subseteq W$. 由于正交变换必可逆, 因此 $\mathscr{A}(W) = W$.

对于任意的 $\beta \in W^{\perp}$, $\alpha \in W$, 必存在 $\gamma \in W$ 使 $\alpha = \mathscr{A}\gamma$. 于是

$$(\mathscr{A}\beta, \alpha) = (\mathscr{A}\beta, \mathscr{A}\gamma) = (\beta, \gamma) = 0.$$

这说明 $\beta \in W^{\perp}$, 故 $W^{\perp}$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, W 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: $\mathscr{A}(W)$ 还是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明: 由于 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, $\mathscr{A}(W) \subseteq W$, 因此 $\mathscr{A}(\mathscr{A}(W)) \subseteq \mathscr{A}(W)$, 说明 $\mathscr{A}(W)$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

4. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明:

(1) 如果 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 那么, V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

(2) $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

证明: (1) 对任意的 $\alpha \in V_\lambda$,

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}\alpha) = \mathscr{B}(\mathscr{A}\alpha) = \mathscr{B}(\lambda\alpha) = \lambda\mathscr{B}\alpha.$$

因此 $\mathscr{B}\alpha \in V_\lambda$, 说明 V_λ 也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

(2) 由上知, V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间, 从而 $\mathscr{B}|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 上的线性变换. 于是 $\mathscr{B}|_{V_\lambda}$ 有特征值 μ 以及相应的特征向量 $\beta \in V_\lambda$, 使

$$\mathscr{B}\beta = \mathscr{B}|_{V_\lambda}(\beta) = \mu\beta.$$

又因 $\beta \in V_\lambda$, $\mathscr{A}\beta = \lambda\beta$. 所以 β 是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的公共特征向量.