第六章　线性空间与欧几里得空间

§1　线性空间及其同构

1. 按通常数的加法与乘法, 下列集合是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

(1) 整数集 $\mathbb{Z}$;　　(2) 有理数集 $\mathbb{Q}$;　　(3) 实数集 $\mathbb{R}$;　　(4) 复数集 $\mathbb{C}$.

解: (1) 与 (2) 都不是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 因为标量乘法不封闭. (3) 和 (4) 都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

2. 若 K 为复数域 $\mathbb{C}$, 问以实数为元素的一切 $n \times n$ 矩阵的集合对矩阵的加法与标量乘法是否构成 K 上的线性空间? 为什么?

解: 否, 关于标量乘法不封闭.

3. 检验下列集合对于所给的运算是否构成实数域上的线性空间:

(1) 全体实对称 (反称, 上三角形) 矩阵, 对于矩阵的加法与标量乘法;

(2) 次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式全体, 对于多项式的加法与乘法;

(3) 平面上全体向量, 对于向量的加法与如下定义的标量乘法:

$$k\alpha = \alpha;$$

(4) 全体正实数 $\mathbb{R}^+$, 加法和标量乘法定义为:

$$a \oplus b = ab, \tag{6.1}$$

$$k \circ a = a^k. \tag{6.2}$$

解: (1) 是; (2) 否, 零多项式不在集合中; (3) 否, 因为 当 $\alpha \neq 0$ 时, $0\alpha \neq 0$; (4) 是.

4. 计算上题中所出现的线性空间的维数和基.

解: (1) 实对称: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} + E_{ji} \mid i \leq j\}$;

反称: $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} - E_{ji} \mid i < j\}$;

上三角形: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} \mid i \leq j\}$.

(4) 1 维, 任何不等于 1 的正实数都可作为基.

5. 证明: 全体以零为极限的实数列

$$S=\left\{\{a_n\}=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots)\;\middle|\; a_i\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}a_n=0\right\}$$

按如下定义的加法与标量乘法:

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\};$$
$$k\{a_n\}=\{ka_n\}$$

构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个无限维线性空间.

证明: 验证线性空间略. 为说明它是无限维的, 对任意的正整数 n, 有一个收敛于 0 的数列: $\alpha_n=\{0,\cdots,0,1(\text{第 } n \text{ 项}),0,0,\cdots\}$. 于是对于任意大的 n, 总有 n 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

6. 设

$$P=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}.$$

(1) 证明: P 按矩阵的加法与标量乘法构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间;

(2) 求 P 的维数与基.

解: (1) 略. (2) $\dim_{\mathbb{R}}P=4$, 基为: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$.

7. 设 $\mathbb{R}$ 为实数域在它自身上的线性空间, $\mathbb{R}^+$ 为第 3 题 (4) 中的向量空间. 作出同构映射以证明: $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^+$ 同构.

证明: 令

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}^+\\ r&\longmapsto 2^r\end{aligned}$$

则(a) φ 是映射;

(b) φ 是单的: 因为 $2^{r_1}=2^{r_2}\iff r_1=r_2$;

(c) φ 是满的: 因为对任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, $a=2^{\log_2 a}$. 而 $\log_2 a\in\mathbb{R}$, 于是 $\varphi(\log_2 a)=2^{\log_2 a}=a$;

(d) φ 保持运算:

$$\varphi(r_1+r_2)=2^{r_1+r_2}=2^{r_1}2^{r_2}=2^{r_1}\oplus 2^{r_2}=\varphi(r_1)\oplus\varphi(r_2);$$

$$\varphi(kr_1)=2^{kr_1}=(2^{r_1})^k=k\circ 2^{r_1}=k\circ\varphi(r_1).$$

所以 φ 是同构.

*8. 设 F 为全体形如

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots), \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3$$

的实数列所组成的集合, 其加法与标量乘法的定义如第 5 题.

(1) 证明: F 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个二维线性空间;

(2) 给出 F 的一个由等比数列所组成的基;

(3) 求斐波那契 (Fibonacci) 数列

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots)$$

的通项公式.

证明: (1) F 为 $\mathbb{R}$ 上线性空间的证明略. 下面求 F 的维数.

考察数列 $\alpha_1 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \cdots)$ 与 $\alpha_2 = (1, 1, 2, 3, 5, \cdots)$, 显然 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

(a) 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$, 则 $(k_2, k_1 + k_2, k_1 + 2k_2, 2k_1 + 3k_2, \cdots) = 0$, 所以 $k_2 = 0$, 从而 $k_1 = 0$. 这说明 α_1, α_2 线性无关.

(b) 对任意的

$$\beta = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots), \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

考察

$$\gamma = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2 - \beta \in F,$$

则 $\gamma = (0, 0, x_3, x_4, \cdots)$. 因为 $\gamma \in F$, 所以 $x_3 = 0 + 0 = 0$, $x_4 = x_3 + 0 = 0$, 由归纳法可知 $\gamma = 0$. 这就证明了 $\beta = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2$. 因此 α_1, α_2 构成 F 的基, $\dim F = 2$.

(2) 设有等比数列

$$(a, aq, aq^2, \cdots) \in F,$$

则对 $n \geq 2$ 有 $aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2}$, 从而 $q^2 = q + 1$, 得到 $q = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

易知

$$\eta_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \cdots\right) \in F,$$

$$\eta_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \cdots\right) \in F.$$

又 η_1, η_2 线性无关, 而 $\dim F = 2$, 所以 η_1, η_2 构成 F 的基.

(3) 斐波那契数列

$$\varphi = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots) \in F,$$

因此存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 使

$$\varphi = c_1\eta_1 + c_2\eta_2.$$

从而

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

由此可得斐波那契数列得通项公式是

$$D_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

***9.** 所谓 n 阶**魔阵**, 是指其各行各列以及主对角和次对角元素之和都相等的 n 阶方阵, 如

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

就是一个三阶魔阵.

(1) 证明: 实数域上全体 n 阶魔阵的集合 M_n 按矩阵的加法与标量乘法构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间;

(2) 求 M_3 的维数.

解: (2) 3 维, 基为:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2 线性子空间的和与直和

1. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 证明以下三个论断是等价的:

(1) $W_1 \subseteq W_2$; (2) $W_1 \cap W_2 = W_1$;

(3) $W_1 + W_2 = W_2$.

证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 以及 (1) $\Rightarrow$ (3) 都是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1): $W_1 + W_2 = W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_1 + W_2 = W_2$.

2. 求由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间的交与和的基与维数.

(1) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,3,1,-1) \\ \alpha_2 = (1,0,1,2); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (3,-1,-3,-5) \\ \beta_2 = (5,-2,-3,-4); \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,0,1,0) \\ \alpha_2 = (1,1,0,1); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (0,1,0.1) \\ \beta_2 = (0,1,1,0); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,0,2,0,) \\ \alpha_2 = (2,0,1,1) \\ \alpha_3 = (1,0,-1,1); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (3,3,1,-2) \\ \beta_2 = (1,3,0,-3). \end{cases}$

解: 把由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间分别记为 W_1, W_2.

(1) $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$,

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(3,-2,3,8) \left(= \dfrac{1}{3}(-2\alpha_1 + 11\alpha_2) = -4\beta_1 + 3\beta_2\right)$;

(2) $\dim(W_1 + W_2) = 4$, $\dim W_1 \cap W_2 = 0$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$;

(3) $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$,

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(2,0,1,1)(= \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2)$.

3. 设 W, W_1, W_2 都是向量空间 V 的子空间, 且

$$W_1 \subseteq W_2, \quad W \cap W_1 = W \cap W_2, \quad W + W_1 = W + W_2.$$

证明: $W_1 = W_2$.

证明: $\dim W + \dim W_1 = \dim(W + W_1) + \dim(W \cap W_1)$,

$\dim W + \dim W_2 = \dim(W + W_2) + \dim(W \cap W_2)$,

所以上式右端相等. 可得 $\dim W_1 = \dim W_2$. 又因 $W_1 \subseteq W_2$, 所以 $W_1 = W_2$.

4. 设 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间, 并且满足

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1,$$

证明: $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

证明: 因为 $\dim(V_1 \cap V_2) \le \dim V_1 \le \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$, 两个等号中必有一个成立. 如果左边等号成立, 则因 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$, 可得 $V_1 \cap V_2 = V_1$, 从而 $V_1 \subseteq V_2$. 如果右边等号成立, 则因 $V_1 \subseteq V_1 + V_2$, 可得 $V_1 = V_1 + V_2$, 从而 $V_2 \subseteq V_1$.

5. 设 $V = K^4$, $\alpha_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)$, $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 求子空间 W 在 V 中的一个补空间.

解: 设 $\alpha_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 $L((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ 是 W 在 V 中的一个补空间.

6. 证明: 每一个 n 维线性空间都是 n 个一维子空间的直和.

证明: 设 V 为 n 维线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基. 令 $W_i = L(\alpha_i)$, 则 $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$. 又, $n = \dim V = \sum_{i=1}^n \dim W_i$, 所以

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

7. 证明: n 维线性空间 V 的每一个真子空间都是若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证明: 设 W 是 V 的真子空间, 则 $r = \dim W < \dim V = n$. 取 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 将其扩充成 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 取如下的 $n-r$ 个 $n-1$ 维线性子空间

$$V_j = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n), \quad j = r+1, \cdots, n.$$

则因

$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in V_j \iff a_j = 0,$$

$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in \bigcap_{j=r+1}^n V_j \iff a_{r+1} = \cdots = a_n = 0 \iff \beta \in W.$$

即 $W = \bigcap\limits_{j=r+1}^n V_j$.

8. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \quad 与 \quad x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间.

证明: $K^n=V_1\oplus V_2$.

证明: (a) 对任意的 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in K^n$, 令

$$\beta=\left(a_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i, a_2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\cdots,a_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right),$$

$$\gamma=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\cdots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right),$$

则 $\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, 且 $\alpha=\beta+\gamma$. 所以 $K^n=V_1+V_2$.

(b) 如果 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in V_1\cap V_2$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=0, \qquad a_1=a_2=\cdots=a_n$$

解得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 即 $\alpha=0$. 所以 $V_1\cap V_2=0$.

综上可得 $K^n=V_1\oplus V_2$.

9. 设 $W_1=\{A\in M_n(K)\mid A^{\mathrm{T}}=A\}$, $W_2=\{A\in M_n(K)\mid A^{\mathrm{T}}=-A\}$.

证明: $M_n(K)=W_1\oplus W_2$.

证明: (a) 对任意的 n 阶矩阵 $A\in M_n(K)$, 有

$$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}}),$$

而 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})\in W_1$, $\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})\in W_2$, 所以 $M_n(K)=W_1+W_2$.

(b) 设 $A\in W_1\cap W_2$, 则

$$-A=A^{\mathrm{T}}=A,$$

由 $2A=0$ 可得 $A=0$. 所以 $W_1\cap W_2=0$.

最终得到 $M_n(K)=W_1\oplus W_2$.

10. 设 $A\in M_n(K)$ 且 $A^2=A$, 令

$$V_1=\{X\in K^n\mid AX=0\}, \quad V_2=\{X\in K^n\mid AX=X\}.$$

证明: $K^n=V_1\oplus V_2$.

证明: (a) 设 $\alpha \in K^n$, 则 $\alpha = (\alpha - A\alpha) + A\alpha$. 而

$$A(\alpha - A\alpha) = A\alpha - A^2\alpha = A\alpha - A\alpha = 0, \quad 所以 \quad \alpha - A\alpha \in V_1,$$

$$A(A\alpha) = A^2\alpha = A\alpha, \quad 所以 \quad A\alpha \in V_2,$$

从而 $K^n = V_1 + V_2$.

(b) 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则因 $\alpha \in V_1$, 有 $A\alpha = 0$, 由 $\alpha \in V_2$, 有 $A\alpha = \alpha$. 于是 $\alpha = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$.

因此 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

*__11.__ 设 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1, V_2 为 K^n 的两个非平凡的子空间.

证明: 一定存在唯一的幂等矩阵 (即 $A^2 = A$ 的矩阵) $A \in M_n(K)$, 使

$$V_1 = \{X \in K^n \mid AX = 0\}, \quad V_2 = \{X \in K^n \mid AX = X\}.$$

证明: 取 V_1 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 以及 V_2 的一个基 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 K^n 的基. 定义 K^n 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为:

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le r \\ \alpha_i, & r+1 \le i \le n \end{cases}$$

把线性变换 $\mathscr{A}$ 在 K^n 的自然基下的矩阵记为 A. 由 $\mathscr{A}$ 的定义可得 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, 相应地有 $A^2 = A$.

对任意的 $X \in K^n$, 有 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$. 则

$$AX = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathscr{A}(\alpha_i) = \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i.$$

因此

$$AX = 0 \iff \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i = 0 \iff a_i = 0 \forall r+1 \le i \le n \iff X \in V_1,$$

$$AX = X \iff \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \iff a_i = 0 \forall 1 \le i \le r \iff X \in V_2.$$

所以 A 是满足条件的幂等矩阵.

再证唯一性: 如果 $B \in M_n(K)$, 使得

$$BX = 0 \quad \forall X \in V_1, \qquad BX = X \quad \forall X \in V_2,$$

则因 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 可得

$$(A-B)X = 0, \qquad \forall X \in K^n.$$

所以 $A - B = 0$, 从而 $A = B$.

*12. 设 $A \in M_n(K)$, E 为 n 阶单位方阵. 令

$$V_1 = \{X \in K^n \mid (A-E)X = 0\}, V_2 = \{X \in K^n \mid (A+E)X = 0\}.$$

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2 \iff A^2 = E$.

证明: ($\Rightarrow$) $K^n = V_1 \oplus V_2 \implies n = \dim V_1 + \dim V_2 \implies n = (n - \operatorname{rank}(A-E)) + (n - \operatorname{rank}(A+E)) \implies n = \operatorname{rank}(A-E) + \operatorname{rank}(A+E) \implies A^2 = E$ (习题 5–8.12).

($\Leftarrow$) 对任意的 $\alpha \in K^n$,

$$\alpha = \frac{1}{2}(A+E)\alpha - \frac{1}{2}(A-E)\alpha.$$

因为

$$(A-E)\left[\frac{1}{2}(A+E)\alpha\right] = \frac{1}{2}(A^2-E)\alpha = 0,$$

所以 $\frac{1}{2}(A+E)\alpha \in V_1$. 又因

$$(A+E)\left[-\frac{1}{2}(A-E)\alpha\right] = -\frac{1}{2}(A^2-E)\alpha = 0,$$

所以 $-\frac{1}{2}(A-E)\alpha \in V_2$.

因此 $K^n = V_1 + V_2$.

当 $\alpha \in V_1 \cap V_2$ 时又有

$$\alpha = \frac{1}{2}(A+E)\alpha - \frac{1}{2}(A-E)\alpha = 0 + 0 = 0,$$

因此 $V_1 \cap V_2 = 0$. 从而 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

§ 3 欧几里得空间

1. 在线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 对任意两个向量 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, 定义

$$(\alpha, \beta) = 5a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

验证在此定义下 $\mathbb{R}^2$ 构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

2. 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 定义

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)\quad \forall A,B\in M_n(\mathbb{R}).$$

(说明: 方阵 A 的迹 $\mathrm{Tr}(A)$ 就是方阵的对角线元素之和) 试问: f 是否 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积?

解: 是. 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 则

(a) $f(A,B)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ki}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ki}=f(B,A)$.

(b) $f(A+B,C)=\mathrm{Tr}((A+B)^{\mathrm{T}}C)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}C+B^{\mathrm{T}}C)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}C)+\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}C)=f(A,C)+f(B,C)$.

(c) $f(kA,B)=\mathrm{Tr}((kA)^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{Tr}(kA^{\mathrm{T}}B)=k\,\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)=kf(A,B)$.

(d) $f(A,A)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ki}^2\geq 0$, 且

$$f(A,A)=0\iff a_{ki}=0,\quad k,i=1,\cdots,n\iff A=0.$$

所以 f 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

规定

$$(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY\quad\forall X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

(1) 证明: $\mathbb{R}^n$ 关于此定义构成一个欧几里得空间;

(2) 求向量 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$ 的度量矩阵,

(3) 具体写出这个空间的柯西–布涅柯夫斯基不等式.

解: (1) 略.

(2) 度量矩阵为 A.

(3) 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}ka_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}ka_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n}kb_k^2}.$$

4. 设 C 是一个 n 阶实可逆矩阵. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 对任意两个列向量 X, Y, 规定

$$(X,Y)=X^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CY$$

证明: $\mathbb{R}^n$ 关于此定义构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

5. 在标准欧几里得空间内计算给定向量的内积, 并求它们之间的夹角:

(1) $\alpha=(1,1,1,1)$, $\beta=(-1,2,4,3)$;

(2) $\alpha=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$, $\beta=(3,-1,2,2)$;

(3) $\alpha=(3,-1,1,-1)$, $\beta=(-2,2,-2,2)$;

(4) $\alpha=(-1,1,-1,2,1)$, $\beta=(3,1,-1,0,1)$.

解: (1) $(\alpha,\beta)=8$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

(2) $(\alpha,\beta)=\frac{7}{2}$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{7}{10}$.

(3) $(\alpha,\beta)=-12$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{5\pi}{6}$.

(4) $(\alpha,\beta)=0$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$.

6. 设 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x,y,z\in\mathbb{R})$, 试利用柯西–布涅柯夫斯基不等式求

$$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{y^2}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}$$

的最小值.

解: 原式 $=-3+\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}$. 而由柯西–布涅柯夫斯基不等式,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2}\\&\cdot\sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2+(\sqrt{1-y^2})^2+(\sqrt{1-y^2})^2}\\&\geq\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{1-x^2})\\\sqrt{1-y^2}\\\sqrt{1-y^2}\end{pmatrix}=3,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}}\cdot\sqrt{2}\geq 3,$$

所以
$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}\geq\frac{9}{2}.$$
$$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{y^2}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}\geq-3+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}.$$
又当 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时上式取等号. 故原式的最小值为 $\dfrac{3}{2}$.

7. 设 $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, 若 $a^2+b^2+c^2=25$, $x^2+y^2+z^2=36$, $ax+by+cz=30$. 试利用柯西–布涅柯夫斯基不等式求 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值.

解: 由柯西–布涅柯夫斯基不等式,
$$\begin{aligned}30=ax+by+cz&=(a\ b\ c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}=30.\end{aligned}$$
因等号成立时, (a,b,c) 与 (x,y,z) 成比例. 设 $(a,b,c)=t(x,y,z)$, 代入得
$$30=t(x^2+y^2+z^2)=36t,$$
解出 $t=\dfrac{5}{6}$. 从而 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{5}{6}$.

8. 在标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 求基 $\alpha_1=(1,0,1)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(0,1,1)$ 的度量矩阵.

解: $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

9. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维欧几里得空间 V 的一个规范正交基.

证明: $\alpha_1=\dfrac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3)$, $\alpha_2=\dfrac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$, $\alpha_3=\dfrac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$ 也是 V 的一个规范正交基.

证明: 直接验证可知, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是单位向量, 且两两正交. 故它们是 V 的单位正交向量组. 又因 $\dim V=3$, 它们构成 V 的规范正交基.

10. 将标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 的基$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,0,1,0)$, $\alpha_3=(-1,0,0,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,-1)$ 化为规范正交基.

解: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2,0)$, $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(-1,1,1,3)$, $\dfrac{1}{2}(-1,1,1,-1)$.

11. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases}x_1-\ \ x_2+x_3+3x_4-\ \ x_5=0\\x_1+2x_2-x_3\qquad\quad+2x_5=0\end{cases}$$

的解空间 (作为标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^5$ 的子空间) 的一个规范正交基.

解: 该齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

正交化得:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{12}{7}\\\frac{3}{7}\\-\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{5}{17}\\-\frac{23}{34}\\\frac{6}{17}\\\frac{3}{34}\\1\end{pmatrix}.$$

单位化后得规范正交基:

$$\frac{\sqrt{14}}{14}(-1,2,3,0,0),\ \frac{\sqrt{238}}{238}(-12,3,-6,7,0),\ \frac{\sqrt{1938}}{1938}(-10,-23,12,3,34).$$

12. 证明: 在欧几里得空间 V 中, 基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基的充分必要条件是: 对 V 的任意向量 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$, 总有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=a_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明: $(\Rightarrow)$ 如 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基, 则对任意的 $\alpha=\sum a_i\varepsilon_i$, 有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=\left(\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j,\varepsilon_i\right)=\sum_{j=1}^n a_j(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_i.$$

$(\Leftarrow)$ 如对任意的 $\alpha=\sum a_i\varepsilon_i$, 有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=a_i,$$

则 $\varepsilon_j=\sum\limits_{k=1}^n a_k\varepsilon_k$, 其中 $a_k=\delta_{kj}$. 因此

$$(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_i=\delta_{ij}.$$

从而 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基.

13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧几里得空间 V 的 m 个向量, 称矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆 (Gram) 矩阵.

证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|\neq 0$.

证明: 设有线性关系式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0.$$

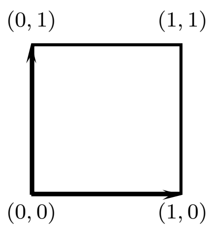
把这个等式分别与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 作内积, 可以得到变量 $x_1,\cdots,x_m$ 的一个齐次线性方程组:

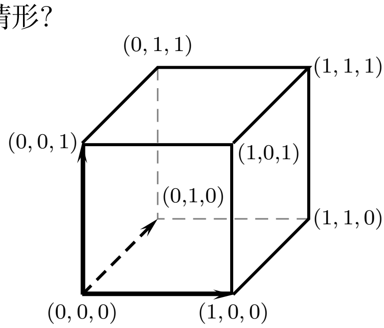
$$\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_1)x_1+(\alpha_1,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_1,\alpha_m)x_m=0\\ (\alpha_2,\alpha_1)x_1+(\alpha_2,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_2,\alpha_m)x_m=0\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1)x_1+(\alpha_m,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_m,\alpha_m)x_m=0\end{cases}$$

其系数矩阵就是格拉姆矩阵 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$. 再利用齐次线性方程组有非零解的充分必要条件可得:

$$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|\neq 0 \iff \text{齐次线性方程组只有零解}x_1=\cdots=x_m=0$$
$$\iff \alpha_1,\cdots,\alpha_m\text{线性无关}.$$

14. 通过对图中平面内正方形以及几何空间内立方体的观察, 归纳出它们的顶点坐标的特征, 从而推导出 n 维空间的立方体的顶点个数公式. 再计算 4 维空间中的立方体有多少个 3 维的侧面, 多少个 2 维的侧面与 1 维的棱? 这个 4 维立方体有多少种不同长度的对角线? 试求它们的长度以及与棱的夹角. 你能否把这些结果推广到 n 维空间的情形?





第 14 题图

解: n 维空间的立方体中, m 维子立方体有 $2^{n-m}\mathrm{C}_n^m$ 个.
当 $m=0$ 时为顶点个数 $=2^n$;
当 $m=1$ 时为棱数 $=2^{n-1}n$;
当 $m=2$ 时为面数 $=2^{n-3}n(n-1)$; ...
其不同长度的对角线有 $n-1$ 种, 长度分别为 $\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}$.
长度为 $\sqrt{k}$ 的对角线与棱的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

§4　欧几里得空间中的正交补空间与正交投影

1. 在标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求向量 β 在由向量 α_1, α_2, α_3 生成的子空间 W 上的正交投影. 设

(1) $\alpha_1=(2,2,-3,1)$, $\alpha_2=(-2,1,-2,3)$, $\alpha_3=(1,2,-3,2)$, $\beta=(1,1,-2,1)$;

(2) $\alpha_1=(-1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,-1,1,0)$, $\alpha_3=(0,1,-1,2)$, $\beta=(1,2,-1,0)$.

解: (1) 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\beta_2$, 其中 $\beta_2=\beta-x_1\alpha_1-x_2\alpha_2-x_3\alpha_3\in W^{\perp}$. 由等式 $(\beta_2,\alpha_i)=0$, $i=1,2,3$, 可以导出以下齐次线性方程组:

$$\begin{cases}18x_1+7x_2+17x_3=11\\7x_1+18x_2+12x_3=6\\17x_1+12x_2+18x_3=11\end{cases}$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{12}\right)$, 因此 β 在 W 上的正交投影为:

$$\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{12}\alpha_2+\frac{1}{12}\alpha_3=\left(\frac{11}{12},\frac{5}{4},-\frac{23}{12},\frac{11}{12}\right).$$

(2) $\left(\dfrac{1}{2},2,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $B\in\mathbb{R}^n$. 证明: 实系数线性方程组 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 B 与方程组 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间正交.

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $AX=B$ 有解, 则有 $C=(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $B=AC$. 于是对 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的任意解 $D=(d_1\ d_2\ \cdots\ d_n)^{\mathrm{T}}$, 有

$$D^{\mathrm{T}}B=D^{\mathrm{T}}AC=(A^{\mathrm{T}}D)^{\mathrm{T}}C=0,$$

所以 B 与 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间正交.

($\Leftarrow$) 设 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间为 W_1, A 的列向量组张成的子空间为 W_2. 则 $W_1\perp W_2$. 又因 $\dim W_1=n-\operatorname{rank}A=n-\dim W_2$, 所以 $V=W_1\oplus W_2$. 从而 $W_2=W_1^{\perp}$. 已知 $B\perp W_1$, 可得 $B\in W_2$, 即 B 可由 A 的列向量组线性表示, 于是存在 $C\in\mathbb{R}^n$ 使得 $B=AC$.

3. 设 V_1, V_2 是欧几里得空间 V 的两个子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明: V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中所有向量.

证明: 由命题 6.2, $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$, $\dim V_1^{\perp}=n-\dim V_1$.

$$\begin{aligned}\dim(V_2\cap V_1^{\perp})&=\dim V_2+\dim V_1^{\perp}-\dim(V_2+V_1^{\perp})\\&\geq n-\dim V_1+\dim V_2-n\\&=\dim V_2-\dim V_1\geq 1.\end{aligned}$$

所以 $V_2\cap V_1^{\perp}\neq 0$, 存在非零向量 $\alpha\in V_2\cap V_1^{\perp}$, 即 $\alpha\in V_2$, $\alpha\perp V_1$.

4. 设 U 为 n 维欧几里得空间 V 的子空间. 证明: $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$.

证明: 因为 U 的向量都与 $U^{\perp}$ 正交, 因此 $U\subseteq(U^{\perp})^{\perp}$. 又因

$$\dim(U^{\perp})^{\perp}=n-\dim U^{\perp}=n-(n-\dim U)=\dim U,$$

因此 $U=(U^{\perp})^{\perp}$.

5. 设 V_1, V_2 为 n 维欧几里得空间 V 的两个子空间, 证明:

(1) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;

(2) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明: (1) 若 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$, 则 $\alpha\perp V_1$ 且 $\alpha\perp V_2$, 从而 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 所以 $(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

如果 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$, 则 $\alpha\perp V_1$ 且 $\alpha\perp V_2$, $\alpha\perp V_1+V_2$, 所以 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 这说明 $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$.

综上即有 $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

(2) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=\left[(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}\right]^{\perp}=\left[\left(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

*__6.__ 设 W 为欧几里得空间 V 的子空间, α 是 V 的一个向量. 定义 α 到 W 的距离

$$\mathrm{d}(\alpha,W)=|\alpha-\alpha'|,$$

其中, α' 为 α 在 W 上的正交投影.

证明: 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 W 的基, 则

$$\mathrm{d}(\alpha,W)=\sqrt{\frac{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|}}.$$

这里的 $G(\cdots)$ 是向量组的格拉姆矩阵 (见习题 6–3.13).

证明: 设 $\alpha' = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i\alpha_i$. 从

$$(\alpha - \alpha', \alpha_j) = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i, \alpha_j\right) = 0, \quad j = 1, \cdots, m,$$

可得

$$\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix} = G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 所以 $G = G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 可逆 (参见练习 5–3.10). 因此

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

$$\alpha' = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\alpha,W)^2 = (\alpha-\alpha',\alpha-\alpha')\\
&= \left(\alpha - (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}, \alpha - (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}\right)\\
&= (\alpha,\alpha) - 2((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}\\
&+ ((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-\mathrm{T}}GG^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}\\
&= (\alpha,\alpha) - ((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|G|}\left[(\alpha,\alpha)|G| - ((\alpha,\alpha_1)\ \cdots\ (\alpha,\alpha_m))G^*\begin{pmatrix}(\alpha,\alpha_1)\\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m)\end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{|G|}\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) & (\alpha_1,\alpha)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) & (\alpha_2,\alpha)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\alpha,\alpha_1) & \cdots & (\alpha,\alpha_m) & (\alpha,\alpha)\end{vmatrix}$$
$$= \frac{|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G|}.$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}(\alpha,W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|}}.$$

7. 设 V_1, V_2 为欧几里得空间 V 的两个子空间, $x,y\in V$. 线性流形$L_1 = x+V_1$, $L_2 = y+V_2$ 之间的距离定义为

$$\mathrm{d}(L_1,L_2) = \min|\alpha-\beta|,\quad \forall\alpha\in L_1,\ \beta\in L_2.$$

证明: $\mathrm{d}(L_1,L_2)=\mathrm{d}(x-y,V_1+V_2)$.

证明: 由 $V=(V_1+V_2)\oplus(V_1+V_2)^{\perp}$, 可得 $x-y=\beta_1-\alpha_1+\delta$, 其中 $\alpha_1\in V_1$, $\beta_1\in V_2$, $\delta\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 于是

$$\mathrm{d}(x-y,V_1+V_2)=|\delta|=|(x+\alpha_1)-(y+\beta_1)|\geq \mathrm{d}(L_1,L_2).$$

反之, 对任意的 $\alpha=x+\alpha_1\in L_1$, $\beta=y+\beta_1\in L_2$, 令

$$\alpha-\beta=(x-y)+(\alpha_1-\beta_1)=\gamma+\delta,$$

其中 $\gamma\in V_1+V_2$, $\delta\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 则

$$x-y=(\gamma-\alpha_1+\beta_1)+\delta.$$

于是

$$|\alpha-\beta|^2=|\gamma+\delta|^2=|\gamma|^2+|\delta|^2\geq|\delta|^2=\mathrm{d}(x-y,V_1+V_2)^2.$$

(其中 $|\gamma+\delta|^2=|\gamma|^2+|\delta|^2$ 是因为 $\gamma\perp\delta$.) 所以

$$\mathrm{d}(L_1,L_2)=\min|\alpha-\beta|\geq \mathrm{d}(x-y,V_1+V_2).$$

最终可得 $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(x-y, V_1+V_2)$.

8. 求两个平面 $L_1 = x + L(\alpha_1, \alpha_2)$ 与 $L_2 = y + L(\beta_1, \beta_2)$ 之间的距离, 其中

$$\alpha_1 = (1, -2, 0, -3), \quad \alpha_2 = (2, -2, 1, 2), \quad x = (4, 5, 3, 2);$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, -2, 0, -1), \quad y = (1, -2, 1, -3).$$

解: $W = L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$. 所以

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(x-y, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, (x-y))|}{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)|}} = \sqrt{\frac{324}{36}} = 3.$$

9. 求下列方程的最小二乘解:

$$\begin{cases} 3.4x - 1.6y = 1 \\ 3.3x - 1.7y = 1 \\ 3.2x - 1.5y = 1 \\ 2.6x - 1.1y = 1. \end{cases}$$

解: $A = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.6 \\ 3.3 & -1.7 \\ 3.2 & -1.5 \\ 2.6 & -1.1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

则最小二乘解 (x, y) 为线性方程 $A^{\mathrm{T}}AX = A^{\mathrm{T}}B$ 的解. 解这个方程, 得

$$\begin{cases} x \approx 0.69 \\ y \approx 0.78 \end{cases}$$

§5 正交变换与正交矩阵

1. 在几何空间中取直角标架 $[O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$. $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 分别表示空间按右手系绕 x、y、z 轴旋转 $45°$ 的正交变换.

(1) 以坐标的形式写出 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 的表达式;

(2) 求 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}\mathscr{B}$, $\mathscr{B}\mathscr{A}$, $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$, $\mathscr{A}+\mathscr{B}$, $\mathscr{A}^4\mathscr{B}^4$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵;

(4) 证明: $\mathscr{A}^8 = \mathscr{B}^8 = \mathscr{C}^8 = \mathscr{E}$, 这里 $\mathscr{E}$ 表示恒同映射.

解: (1) $\mathscr{A}(x, y, z) = \left(x, \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z, \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z\right)$,

$$\mathscr{B}(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z\right),$$

$$\mathscr{C}(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y, z\right).$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) $AB=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $ABC=$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$,

$A^4B^4=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4) 略.

2. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 为正交矩阵, 且 $|A|=1$.

证明: $a_{ij}=A_{ij}$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明: 因为 $|A|=1$, 所以 $AA^*=E$, 从而

$$A^*=A^{-1}=A^{\mathrm{T}},$$

两边比较后可得

$$a_{ij}=A_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,n.$$

3. 设 $\mathscr{A}$ 是欧几里得空间 V 的一个变换.

证明: 如果 $\mathscr{A}$ 保持内积不变, 即对所有的 $\alpha,\beta\in V$, $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta)$, 那么它一定是线性的, 因而是正交变换.

证明: 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}(\alpha+\beta)-\mathscr{A}\alpha-\mathscr{A}\beta,\mathscr{A}(\alpha+\beta)-\mathscr{A}\alpha-\mathscr{A}\beta)\\
&=(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}(\alpha+\beta))-2(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}\alpha)-2(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}\beta)\\
&+(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\alpha)+2(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)+(\mathscr{A}\beta,\mathscr{A}\beta)\\
&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\
&=((\alpha+\beta)-\alpha-\beta,(\alpha+\beta)-\alpha-\beta)=0.
\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta$.

类似地,

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}(k\alpha)-k\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}(k\alpha)-k\mathscr{A}\alpha)\\
&=(\mathscr{A}(k\alpha),\mathscr{A}(k\alpha))-2k(\mathscr{A}(k\alpha),\mathscr{A}\alpha)+k^2(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\alpha)\\
&=(k\alpha,k\alpha)-2k(k\alpha,\alpha)+k^2(\alpha,\alpha)=0.
\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}\alpha$.

因此 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧几里得空间的两个规范正交基. 证明: 存在正交变换 $\mathscr{A}$, 使

$$\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明: 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间的基, 因此满足题设条件的线性变换 $\mathscr{A}$ 一定存在. 对于任意的两个向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n a_i\varepsilon_i$, $\beta=\sum\limits_{i=1}^n b_i\varepsilon_i$, 有 $\mathscr{A}(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i$, $\mathscr{A}(\beta)=\sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i$, 因此

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=\left(\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i,\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^n a_ib_i=(\alpha,\beta).$$

所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

5. 求下列正交方阵的欧拉角:

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\theta = 0$, $\phi + \psi = \frac{5\pi}{3}$;

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$;

(3) 由 $r_{33} = \cos\theta = 0$, $\theta \in [0, \pi]$, 可得 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 再由 $r_{31} = \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 以及 $r_{32} = \cos\psi = -\frac{1}{2}$ 可得 $\psi = \frac{2\pi}{3}$. 最后由 $r_{13} = \sin\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及 $r_{23} = -\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

*6. 设点 P 的坐标为 $(1,1,0)$, 求绕轴 $\overrightarrow{OP}$ 按右手方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 的正交变换.

解: 参看例 7.5. 旋转轴的单位向量是 $\xi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. 令 $\eta = \xi - \overrightarrow{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$. 沿 η 方向的镜射记为 $\mathscr{S}$, 由于

$$\begin{cases} \mathscr{S}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2\dfrac{(\overrightarrow{i}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} \\ \mathscr{S}(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j} - 2\dfrac{(\overrightarrow{j}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} \\ \mathscr{S}(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k} - 2\dfrac{(\overrightarrow{k}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j} \end{cases}$$

因此 $\mathscr{S}$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面旋转 $\mathscr{R}_{\overrightarrow{k},-\frac{\pi}{6}}$ 的矩阵是

$$R=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

最后得到所求正交变换的矩阵为

$$SRS=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

*7. 求正交变换

$$\mathscr{A}(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}X$$

的旋转轴与旋转角.

解: 求旋转轴相当于求 $AX=X$ 的解向量 $X\in\mathbb{R}^3$. 解得旋转轴的方向向量是 $\xi=(\sqrt{2}+1,1,\sqrt{2}-1)$. 为求旋转角, 取一个与 ξ 正交的向量 $\alpha=(1,-2,-1)$, 则旋转角 $\theta=\langle\alpha,\mathscr{A}(\alpha)\rangle$.

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\mathscr{A}(\alpha))}{|\alpha|^2}=-\frac{3}{4}.$$

又因混合积

$$(\xi,\alpha,\mathscr{A}(\alpha))=-\frac{21}{2}<0,$$

所以旋转角 $\theta=\pi+\arccos\dfrac{3}{4}$.