第五章　矩阵的秩与矩阵的运算

§1　向量组的秩

1. 对下列向量组, 将 α_1 扩充成向量组的一个极大无关组:

(1) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$;

(2) $\alpha_1=(1,-1,0,1,1)$, $\alpha_2=(2,1,3,-1,0)$, $\alpha_3=(3,0,3,0,1)$, $\alpha_4=(1,-1,1,-1,1)$, $\alpha_5=(-1,-5,-6,5,3)$, $\alpha_6=(2,1,2,1,0)$.

解: (1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是它的一个部分组. 证明: 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

证明: 作为向量组的部分组, $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 当然可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 因此这两个向量组等价, 从而有相同的秩 r. 于是由命题 1.9 可知向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关. 由推论 1.8 可知它是极大线性无关组.

3. 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个可以被另一个线性表示. 证明: 这两个向量组等价.

证明: 设向量组 (I) 可被向量组 (II) 线性表示, 它们生成的线性子空间分别记为 L_1,L_2. 则 $L_1\subseteq L_2$. 又因它们有相同的秩, 因此它们生成的线性子空间有相同的维数, 从而 $L_1=L_2$, 即 (I) 与 (II) 等价.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\alpha_{t+2},\cdots,\alpha_s$ 有相同的秩. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

证明: 根据假设, 有

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)\subseteq L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_s),$$

又因这两个向量组有相同的秩, 因此它们张成的线性子空间有相同的维数, 从而相等. 再利用命题 1.1, 可知这两个向量组线性等价.

5. 证明:

$$\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\le\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\mathrm{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

证明: 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组, 则

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\text{ 线性等价于 }\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}\},$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}=\mathrm{rank}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}\}\\&\le r_1+r_2=\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\mathrm{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.\end{aligned}$$

6. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩分别是 r_1, r_2, r_3. 证明:

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2.$$

证明: 由于向量组 $\{\alpha_1,,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 都可由向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 线性表示, 故

$$r_1\le r_3,\qquad r_2\le r_3,$$

从而

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3.$$

$r_3\le r_1+r_2$ 就是练习 5 的结论.

7. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$, $\{\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s\}$ 的秩分别是 r_1, r_2, r_3. 证明: $r_3\le r_1+r_2$.

证明: 因为 $\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_s+\beta_s\}$ 可由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 线性表示, 因此它的秩

$$\begin{aligned}&r_3\le\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_s\}\\&\le\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\mathrm{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=r_1+r_2.\end{aligned}$$

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 为它的一个部分组. 证明:

$$\mathrm{rank}\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}\}\ge r+m-s.$$

证明: 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的秩等于 t, 则它的一个极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_t}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性无关组, 它可被扩充为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 而这些扩充的向量不可能是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的向量, 否则与极大无关组矛盾. 而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中共有 $s-m$ 个不属于 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的向量, 其中选出 $r-t$ 个不同的向量添加到 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_t}$ 以生成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 从而

$$r-t\leq s-m,$$

移项得

$$\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}\}=t\geq r+m-s.$$

9. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示. 证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 等价.

证明: 由假设, 存在 $a_1,\cdots,a_s\in K$ 使得

$$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s.$$

如果 $a_s=0$, 则 β 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 与假设矛盾, 因此 $a_s\neq 0$. 于是

$$\alpha_s=\frac{1}{a_s}\beta-\frac{a_1}{a_s}\alpha_1-\cdots-\frac{a_{s-1}}{a_s}\alpha_{s-1},$$

即 α_s 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示. 从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示. 另一方面, 根据假设, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 因此这两个向量组等价.

***10.** (**替换定理**) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示. 证明: 存在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个置换 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$, 使向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{i_{r+1}},\beta_{i_{r+2}},\cdots,\beta_{i_t}$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价 $(r=1,\cdots,s)$.

证明: 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 故 $s\leq t$.

下面用归纳法证明替换定理.

(i) 设 $s=1$.

因为 α_1 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 故存在 $a_i\in K$ 使得 $\alpha_1=\sum\limits_{i=1}^{t}a_i\beta_i$. 而 α_1 线性无关, 即 $\alpha_1\neq 0$, 所以 $a_1,\cdots,a_t$ 不全为零. 必有 $a_l\neq 0$ $(1\leq l\leq t)$. 则

$$\beta_l=\frac{1}{a_l}\alpha_1-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{t}\frac{a_i}{a_l}\beta_i,$$

因此向量组 $\alpha_1,\beta_1,\cdots,\beta_{l-1},\beta_{l+1},\cdots,\beta_t$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

令 $\beta_{i_1}=\beta_l$, $\beta_{i_2}=\beta_1$, $\ldots$, $\beta_{i_l}=\beta_{l-1}$, $\beta_{i_{l+1}}=\beta_{l+1}$, $\ldots$, $\beta_{i_t}=\beta_t$, 即得结论.

(ii) 假定结论对 $s-1$ 成立. 考察 s 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性无关, 由归纳假设, 存在 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个置换 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$, 使

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{j_{r+1}},\cdots,\beta_{j_t}\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\quad(r=1,\cdots,s-1).$$

又 α_s 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 所以 α_s 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\beta_{j_s},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表示. 故存在 $k_i,l_k\in K$, $i=1,\cdots,s-1$, $k=s,\cdots,t$, 使得

$$\alpha_s=\sum_{i=1}^{s-1}k_i\alpha_i+\sum_{k=s}^{t}l_k\beta_{j_k}.$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 故 $l_s,\cdots,l_t$ 不全为零. 设第一个不为零的是 l_h, 则 $h\geq s$. 从而 β_{j_h} 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{j_{h+1}},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表示. 令 $\beta_{i_s}=\beta_{j_h}$, $\beta_{i_1}=\beta_{j_1}$, $\ldots$, $\beta_{i_{s-1}}=\beta_{j_{s-1}}$, $\beta_{i_{s+1}}=\beta_{j_{s+1}}$, $\ldots$, $\beta_{i_t}=\beta_{j_t}$, 则

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{i_{s+1}},\cdots,\beta_{i_t}\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

由归纳法原理可知结论成立.

§2　矩阵的秩

1. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix}1&4&10&0\\3&2&4&2\\4&1&1&3\\2&3&7&1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\1&-1&1&-5\\2&0&8&-2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\1&-1&1&3&1\\0&0&1&1&1\\1&1&1&2&3\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}2&0&3&1&-1\\1&2&1&2&1\\3&-2&5&0&-3\\-1&1&0&2&3\end{pmatrix}$

解: (1) 2; (2) 2; (3) 4; (4) 3.

2. 求下列向量组的秩与极大线性无关组:

(1) $\alpha_1=(3,2,-1,-3,-2)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1,-3)$, $\alpha_3=(1,-4,7,5,4)$, $\alpha_4=(1,-7,11,9,5)$;

(2) $\alpha_1=(1,-1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,1,-1,1,1)$, $\alpha_3=(1,1,1,-1,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,1,-1)$, $\alpha_5=(1,1,1,1.1)$;

(3) $\alpha_1=(2,-1,3,-2,4)$, $\alpha_2=(4,-2,5,1,7)$, $\alpha_3=(2,-1,1,8,2)$, $\alpha_4=(2,-1,2,3,3)$;

(4) $\alpha_1=(1,3,3,5)$, $\alpha_2=(3,2,-5,1)$, $\alpha_3=(2,3,0,4)$, α_4=$(5,4,-7,1)$, $\alpha_5=(3,5,1,7)$.

解: (1) 秩 4, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(2) 秩 5, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$.

(3) 秩 2, α_1,α_2.

(4) 秩 3, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

3 求向量组 $\alpha_1=(-3,1,1,1),\alpha_2=(1,-3,1,1),\alpha_3=(1,1,-3,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,-3)$ 的所有极大线性无关组.

解: 任意 3 个向量都构成极大线性无关组.

4. 求下列向量组所张成的子空间的基与维数:

(1) α_1=$(4,-5,2,6)$, α_2=$(2,1,3,2)$, α_3=$(2,-6,-1,4)$, α_4=$(2,13,5,-6)$;

(2) $\alpha_1=(1,0,0,1,-1)$, $\alpha_2=(0,1,0,2,1)$, $\alpha_3=(0,0,1,-1,-2)$, $\alpha_4=(1,1,1,2,-2)$.

解: (1) 维数 3, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(2) 维数 3, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

5. 求下列矩阵的秩:

$$(1)\ \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为此矩阵的任意两行都线性相关, 因此秩 ≤ 1. 而此矩阵的秩等于 0 的充分必要条件是所有的 $a_ib_j=0$. 如 $(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$, 则必有 $(b_1,\cdots,b_n)=0$, 如 $(b_1,\cdots,b_n)\neq 0$, 则必有 $(a_1,\cdots,a_n)=0$. 因此当 $(a_1,\cdots,a_n)=0$ 或 $(b_1,\cdots,b_n)=0$ 时, 秩为 0, 否则, 秩为 1.

(2) 当 $a=1$ 时, 秩为 1; 当 $a=\dfrac{1}{1-n}$ 时, 秩为 $n-1$ $(n>1)$; 其余情形, 秩为 n.

6. 设

$$W=\{(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)\mid a_i\in K,\ i=1,\cdots,r\}\subseteq K^m$$

证明: $\dim W = r$.

证明: 设$\alpha_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots, 0)$, $\ldots$, $\alpha_r = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 且对任意的 $\alpha = (a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0) \in W$, 有 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r$, 所以 $\dim W = r$.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{r} a_{ij}\alpha_i$ $(j = 1, \cdots, s)$, 令 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\} = \operatorname{rank} A.$$

证明: (i) 设 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_t}$ 是 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的一个极大线性无关组. 考察 A 的列向量组 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$. 则

$$(\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t}) = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t}).$$

如果 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\gamma_{j_i} = 0$, 则

$$(\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\beta_{j_i} = 0$, 由于 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_t}$ 线性无关, 因此 $k_1 = \cdots = k_t = 0$, 即 $\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_t}$ 线性无关. 所以

$$\operatorname{rank}(A) \geq t = \operatorname{rank}\{\beta_1, \cdots, \beta_s\}.$$

(ii) 设 $\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_t}$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组, 则由 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\beta_{j_i} = 0$ 可得

$$(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 必须有

$$(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由 $\gamma_{j_1},\cdots,\gamma_{j_t}$ 的线性无关性可得 $k_1=\cdots=k_t=0$, 即 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性无关, 因而

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}\geq t=\operatorname{rank}(A).$$

最终得到

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=\operatorname{rank}(A).$$

8. 设 $A\in M_{m,n}(K)$. 已知 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行组成 A 的行向量组的极大线性无关组, A 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列组成 A 的列向量组的极大线性无关组. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}\neq 0.$$

证明: 适当交换矩阵的行与列, 可设矩阵的前 r 行与前 r 列分别为矩阵的行向量组与列向量组的极大线性无关组. 从而矩阵可经初等行变换化为

$$B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

因矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量的线性关系, 故矩阵 B 的前 r 列仍为 B 的列向量组的极大线性无关组. 从而 B 可经初等列变换化为

$$C=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(B)=r$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix}\neq 0.$$

§3 用矩阵的秩判断线性方程组解的情况

1. λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3\lambda \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: 系数行列式等于 $\lambda^2(\lambda-1)$. 当 $\lambda \neq 0, 1$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ x_2 = \dfrac{\lambda+3}{\lambda-1} \\ x_3 = \dfrac{3-\lambda}{\lambda-1}, \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 一般解为: $x_1 = -x_3$, $x_2 = x_3$, x_3 是自由未知量;

当 $\lambda = 1$ 时, 原方程组无解.

2. a, b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: (a) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b-1}{b(a-1)} \\ x_2 = \dfrac{1}{b} \\ x_3 = \dfrac{2ab-4b+1}{b(a-1)}; \end{cases}$$

(b) 当 $b = 0$ 时, 或当 $a = 1$, $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时, 原方程组无解;

(c) 当 $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ 时, 一般解为: $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = 2$, x_3 是自由未知量.

3. 讨论下列含参量线性方程组的解的情况, 并求解.

(1) $\begin{cases} ax_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+abx_2+x_3=b \\ x_1+bx_2+ax_3=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3=1 \\ ax_1+(2b-1)x_2+3x_3=1 \\ ax_1+bx_2+(b+3)x_3=2b-1. \end{cases}$

解: (1) 当 $b(a-1)(a+2)\neq 0$ 时有解:

$$x_1=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)},\quad x_2=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)},\quad x_3=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)};$$

当 $a=b=-2$ 时, 有解 $x_1=x_3=-1-2x_2$;
当 $a=b=1$ 时, 有解 $x_1=1-x_2-x_3$;
其余情形无解;
(2) 当 $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ 时有解: $x_1=\dfrac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2}$, $x_2=\dfrac{\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}$, $x_3=\dfrac{-4\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}$;
当 $\lambda=1$ 时有解: $x_1=2-x_3$, $x_2=-7+2x_3$;
当 $\lambda=0$ 时无解;
(3) 当 $a\neq 0$, $b\neq\pm 1$ 时有解: $x_1=\dfrac{5-b}{a(b+1)}$, $x_2=\dfrac{-2}{b+1}$, $x_3=\dfrac{2(b-1)}{b+1}$;
当 $b=1$ 时有解: $x_2=1-ax_1$, $x_3=0$;
当 $a=0$, $b=5$ 时有解: $x_2=-\dfrac{1}{3}$, $x_3=\dfrac{4}{3}$, x_1 为任意数;
其余情形无解.

4. 利用线性方程组的理论证明: 如果直线

$$L_1:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

与直线

$$L_2:\ \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

相交, 那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

解: 根据例 3.3 的解, 如果 L_1 与 L_2 相交, 那么线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = -D_4 \end{cases}$$

有唯一解, 从而 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 3$, 这里 A 与 $\tilde{A}$ 分别是上述方程组的系数矩阵与增广矩阵. 因此行列式 $|\tilde{A}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 求三个平面 $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ 分别满足下列关系的充要条件.

(1) 有一个公共点; (2) 有一条公共直线;

(3) 三个平面平行; (4) 三个平面构成三棱柱.

解: 考察非齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \qquad (*)$$

它的系数矩阵与增广矩阵分别记为 A 与 $\tilde{A}$.

(1) 三个平面有一个公共点 $\iff$ 方程组 $(*)$ 有唯一解 $\iff$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 3 \iff |A| \neq 0$.

(2) 三个平面有一条公共直线 $\iff$ 方程组 $(*)$ 有解, 而且 $(*)$ 的导出方程组的基础解系只含一个向量 $\iff$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2$.

(3) 三个平面平行 $\iff$ $\dfrac{A_i}{A_j} = \dfrac{B_i}{B_j} = \dfrac{C_i}{C_j} \neq \dfrac{D_i}{D_j}$ $1 \leq i < j \leq 3$.

(4) 三个平面构成三棱柱 $\iff$ 方程组 $(*)$ 无解, 而 $(*)$ 的导出方程组的基础解系含一个向量 $\iff$ $\operatorname{rank}(A)=2$, $\operatorname{rank}(\tilde{A})=3$, 而且 A 中任意两行都不成比例.

§4　线性映射及其矩阵

1. 判别下列哪些映射为线性映射?

(1) 在向量空间 V 中, $\mathcal{A}(\xi)=\alpha$, 其中 α 为固定向量;

(2) $$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ K^2 &\longrightarrow K^3\\ (x,y) &\longmapsto (-1,2,3)\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ K^3 &\longrightarrow K^3\\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto (2x_1+x_2-x_3,-x_2+x_3,x_1+2x_2-x_3)\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ K^3 &\longrightarrow K^2\\ (x,y,z) &\longmapsto (x^2+y^2-z,xy)\end{aligned}$$

(5) $\mathcal{A}(\S\varepsilon_\infty+\dagger\varepsilon_\in+\ddagger\varepsilon_\ni)=(\S+\dagger)\varepsilon_\infty+(\S-\dagger+\ddagger)\varepsilon_\in+(\dagger-\ddagger)\varepsilon_\ni$, 其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为线性空间 V 的基;

(6) 几何空间 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathcal{R}$ 为平面按逆时针方向绕原点旋转 45° 的变换.

解: (1) 如 $\alpha=0$, 是; 如 $\alpha\neq 0$, 不是.

(2) 不是.

(3) 是.

(4) 不是.

(5) 是.

(6) 是.

2. 对于上题中的线性映射, 求出它们在相应基下的矩阵 (如未指明基, 则取自然基).

解: (1) $\alpha=0$ 时为零矩阵.

(3) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix}\cos 45^\circ&-\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ&\cos 45^\circ\end{pmatrix}$.

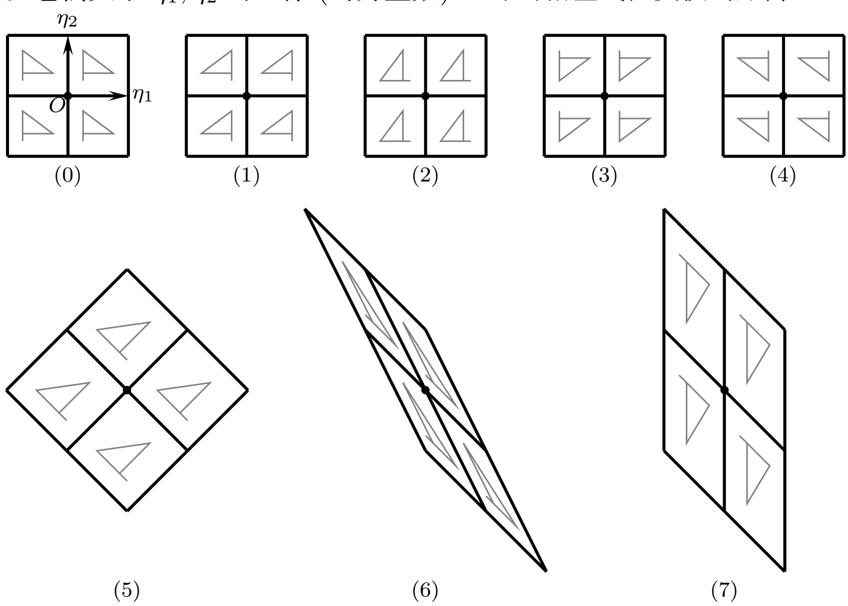
3. 设 $\mathcal{A}$ 为向量空间 V_1 到向量空间 V_2 的线性映射, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V_1$, $\mathcal{A}(\alpha_\rangle) = \beta_\rangle$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 证明: 如果$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关.

证明: 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) = 0 \\
\Rightarrow &k_1\mathscr{A}(\alpha_1) + k_2\mathscr{A}(\alpha_2) + \cdots + k_m\mathscr{A}(\alpha_m) = 0 \\
\Rightarrow &k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m = 0,
\end{aligned}$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关, 可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

4. 下面图中的 (1)–(7) 都是图 (0) 经过整系数矩阵的线性变换而得到的. 图 (0) 中标出了原点 O 及基向量 η_1, η_2. 试通过确定基向量在图 (1)–(7) 中的象以及它们关于 η_1, η_2 的坐标 (均为整数) 以写出相应线性变换的矩阵.



第 4 题图

解: (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

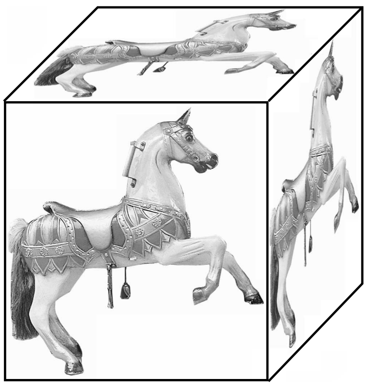
(4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. 有一个边长为 1 的立方体的每个表面都贴上了相同的浮雕马的平面图. 广告设计师决定采用第三章 §8 所述的斜二测投影画出它的立体图 (如附图). 他发现只要对正面的图形作两个线性变换就能得到顶面和侧面的两个图形 (为什么?). 如果把每个侧面的左下角取为原点, 请写出顶面和右侧面的图形对应的变换矩阵.



第 5 题图

解: 顶面: $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$, 右侧面: $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

§5　线性映射及矩阵的运算

1. 计算下列矩阵的运算结果:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$;

求 AB, $AB-BA$, $(A-B)^2$.

解: (1) $AB=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $(A+B)^2=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $AB=\begin{pmatrix} ac+ba+cb & ac+ba+cb & a^2+b^2+c^2 \\ ac+ba+cb & a^2+b^2+c^2 & ac+ba+cb \\ a^2+b^2+c^2 & ac+ba+cb & ac+ba+cb \end{pmatrix}$,

$$AB-BA=\begin{pmatrix} (b-c)(a-b) & -(a-c)(a-b) & (a-b)^2 \\ -(a-c)(a-b) & (a-b)^2 & (b-c)(a-b) \\ (a-b)^2 & (b-c)(a-b) & -(a-c)(a-b) \end{pmatrix},$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} (a-c)(a+b-2c) & 0 & -(a-c)(a+b-2c) \\ -(a-b)(a+b-2c) & 0 & (a-b)(a+b-2c) \\ -(b-c)(a+b-2c) & 0 & (b-c)(a+b-2c) \end{pmatrix}.$$

2. 计算:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$

(4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$;

(5) $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$;

(8) $(\lambda E_n + A)^n$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

(5) $(a^2 + b^2 + c^2)$.

(6) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

(8) $\lambda^n \left(E - \dfrac{1}{n}A\right) + \dfrac{1}{n}(\lambda + n)^n A$.

3. 计算矩阵多项式, 设

(1) $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 11 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. 如果 $AB = BA$, 称矩阵 A 与 B 可交换. 设

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

求所有与 A 可交换的矩阵.

解: (1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & c & a+b-c \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

5. 设

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad 其中\ a_i \neq a_j,\ \forall i \neq j.$$

证明: 与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明: 设 $B = (b_{ij})$ 与 A 可交换, 则

$$a_i b_{ij} = b_{ij} a_j, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$(a_i - a_j) b_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

但当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$, 所以对于 $i \neq j$ 有 $b_{ij} = 0$, 即

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

*****6.** 证明: 与所有矩阵可交换的矩阵只能是标量矩阵.

证明: 显然标量矩阵与所有矩阵可交换. 设 B 与所有矩阵可交换, 则由上题知 $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$. 又对任意的 $i\neq j$ 有 $BE_{ij}=E_{ij}B$, 因此对 $i\neq j$ 有 $b_i=b_j$, 即 $b_1=b_2=\cdots=b_n=b$, 所以 $B=bE_n$.

***7.** 证明: 不存在矩阵 A, B, 使 $AB-BA=E_n$.

证明: $AB-BA$ 的对角线元素之和 $=\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}\right)-\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}\right)$ $=0$, 而 E_n 的对角线元素之和 $=n$, 可见 $AB-BA\neq E_n$.

8. 设 $A=B+E$. 证明: $A^2=2A$ 当且仅当 $B^2=E$.

证明: $(\Rightarrow)$ $B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E=E$.

$(\Leftarrow)$ $A^2=(B+E)^2=B^2+2B+E=2(B+E)=2A$.

9. 已知数域 K 上的两个方阵 A 与 B 可交换. 证明:

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;

(3) $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k A^kB^{n-k}$.

证明: 略.

10. 证明: 上 (下) 三角形矩阵的乘积还是上 (下) 三角形矩阵.

证明: 设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是上三角形矩阵, 即对 $i>j$ 有 $a_{ij}=0$ 以及 $b_{ij}=0$. 于是当 $i>j$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}&=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot b_{kj}+\sum_{k=i}^n a_{ik}\cdot 0=0,\end{aligned}$$

因此 AB 是上三角形矩阵. 对于下三角形矩阵也可以类似地证明.

11. 求出平方为零的所有二阶方阵.

解: 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $A^2=0$. 如果 $b_{12}=0$, 则

$$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}^2&(a_{11}+a_{22})a_{12}\\0&a_{22}^2\end{pmatrix}=0,$$

于是 $a_{11}=a_{22}=0$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$.

再设 $a_{12} = b \neq 0$, $a_{11} = a$, 由于 $0 < \mathrm{rank}(A) = 1 < 2$, 则有 $A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}$. 于是

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(a+kb) & ka(a+kb) \\ b(a+kb) & kb(a+kb) \end{pmatrix} = 0.$$

由于 $b \neq 0$, 可得 $a + kb = 0$, $k = -\dfrac{a}{b}$. 因此矩阵 A 的可能形式是

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

*$\mathbf{12.}$ 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times s$ 非零矩阵 B, 使 $AB = 0$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}\, A < n$.

证明: ($\Rightarrow$) 设有非零矩阵 B 使得 $AB = 0$, 则 B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 而且其中有非零解. 因此 $\mathrm{rank}\, A < n$.

($\Leftarrow$) 设 $\mathrm{rank}\, A < n$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

令

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times s} \neq 0,$$

则 $AB = 0$.

*$\mathbf{13.}$ 设 A, B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵. 证明: 如果 $AB = 0$, 则

$$\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B \leq n.$$

证明: B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 而这个齐次线性方程组的解空间最多含有 $n - \mathrm{rank}\, A$ 个线性无关的向量, 从而

$$\mathrm{rank}\, B \leq n - \mathrm{rank}\, A,$$

移项得 $\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B \leq n$.

***14.** 设 A 为 $n\times r$ 矩阵, B 为 $r\times s$ 矩阵, $\operatorname{rank} B=r$. 证明:

(1) 如果 $AB=0$, 则 $A=0$;

(2) 如果 $AB=B$, 则 $A=E$.

证明: (1) 由上题, $\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B\le r$, 由 $\operatorname{rank} B=r$ 可得 $\operatorname{rank} A=0$, 从而 $A=0$.

(2) 因为 $(A-E)B=0$, 由 (1) 得 $A-E=0$, $A=E$.

15. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 证明: 如果对所有的 n 维向量 $X=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $AX=0$, 则 $A=0$.

证明: 由假设知单位矩阵的列向量也是 $AX=0$ 的解, 因此 $A=AE=0$.

§6　矩阵乘积的行列式与矩阵的逆

1. 计算下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: (1) $-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(5) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(6) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -4 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 求下列矩阵的伴随矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -11 & 10 \\ 6 & -14 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 如果存在常数项非零的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$, 则 A 可逆.

证明: 设 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$, $a_m \neq 0$, 使

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE = 0,$$

则

$$A\left(-\frac{a_0}{a_m}A^{m-1} - \frac{a_1}{a_m}A^{m-2} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{a_m}E\right) = E,$$

因此 A 可逆.

4. 设 $B^3 = 0$. 证明: $E - B$ 可逆, 并求 $E - B$ 的逆.

证明: 因为 $(E-B)(E+B+B^2) = E - B^3 = E$, 所以 $E - B$ 可逆, 且 $(E-B)^{-1} = E + B + B^2$.

5. 设 $A^3 = 2E$, $B = A^2 + 2A - E$, 求 B^{-1}.

证明: 由矩阵方程组

$$\begin{cases} B = A^2 + 2A - E \\ AB = 2A^2 - A + 2E \\ A^2B = -A^2 + 2A + 4E \end{cases}$$

通过加减消去法使等式右边只含 E, 可得 $(5A^2 + 4A - 3E)B = 31E$, 因此

$$B^{-1} = \frac{1}{31}(5A^2 + 4A - 3E).$$

6. 设 $A^2 = A$, 证明: $E + A$ 可逆, 并求 $(E + A)^{-1}$.

证明: 设 $B = E + A$, 则 $A = B - E$, 因此 $(B - E)^2 = B - E$, $B^2 - 3B = -2E$, $B(3E - B) = 2E$. 因此 $B^{-1} = \frac{1}{2}(3E - B) = \frac{1}{2}(3E - E + A) = E - \frac{1}{2}A$.

7. 设 $A, B \in M_n(K)$, 证明: 如果 $AB = kE_n$ $(k \neq 0)$, 则 $BA = kE_n$.

证明: 由 $AB = kE_n$ $(k \neq 0)$ 可得 $A^{-1} = \frac{1}{k}B$, $B = kA^{-1}$. 因此 $BA = kA^{-1}A = kE$.

8. 证明: (1) 上 (下) 三角形矩阵的伴随矩阵还是上 (下) 三角形矩阵;

(2) 可逆的上 (下) 三角形矩阵的逆矩阵还是上 (下) 三角形矩阵.

证明: (1) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则当 $j > i$ 时, a_{ij} 的余子式 M_{ij} 还是上三角形的, 且 M_{ij} 的 (i, i) 元素 $= A$ 的 $(i + 1, i)$ 元素 $= 0$, 所以 $M_{ij} = 0$ $(j > i)$. 从而当 $j > i$ 时有 $A_{ij} = 0$. 因此伴随矩阵 A^* 是上三角形矩阵. 类似可证下三角形的情形.

(2) 如 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 仍为三角形矩阵.

9. 证明: 对任何 n 阶方阵 A, 必存在 $\lambda_0 \in K$, 使得 $\lambda_0 E_n - A$ 是可逆阵.

证明: 因为 $|\lambda E - A|$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式, 而 n 次多项式在 K 上最多有 n 个根, 故必存在 $\lambda_0 \in K$ 使得 $|\lambda_0 E - A| \neq 0$. 从而 $\lambda_0 E - A$ 可逆.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 求多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = A^*$.

解: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A - 4\left[\frac{1}{2}(A - E)\right] = 2E - A$, 所以 $f(x) = -x + 2$.

11. 证明: 对所有的 $A \in M_2(K)$, 存在 $f(\lambda) = a\lambda + b$, 使 $f(A) = A^*$.

证明: 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, 所以 $A + A^* = (a+d)E$, $A^* = -A + (a+d)E$. 故 $f(\lambda) = -\lambda + (a+d)$.

*__12.__ 设 $A \in M_n(K)$, 证明:

$$\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} A = n \\ 1, & \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} A < n-1 \end{cases}$$

证明: (i) 当 $\operatorname{rank} A = n$ 时, A 可逆, $|A| \neq 0$. 而 $AA^* = |A|E$, 故 A^* 也可逆, 从而 $\operatorname{rank} A^* = n$.

(ii) 当 $\operatorname{rank} A < n-1$ 时, A 的 $n-1$ 阶子式都等于 0, 因此 $A_{ij} = 0$, $A^* = 0$, 所以 $\operatorname{rank} A^* = 0$.

(iii) 当 $\operatorname{rank} A = n-1$ 时, A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0, 所以 $A^* \neq 0$. 说明 $\operatorname{rank} A^* \geq 1$. 另一方面有 $AA^* = |A|E = 0$, 所以 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A^* \leq n$. 由于 $\operatorname{rank} A = n-1$, 可得 $\operatorname{rank} A^* \leq 1$. 因此 $\operatorname{rank} A^* = 1$.

*__13.__ 设 $A \in M_n(K)$ $(n > 2)$, 证明:

(1) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明: 当 $\operatorname{rank} A = n$ 时, $AA^* = |A|E$, 所以 $|A||A^*| = |A|^n$, $|A^*| = |A|^{n-1}$. 于是 $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$. 由 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$ 可得 $A^* = |A|A^{-1}$, 故 $(A^*)^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-2}A$.

当 $\operatorname{rank} A = n-1$ 时, $\operatorname{rank} A^* = 1$, 所以 $(A^*)^* = 0 = |A|^{n-2}A$, $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$.

当 $\operatorname{rank} A < n-1$ 时, $A^* = 0$, 上述等式也成立.

§7 矩阵的分块

1. 设 A, B 为两个同阶矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A \mid B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

证明: 设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, B 的列向量组为 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, 则 $A+B$ 的列向量组为 $\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n$, $(A \mid B)$ 的列向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1,$

$\cdots,\beta_n$, 从而由习题 5–1.7,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B)&=\operatorname{rank}\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\}\\&\leq\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n\}=\operatorname{rank}(A\mid B)\\&\leq\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}+\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\\&=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B.\end{aligned}$$

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\2&1&1&-3\\3&2&1&2\end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解: 设

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}AA^{-1}&=\begin{pmatrix}0&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{12}B_{21}&A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}E_2&0\\0&E_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&B_{21}=A_{12}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},\\&B_{22}=0,\quad(\text{因 }A_{12}\text{ 可逆})\\&B_{12}=A_{21}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix},\\&B_{11}=-A_{21}^{-1}A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}-1&9\\1&-14\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 9 & 2 & -1\\ 1 & -14 & -3 & 2\\ \hline 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right).$$

3. 设 A 为可逆的 n 阶方阵,

$$D=\left(\begin{array}{c|c}0 & A\\ \hline a & 0\end{array}\right),\quad a\neq 0,$$

求 D^{-1}.

解: $D^{-1}=\begin{pmatrix}0 & a^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

4. 设 A_i 为 r_i 阶可逆方阵 $(i=1,2,\cdots,s)$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & & & A_1\\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & 0\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}.

解: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & & & A_s^{-1}\\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & 0\end{pmatrix}$.

5. 设 E_i 为 r_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 阶单位矩阵, 而

$$A=\begin{pmatrix}a_1E_1 & & & 0\\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_sE_s\end{pmatrix},\quad a_i\neq a_j,\ i\neq j,$$

证明: 与 A 可交换的矩阵只能是分块对角矩阵.

证明: 设分块矩阵 $B=(B_{ij})$ 与 A 可交换, 而且 B 的分块方式与 A 相同. 则由 $AB=BA$ 得

$$a_iB_{ij}=B_{ij}a_j,\qquad i,j=1,\cdots,s.$$

于是

$$(a_i-a_j)B_{ij}=0,\qquad i,j=1,\cdots,s.$$

但当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$, 所以对于 $i \neq j$ 有 $B_{ij} = 0$, 即

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \quad a_i \neq 0,\ i = 0, 1, 2, \cdots n,$$

求 A^{-1}.

解: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ a_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

7. 设矩阵 $A_{m\times s}$, $B_{t\times n}$ 的秩分别为 r_A, r_B, C 为任意的 $m \times n$ 矩阵, 而

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

证明: 矩阵 D 的秩 $r_D \geq r_A + r_B$.

证明: 设 A 的行向量组的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r_A}}$, B 的行向量组的极大线性无关组为 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_{r_B}}$. 则

$$\gamma_1 = (\alpha_{i_1}, \underbrace{* \cdots *}_{n}), \gamma_2 = (\alpha_{i_2}, \underbrace{* \cdots *}_{n}), \cdots, \gamma_{r_A} = (\alpha_{i_{r_A}}, \underbrace{* \cdots *}_{n})$$

线性无关.

$$\delta_1 = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_1}), \delta_2 = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_2}), \cdots, \delta_{r_B} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_{r_B}})$$

线性无关. 显然

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B},$$

线性无关, 所以

$$r_D \geq \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B}\} = r_A + r_B.$$

8. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 证明: $\operatorname{rank} A = 1$ 的充分必要条件是存在 m 维非零向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 与 n 维非零向量 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 使 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $\operatorname{rank}(A) = 1$, 则 A 必有一行 (设为 $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$) 不等于 0, 而其余各行都是这一行的倍数, 从而

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n) = \alpha^{\mathrm{T}}\beta.$$

$(\Leftarrow)$ 设 α, β 是两个非零向量, 则必有某个 $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$, 从而 $a_ib_j \neq 0$, 使得 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = (a_ib_j) \neq 0$. 于是

$$1 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min\{\operatorname{rank}(\alpha), \operatorname{rank}(\beta)\} = 1.$$

***9.** 设 A 为二阶方阵. 证明: 如果 $A^k = 0$, 则 $A^2 = 0$.

证明: 由 $A^k = 0$ 可得 $|A| = 0$. 故 $\operatorname{rank} A \leq 1$. 如果 $\operatorname{rank} A = 0$, 则 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $\operatorname{rank} A = 1$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1\ \cdots\ b_n), \qquad (\text{习题 } 4\text{–}5.12)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1\ \cdots\ b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1\ \cdots\ b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_iA,$$

$$A^k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^{k-1} A = 0.$$

由于 $A \neq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i = 0$. 所以 $A^2 = 0$.

***10.** 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid B)$.

证明: ($\Rightarrow$) 设矩阵方程 $AX=B$ 有解 $X=C$, 则 $AC=B$. 从而 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示, 所以

$$\operatorname{rank}(A \mid B)=\operatorname{rank} A.$$

($\Leftarrow$) 如果 $\operatorname{rank}(A \mid B)=\operatorname{rank} A$, 则 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示, 即存在$(c_{1j},\cdots,c_{nj})^{\mathrm{T}}$ 使得

$$A\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad j=1,\cdots,n.$$

令

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则 $AC=B$.

*__11.__ 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 证明: 齐次线性方程组 $AX=0$ 与齐次线性方程组 $BAX=0$ 同解的充分必要条件是 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} BA$.

证明: 首先, $AX=0$ 的解都是 $BAX=0$ 的解, 从而 $BAX=0$ 的基础解系至少含有 $n-\operatorname{rank} A$ 个解. 又因为 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} BA$, 所以 $BAX=0$ 的基础解系恰含有 $n-\operatorname{rank} A$ 个解. 故 $AX=0$ 的基础解系也是 $BAX=0$ 的基础解系. 因此 $AX=0$ 与 $BAX=0$ 同解.

反之, 如果 $AX=0$ 与 $BAX=0$ 同解, 则它们的基础解系含有相同个数的解. 因此 $n-\operatorname{rank} A=n-\operatorname{rank} BA$, $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} BA$.

§ 8 初等矩阵

1. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\dfrac{1}{4}A$.

2. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: (1) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

或

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(3)\ X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 用多种方法求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解: 仅介绍两种解法:

(i) 因为 $AA = 4E$, 所以 $A^{-1} = \dfrac{1}{4}A$.

(ii) 分块: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}A_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_1 & E & 0 \\ A_1 & -A_1 & 0 & E \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_1 & E & 0 \\ 0 & -2A_1 & -E & E \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E \\ 0 & -2A_1 & -E & E \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}A_1^{-1} & \frac{1}{2}A_1^{-1} \\ 0 & E & \frac{1}{2}A_1^{-1} & -\frac{1}{2}A_1^{-1} \end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-1} \\ A_1^{-1} & -A_1^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}A.$$

***4.** 设 $A,B,C,D\in M_n(K)$, $|A|\neq 0$, $AC=CA$. 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证明: 因 $|A|\neq 0$, 故 A 可逆. 而

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}&=|A||D-CA^{-1}B|\\ &=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CB|.\end{aligned}$$

***5.** 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}=|A-\mathrm{i}B||A+\mathrm{i}B|.$$

(其中 i 为虚数单位, $\mathrm{i}^2=-1$.)

证明: 因为

$$\begin{pmatrix} E & \mathrm{i}E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -\mathrm{i}E \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-\mathrm{i}B & 0 \\ -B & A+\mathrm{i}B \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}=|A-\mathrm{i}B||A+\mathrm{i}B|.$$

***6.** 设 $A\in M_{m,r}(K)$. 证明:

(1) A为列满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $P\in M_m(K)$, 使$A=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) A 为列满秩矩阵的充分必要条件是存在行满秩矩阵 $B\in M_{r,m}(K)$, 使 $BA=E_r$.

证明: (1) 因 A 列满秩, A 的典范形为 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 从而存在可逆矩阵 P_1, Q_1, 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix},$$

则

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这就证明了必要性, 而充分性是显然的.

(2) 充分性是显然的, 再证必要性.

由 (1) 知, 存在可逆矩阵 P, 使 $A = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 则

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

令

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix},$$

则 B 行满秩, 且 $BA = E_r$.

***7.** 对于行满秩矩阵, 叙述并证明类似的结论.

解: (1) A为行满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $Q \in M_m(K)$, 使$A = (E_r\ 0)Q$.

(2) A 为行满秩矩阵的充分必要条件是存在列满秩矩阵 $B \in M_{m,r}(K)$, 使 $AB = E_r$.

(证明略)

8. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r. 证明: 存在列满秩矩阵 P 和行满秩矩阵 Q, 使 $A = PQ$.

证明: 存在可逆矩阵 P_1, Q_1, 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = (E_r\ 0)Q_1,$$

则 P 列满秩, Q 行满秩, 且

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} (E_r\ 0)Q_1 = PQ.$$

*9. 设 A, B 分别为 $n \times m$ 与 $m \times n$ $(n \geq m)$ 矩阵, $\lambda \neq 0$. 证明:

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|.$$

证明: 由于

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n - AB & 0 \\ B & E_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & \lambda E_m - BA \end{pmatrix},$$

所以

$$|\lambda E_n - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix},$$

$$|\lambda E_m - BA| = \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} \lambda^m|\lambda E_n - AB| &= \lambda^m \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ \lambda B & \lambda E_m \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^n|\lambda E_m - BA|. \end{aligned}$$

因此

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|.$$

*10. 设 A, B 分别为 $s \times n$ 与 $n \times m$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n.$$

证明: $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB)+n &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B, \quad (4\text{–}7.7)\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$.

*$\mathbf{11.}$ 设 A, B, C 分别为 $s\times n$, $n\times m$ 与 $m\times t$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank} B.$$

证明: $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix}.$$

所以

$$\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC),$$

$$\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank} B.$$

*$\mathbf{12.}$ 设 $A\in M_n(K)$, 证明:

$$A^2=E_n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n.$$

证明: $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} A+E_n & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{c|c} 2E_n & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 2E_n & A+E_n \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(A^2-E_n) \end{array}\right),$$

所以

$$\operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n+\operatorname{rank}(A^2-E_n).$$

$$\operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n \iff \operatorname{rank}(A^2-E_n)=0 \iff A^2=E_n.$$

*$\mathbf{13.}$ 设 $A\in M_n(K)$, 证明:

$$A^2=A \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-E_n)=n.$$

证明: $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A-E_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} A & -E_n \\ \hline 0 & A-E_n \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E_n \\ \hline A^2-A & A-E_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline A^2-A & 0 \end{array}\right).$$

所以

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A-E_n) = n + \operatorname{rank}(A^2-A).$$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A-E_n) = n \Leftrightarrow A^2 = A.$$

*__14.__ 设 $A \in M_n(K)$ 是可逆矩阵, X, Y 为 n 维列向量, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = -X^{\mathrm{T}} A^* Y.$$

证明:

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & -X^{\mathrm{T}}A^{-1}Y \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = |A||-X^{\mathrm{T}}A^{-1}Y| = -X^{\mathrm{T}}|A|A^{-1}Y = -X^{\mathrm{T}}A^*Y.$$

*§9 线性映射的象空间与核空间

1. 设 $\mathscr{A}$ 为向量空间 V_1 到 V_2 的线性映射, $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 的核与象的维数与基;

(2) 分别将 $\mathscr{A}$ 的核与象的基扩充为 V_1 与 V_2 的基.

解: (1) 因为 $\operatorname{rank} A = 3$, 因此象空间的维数为 3. A 的列向量组的极大线性无关组构成象空间的基:

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1) = (-1,2,1,-1), \mathscr{A}(\varepsilon_2) = (0,-3,-3,1), \mathscr{A}(\varepsilon_5) = (3,-4,-1,2).$$

核的维数 $= 5-3 = 2$, $AX = 0$ 的基础解系构成核空间的基:

$$\xi_1 = (2,1,1,0,0), \xi_2 = (1,1,0,1,0).$$

(2) ξ_1, ξ_2 可扩充为 V_1 的基:

$$\xi_1, \xi_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5.$$

$\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \mathscr{A}(\varepsilon_5)$ 可以扩充为 V_2 的基:

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \mathscr{A}(\varepsilon_5), (1,0,0,0).$$

2. 设 $\mathscr{A}$ 为 K^3 的线性变换, 使

$$\mathscr{A}(x,y,z) = (x+y-z, x+y+z, x+y-2z).$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 的零化度与秩;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与象空间.

解: (1) 零化度 $=1$, 秩 $=2$.

(2) 核 $= L((1,-1,0))$, 象 $= L((1,1,1),(-1,1,-2))$.

3. 设 W_1, W_2 为 V 的两个子空间, 且 $\dim W_1 + \dim W_2 = n$. 证明: 存在线性变换 $\mathscr{A}$, 使 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = W_1$, $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W_2$.

证明: 设 W_1 的基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, W_2 的基为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$. 将 W_1 的基扩充为 V 的基: $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 对任意的 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$, 定义

$$\mathscr{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-r} a_{r+i}\beta_i,$$

则 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换, 且 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = W_1$, $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W_2$.

4. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维向量空间的线性变换, V_1, V_2 为 V 两个线性子空间. 证明: 如果 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = V_1 \cap V_2$, 则存在线性变换 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, 使 $V_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_1$, $V_2 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_2$, 且 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

证明: 设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 为 $V_1 \cap V_2$ 的基, 将它扩充为 V_1 的基: $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t$, 扩充为 V_2 的基: $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$. 则由维数公式知 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 为 $V_1 + V_2$ 的基. 再把它扩充为 V 的基:

$$\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_s, \eta_1, \cdots, \eta_u, \qquad (r+t+s+u=n).$$

分别定义线性变换如下:

$$\mathscr{A}_1(\gamma_i) = 0, \quad \mathscr{A}_1(\alpha_i) = 0, \quad \mathscr{A}_1(\beta_i) = \mathscr{A}(\beta_i), \quad \mathscr{A}_1(\eta_i) = \mathscr{A}(\eta_i),$$

$$\mathscr{A}_2(\gamma_i) = 0, \quad \mathscr{A}_2(\alpha_i) = \mathscr{A}(\alpha_i), \quad \mathscr{A}_2(\beta_i) = 0, \quad \mathscr{A}_2(\eta_i) = 0.$$

则易证 $V_1 \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}_1$, $V_2 \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}_2$, 且 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

5. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 n 维向量空间 V 的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, $\mathscr{B}^2 = \mathscr{B}$. 证明:

(1) $\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Im} \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}, \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$;

(2) $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \operatorname{Ker} \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}, \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

证明: (1) ($\Rightarrow$) 对任意的 $\alpha \in V$ 存在 $\beta \in V$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta)$. 所以

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B}^2(\beta) = \mathscr{B}(\mathscr{B}(\beta)) = \mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha).$$

即 $\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 同理可证 $\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B}$.

($\Leftarrow$) $\mathscr{B}(V) = \mathscr{A}\mathscr{B}(V) \subseteq \mathscr{A}(V)$, $\mathscr{A}(V) = \mathscr{B}\mathscr{A}(V) \subseteq \mathscr{B}(V)$, 所以 $\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Im} \mathscr{B}$.

(2) ($\Rightarrow$) 对任意的 $\alpha \in V$, 由于

$$\mathscr{B}[(\mathscr{B} - \mathscr{E})(\alpha)] = \mathscr{B}^2(\alpha) - \mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{B}(\alpha) - \mathscr{B}(\alpha) = 0,$$

所以 $\mathscr{A}[(\mathscr{B} - \mathscr{E})(\alpha)] = 0$. 于是 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{A}(\alpha)$, $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}$. 同理可证 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

($\Leftarrow$) 对任意的 $\alpha \in \operatorname{Ker} \mathscr{B}$ 有

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{A}(0) = 0,$$

所以 $\operatorname{Ker} \mathscr{B} \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. 同理可证 $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{B}$. 因此 $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \operatorname{Ker} \mathscr{B}$.