第四章　几何空间中的平面与直线

§1　几何空间中平面的仿射性质

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程和参数方程:

(1) 过 $(-1,2,0),(-2,-1,4),(3,1,-5)$ 三点的平面;

(2) 过点 $(3,1,2)$ 和 $(1,0,-2)$, 平行于向量 $\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 的平面.

解: (1) 过 3 点的平面三点式方程是:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 4 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

展开后得

$$19x+11y+13z-3=0.$$

它的参数方程为:

$$\begin{cases} x=-1-u+4v \\ y=2-3u-v \\ z=4u-5v. \end{cases}$$

(2) 由已知条件, 平面通过 $(3,1,2)$, 它的方向向量是 $\xi_1=\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 以及 $\xi_2=(1-3,0-1,-2-2)=(-2,-1,-4)$, 因此平面的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+u-2v \\ y=1-2u-v \\ z=2-3u-4v, \end{cases}$$

平面的一般方程为

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

展开后得 $x+2y-z-3=0$.

2. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程:

(1) 过点 $(1,2,-4)$ 和 x 轴的平面;

(2) 过点 $(2,1,2)$ 以及平面 $\Pi_1: \ x+y-z=0$, $\Pi_2: \ 2x-3z-1=0$ 的交线的平面;

(3) 过点 $(0,4,-3)$ 和 $(1,-2,6)$, 且平行于 x 轴的平面;

(4) 过点 $(3,1,-2)$ 且平行于平面 $x-2y-2z+1=0$ 的平面;

(5) 过点 $(2,0,-1),(-1,3,4)$ 且与 y 轴平行的平面方程.

解: (1) 设平面的一般方程是 $Ax+By+Cz+D=0$, 因为它过 x 轴, 所以 $A=D=0$; 又因它过点 $(1,2,-4)$, 所以 $B=2C$. 故平面的方程为 $2y+z=0$.

(2) 解线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3z-1=0 \end{cases}$$

求得平面交线上的两个点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$ 以及 $\left(0,-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. 得到所求平面的三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -\dfrac{3}{2} & -2 \\ y-1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{4}{3} \\ z-2 & -2 & -\dfrac{7}{3} \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $5x+3y-6z-1=0$.

(3) 所求平面的一个方向向量是 $(1,0,0)$, 因此所求平面的方程为:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-4 & 0 & -6 \\ z+3 & 0 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $3y+2z-6=0$.

(4) 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $x-2y-2z+D=0$. 因该平面过 $(3,1,-2)$ 点, 所以 $3-2+4+D=0$, 即 $D=-5$. 故所求方程为 $x-2y-2z-5=0$.

(5) 由于该平面平行于 y 轴, 因此可设它的方程为 $Ax+Cz+D=0$. 把两个点的坐标代入, 解方程 $\begin{cases} 2A-C=D=0 \\ -A+4C+D=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} A=-\dfrac{5}{7}D \\ C=-\dfrac{3}{7}D \end{cases}$ 即平面方程为 $5x+3z-7=0$.

3. 已知一平面通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $(z_0\neq 0)$, 且在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 求它的方程.

解: 设平面在 z 轴上的截距为 c, 则该平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

又因 P_0 点在平面上, 所以 $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$, 得 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{z_0}\left(1-\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)$, 所以平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\left(1-\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\frac{z}{z_0}=1.$$

4. 求过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 且平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的平面的方程.

解: 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $Ax+By+Cz+D_1=0$. 因该平面过 P_0 点, 所以 $D_1=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 故所求平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

5. 证明命题 1.2.

证明: 因为向量与线性流形平行定义为这个向量在线性子空间 W 内, 因此 $\overrightarrow{v}$ 与平面平行的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}\in W$. 而线性子空间 W 又是由导出方程 $Ax+By+Cz=0$ 定义的, 所以 $\overrightarrow{v}\in W$ 的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}$ 的分量 (X,Y,Z) 满足导出方程, 即 $AX+BY+CZ=0$.

6. 判断下列各平面的相关位置:

(1) $2x+y-z=0$ 与 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y-\dfrac{1}{4}z+2=0$;

(2) $x-2y+z-2=0$ 与 $3x+y-2z-1=0$;

(3) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 其中 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

解: (1) 因为

$$\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{-1}{-\frac{1}{4}}\neq\frac{0}{2},$$

所以两平面平行.

(2) 因为 $\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{-2}{1}$, 所以两平面相交.

(3) 因为 $A_1:B_1\neq A_2:B_2$, 所以两平面相交.

7. 已知两个平面 $\Pi_1:\ x-2y+pz-1=0$, $\Pi_2:\ 2x-4y+5z+q=0$. 问当 p,q 取何值时:

(1) Π_1 与 Π_2 相交;　　(2) Π_1 与 Π_2 平行;　　(3) Π_1 与 Π_2 重合.

解: (1) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{p}{5}$, 即 $p\neq\frac{5}{2}$, q 取任意实数时两平面相交.

(2) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{p}{5}\neq\frac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\frac{5}{2}$, $q\neq-2$ 时两平面平行.

(3) 当 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{p}{5}=\frac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\frac{5}{2}$, $q=-2$ 时两平面重合.

8. 已知点 $A(3,10,-5)$ 和平面 $\Pi:\ 7x-4y-z-1=0$. 求 z 轴上的点 B 的坐标, 使 AB 平行于 Π.

解: 设 B 点的坐标为 $(0,0,k)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(-3,-10,k+5)$. 根据命题 8.2, $\overrightarrow{AB}$ 的分量必须满足 $7(-3)-4(-10)-(k+5)=0$, 即 $k=14$. 故 B 点的坐标为 $(0,0,14)$.

9 坐标满足方程 $(ax+by+cz+d)^2-(px+qy+rz+s)^2=0$ 的点的轨迹.

解: $(ax+by+cz+d)^2-(px+qy+rz+s)^2=0$ 当且仅当

$$((a-p)x+(b-q)y+(c-r)z+(d-s))((a+p)x+(b+q)y+(c+r)z+(d+s))=0.$$

所以点的轨迹为

$$(a-p)x+(b-q)y+(c-r)z+(d-s)=0 \tag{$*$}$$

$$(a+p)x+(b+q)y+(c+r)z+(d+s)=0 \tag{$**$}$$

当 $(a,b,c,d)=\pm(p,q,r,s)$ 时, 轨迹为全空间; 当 $(a,b,c)=(p,q,r)$, $d\neq s$ 时, 轨迹是平面 $(**)$; 当 $(a,b,c)=-(p,q,r)$, $d\neq -s$ 时, 轨迹是平面 $(*)$; 其余情形轨迹是平面 $(*)$ 与 $(**)$ 的并.

10. 证明三个平面

$$\begin{aligned}&a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\&a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\&k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)+m=0\end{aligned}$$

当 $m\neq kd_1+ld_2$ 时, 没有公共点.

证明: 三个平面有公共点当且仅当线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=-d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=-d_2\\k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)=-m\end{cases}$$

有解. 对这个方程组作初等变换, 从第 3 个方程减去第 1 个方程的 k 倍和第 2 个方程的 l 倍后得到 $0 = kd_1 + ld_2 - m$, 当 $m \neq kd_1 + ld_2$ 时, 这是个矛盾方程, 因此没有公共点.

*__11.__ 证明任何一个经过相交的两平面

$$\Pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\Pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

的相交直线 L 的平面方程能写成

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中, α, β 是不全为零的实数.

证明: L 中的点的坐标满足 Π_1 与 Π_2 的方程, 从而也满足方程 $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, 因此 L 在此平面上.

反之, 如果平面 Π' 通过直线 L, 我们可在 Π' 上取一个不含于 L 的点 $M(x_0, y_0, z_0)$. 令

$$\alpha_0 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2,\ \beta_0 = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1,$$

由于 $M \notin L$, 所以 $\alpha_0, beta_0$ 不全为 0. M_0 的坐标显然满足以下方程:

$$\alpha_0(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \beta_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

由前面的讨论知上述方程确定的平面一定通过交线 L, 由通过一条直线及线外一点的平面的唯一性, 可见上述方程定义的平面就是 Π'.

12. 设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 与连接两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线相交于点 M, 而且 $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{MM_2}$. 证明:

$$k = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

证明: 设点 M 的坐标是 (x_0, y_0, z_0), 则由定比分点公式知

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + kx_2}{1 + k} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + ky_2}{1 + k} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + kz_2}{1 + k} \end{cases} \qquad (k \neq -1).$$

但由于 $M_0 \in \Pi$, 所以

$$A\frac{x_1 + kx_2}{1 + k} + B\frac{y_1 + ky_2}{1 + k} + C\frac{z_1 + kz_2}{1 + k} + D = 0,$$

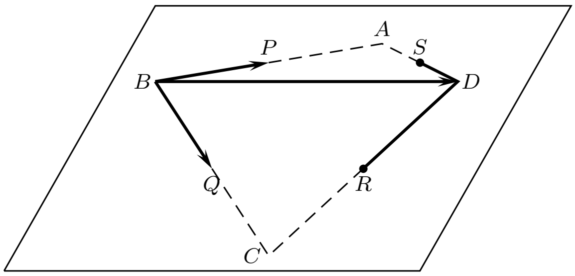
化简后即得

$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

*$\mathbf{13.}$ 一平面与空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 分别交于 P, Q, R, S, 则

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

试证之.



第 13 题图

证明: 如图, 我们以 B 点为原点, 以 $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{BD}$ 为基向量构作一个仿射坐标系 $[B;\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BD}]$. 令

$$\overrightarrow{QC}=a\overrightarrow{BQ},\ \overrightarrow{CR}=b\overrightarrow{RD},\ \overrightarrow{DS}=c\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{PA}=d\overrightarrow{BP}.$$

设

$$\overrightarrow{BR}=k\overrightarrow{BQ}+l\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},\quad \overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_3},$$

则

$$\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BC}=(k-1-a)\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},$$
$$\overrightarrow{RD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BR}=-k\overrightarrow{e_2}+(1-l)\overrightarrow{e_3}.$$

由 $\overrightarrow{CR}=b\overrightarrow{RD}$ 可得:

$$\begin{cases}k-1-a=-bk\\ l=b(1-l),\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}a=\dfrac{k+l-1}{1-l}\\ b=\dfrac{l}{1-l}.\end{cases}$$

又因

$$\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{e_1}+(n-1)\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BS}=(1+d-m)\overrightarrow{e_1}-n\overrightarrow{e_3}.$$

由 $\overrightarrow{DS}=c\overrightarrow{SA}$ 可得:

$$\begin{cases}m=c(1+d-m)\\ n-1=-cn,\end{cases}\qquad 即\begin{cases}c=\dfrac{1-n}{n}\\ d=\dfrac{m+n-1}{1-n}.\end{cases}$$

所以

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{dbc}{a}=\frac{l(m+n-1)}{n(k+l-1)}.\tag{$*$}$$

又,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR}&=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BQ}=(k-1)\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},\\ \overrightarrow{QP}&=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2},\\ \overrightarrow{QS}&=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BQ}=m\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+n\overrightarrow{e_3},\end{aligned}$$

因为这 3 个向量共面, 所以

$$\begin{vmatrix}0&1&m\\ k-1&-1&-1\\ l&0&n\end{vmatrix}=l(m-1)-n(k-1)=0.$$

从而

$$l(m+n-1)=ln+l(m-1)=ln+n(k-1)=n(k+l-1).$$

将上式代入 (*) 即得:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

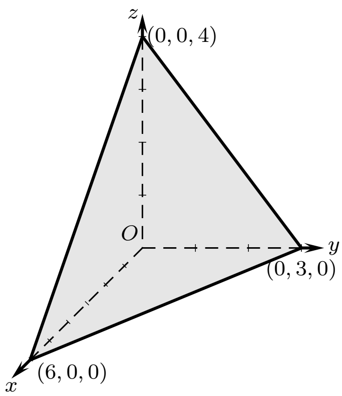
14 画出以下平面的直观图:

(1) $2x+4y+3z-12=0$; (2) $4x+3y+12z=0$;

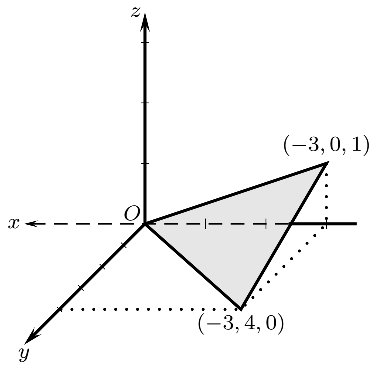
(3) $2x-5y-10=0$; (4) $3y-2z-6=0$;

(5) $4x+3y=0$; (6) $y=-3$.

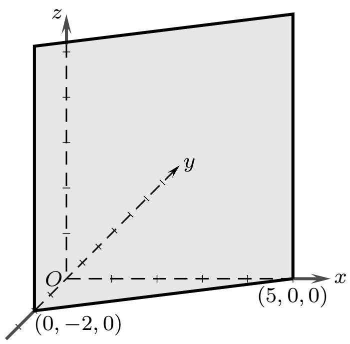
解:



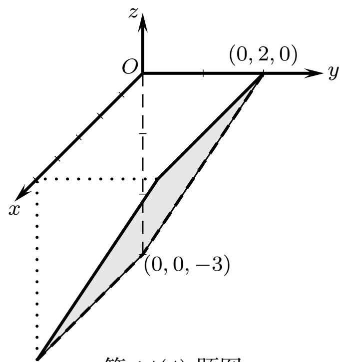
第 14(1) 题图



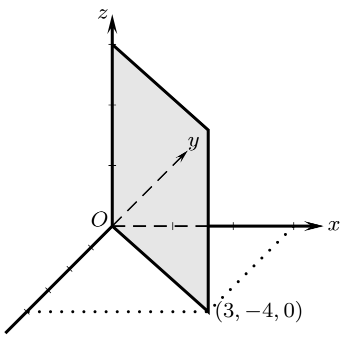
第 14(2) 题图



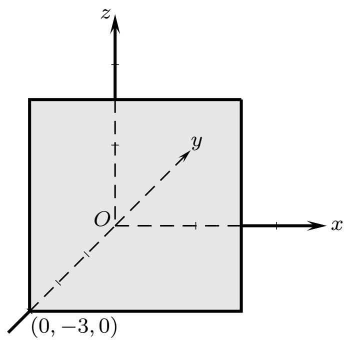
第 14(3) 题图



第 14(4) 题图



第 14(5) 题图



第 14(6) 题图

§2 几何空间中平面的度量性质

1. 试求通过点 $A(1,1,1)$ 与 $B(1,0,2)$ 且垂直于平面 $x+2y-z-6=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\nu=(A,B,C)$, 则 $\nu\perp\overrightarrow{AB}$, ν 也与平面 $x+2y-z-6=0$ 的法向量垂直. 因此有方程组

$$\begin{cases}0\cdot A+(-1)B+C=0\\A+2B-C=0.\end{cases}$$

解得 $A:B:C=1:-1:-1$. 可得点法式方程 $(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$, 即 $x-y-z+1=0$.

2. 平面 Π 过 3 个点 $M_1(3,-1,5)$, $M_2(4,-1,1)$ 和 $M_3(2,0,2)$. 求平面 Π 的一个法向量, 并求出 Π 的方程.

解: 平面 Π 的一个法向量可取为 $\nu=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=(4,7,1)$. 可得点法式方程 $4(x-2)+7y+(z-2)=0$, 即 $4x+7y+z-10=0$.

3. 平面 Π 过点 $M_0(2,3,1)$, 且和两平面 Π_1 : $x+3y-z+3=0$, Π_2 : $2x+y-2z+1=0$ 都垂直, 求 Π 的方程.

解: 利用例 4.5 知平面的方程为

$$\begin{vmatrix}x-2&y-3&z-1\\1&3&-1\\2&1&-2\end{vmatrix}=-5x-5z+15=0,$$

化简得 $x+z-3=0$.

4. 平面 Π 在 x,y,z 轴上的截距分别是 $-1,\dfrac{3}{2},3$, 求自原点指向平面的单位法向量的方向余弦.

解: 利用平面的截距式方程得到该平面的方程:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{3}=1.$$

化简后得 $-3x+2y+z-3=0$. 它的法向量可取为 $\pm(-3,2,1)$. 因为点 $P_0(-1,0,0)$ 在此平面上, 而 $\overrightarrow{OP_0}$ 与本题所要求的法向量之间的夹角应该小于 $\dfrac{\pi}{2}$, 即内积大于 0. 故应取法向量为 $(-3,2,1)$. 它的方向余弦为 $\left(-\dfrac{3\sqrt{14}}{14},\dfrac{\sqrt{14}}{7},\dfrac{\sqrt{14}}{14}\right)$.

5. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 60° 角的平面 Π 的方程.

解: 过 z 轴的平面的法向量应为 $\nu=(A,B,0)$. 它应与已知平面成 60° 角, 所以 $\dfrac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{10}}=\pm\dfrac{1}{2}$. 推得 $3A=B$ 或 $A=-3B$. 故平面方程为 $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

6. 已知平面 Π: $4x-4y-2z+3=0$. 点 P 与平面 Π 的距离为 2, 求点 P 的轨迹.

解: 设满足条件的点为 $P(x,y,z)$, 则有

$$\frac{|4x-4y-2z+3|}{6}=2,$$

推得 $4x-4y-2z+3=\pm 12$. 即点 P 的轨迹是两个平行平面:

$$4x-4y-2z-9=0 \text{ 和 } 4x-4y-2z+15=0.$$

7. 已知两个平面由下式确定, 求它们的交角, 并确定点 $(0,0,1)$ 所在的两面角的大小:

$$(x+2y+4z-3)(-3x+y-z-1)=0.$$

解: 两平面的法向量分别为 $(1,2,4)$ 与 $(-3,1,-1)$. 则交角 θ 满足 $\cos\theta=\pm\dfrac{-5}{\sqrt{21}\sqrt{11}}=\pm\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$, 所以 $\theta=\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$.

为确定点 $(0,0,1)$ 所在的两面角, 计算此点关于两个平面的离差分别为 $\dfrac{1}{\sqrt{21}}$ 与 $\dfrac{-2}{\sqrt{11}}$, 由于它们异号, 因此所求两面角的大小为 $\pi-\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$.

8. 在直角坐标系下, 求下列点到平面的距离.

(1) 点 $(2,1,4)$, 平面 $2x-y+4z-12=0$;

(2) 点 $(-1,0,5)$, 平面 $x-3y+5z-2=0$.

解: (1) $d=\dfrac{|4-1+16-12|}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

(2) $d=\dfrac{|-1+25-2|}{\sqrt{35}}=\dfrac{22\sqrt{35}}{35}$.

9. 设有两平行平面 $2x-3y+6z+2=0$ 与 $4x-6y+12z-3=0$. 问: 原点 O 位于空间的哪一部分?

解: 只要计算原点 O 关于两个平面的离差. $\delta_1=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}>0$, $\delta_2=\dfrac{-3}{\sqrt{4^2+6^2+12^2}}<0$, 所以 O 在两个平面之间.

10. 在直角坐标系中, 设 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 都不在平面 Π : $Ax+By+Cz+D=0$ 上, 且 $M_1\neq M_2$. 证明: M_1 与 M_2 在平面 Π 的同侧当且仅当 $F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号.

解: M_i 位于 Π 的同侧当且仅当它们到 Π 的离差同号. 而离差等于 $\dfrac{F_i}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, 与 F_i 同号. 因此 M_i 位于 Π 的同侧当且仅当 F_1 与 F_2 同号.

11. 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的 3 个顶点分别是 $A(0,1,0), B(2,-1,1), C(1,1,1)$. 求与 $\triangle ABC$ 所在平面平行但与之相距为 2 的平面方程.

解: 首先易得 $\triangle ABC$ 所在平面的方程为 $\Pi: 2x+y-2z-1=0$. 取 $M(a,b,c)$ 使 M 到 Π 的距离为 2. 即 $\dfrac{2a+b-2c-1}{3}=\pm 2$, 得 $2a+b-2c=7$ 或 $2a+b-2c=-5$. 所以过 M 且与 Π 平行的平面与 Π 相距为 2. 因此所求平面的方程为 $2x+y-2z-7=0$ 和 $2x+y-2z+5=0$.

12. 设两个平行平面为 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_2=0\ (D_1\neq D_2)$. 求与它们平行且将 Π_1 与 Π_2 的距离三等分的平面.

解: 分别在 Π_1 和 Π_2 上各取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 设线段 M_1M_2 的 2 个三等分点为 $M'(x',y',z'), M''(x'',y'',z'')$, 则分别通过 M' 或 M'' 且与已知平面平行的平面即为所求. 由假设, $\overrightarrow{M_1M'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M''}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{M_1M_2}$. 即

$$3(x'-x_1,y'-y_1,z'-z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

$$3(x''-x_1,y''-y_1,z''-z_1)=2(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

于是

$$3(A(x'-x_1)+B(y'-y_1)+C(z'-z_1))=A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1),$$

$$3(A(x''-x_1)+B(y''-y_1)+C(z''-z_1))=2(A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)).$$

利用平面方程, 可得

$$3(Ax'+By'+Cz')+3D_1=-D_2+D_1,$$

$$3(Ax''+By''+Cz'')+3D_1=2(-D_2+D_1).$$

因此过 M' 的平行平面方程是

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(2D_1+D_2)=0.$$

因此过 M'' 的平行平面方程是

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(D_1+2D_2)=0.$$

13. 设有两个平行平面 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_2=0\ (D_1\neq D_2)$. 点 $S(x_0,y_0,z_0)$ 不在 Π_1 与 Π_2 上. 过 S 作一条直线

分别与 Π_1, Π_2 交于 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$. 求 λ 使 $\overrightarrow{SM_1} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}$, 并分析 λ 的符号.

解: 由

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

可得

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0) = \lambda(A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)),$$

代入平面方程后,

$$-D_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \lambda(-D_2 + D_1).$$

解得

$$\lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1}{D_1 - D_2}.$$

再分析 λ 的符号. 设 S 关于 Π_1, Π_2 的离差为 $\delta_{S,\Pi_1}, \delta_{S,\Pi_2}$, 则由离差的定义可知 $|\delta_{S,\Pi_1}|, |\delta_{S,\Pi_2}|$ 表示 S 到 Π_1, Π_2 的距离.

(1) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 同号, 且 $|\delta_{S,\Pi_1}| < |\delta_{S,\Pi_2}|$, 则 M_1 在线段 SM_2 上, 此时 $\lambda > 0$.

(2) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 同号, 且 $|\delta_{S,\Pi_1}| > |\delta_{S,\Pi_2}|$, 则 M_1 在线段 SM_2 外, 此时 $\lambda < 0$.

(3) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 异号, 则 S 在线段 M_1M_2 上, 此时 $\lambda < 0$.

14. 在直角坐标系中, 设平面 Π_i 的方程为

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

且这两平面相交. 求它们交成的两面角的角平分面的方程.

解: 点 $P(x, y, z)$ 在 Π_1 与 Π_2 的某个两面角的角平分面上当且仅当该点到这两个平面的距离相等. 因此点 P 应满足方程

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

所以角平分面的方程为

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

15. 求到两个给定平面

$$\Pi_i:\ A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

的距离为定比 k 的点的轨迹方程.

解: 设两个给定平面的方程为

$$\Pi_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\qquad i=1,2.$$

设 $P(x,y,z)$ 点到 Π_1 与 Π_2 的距离之比为 k, 则有

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=k\frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

因此 P 点的轨迹方程为

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm k\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

16. 在直角坐标系下, 已知平面 Π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 求 Π 关于 xOy 平面的对称面 Π' 的方程和关于坐标原点的对称面 Π'' 的方程.

解: 设点 $P'(x',y',z')\in\Pi'$, 则 P' 关于 xOy 平面的对称点是 $(x',y',-z')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $Ax'+By'-Cz'+D=0$, 所以 Π' 的方程为 $Ax+By-Cz+D=0$.

同理, 设点 $P''(x'',y'',z'')\in\Pi''$, 则 P'' 关于原点的对称点是 $(-x'',-y'',-z'')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $-Ax''-By''-Cz''+D=0$, 所以 Π'' 的方程为 $Ax+By+Cz-D=0$.

§3 几何空间中直线的仿射性质

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列直线的方程:

(1) 过点 $P(3,1,-1)$ 且平行于向量 $\overrightarrow{v}(4,7,-8)$;

(2) 过点 $P_0(-3,0,1)$ 和 $P_1(2,5,1)$;

(3) 已知三角形的三个顶点是 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$, 求三条中线的方程.

解: (1) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+1}{-8}$.

(2) 用两点式方程可得 $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{0}$.

(3) $\dfrac{x-x_i}{x_i-\dfrac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}}=\dfrac{y-y_i}{y_i-\dfrac{y_{i+1}+y_{i+2}}{2}}=\dfrac{z-z_i}{z_i-\dfrac{z_{i+1}+z_{i+2}}{2}}$, 当 $i+1$, $i+2$ 大于 3 时即减去 3.

2. 在直角坐标系中, 求过点 $P(1,6,3)$ 且平行于平面 $3x+y-2z-5=0$ 的直线的方程.

解: 设直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$, 则 ξ 与平面 $3x+y-2z-5=0$ 平行, 故 $3A+B-2C=0$, 而直线方程为 $\frac{x-1}{A}=\frac{y-6}{B}=\frac{z-3}{C}$.

3. 求过点 $A(0,-2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+6y-4z+2=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}$ 的直线方程.

解: 先将直线方程化为标准方程 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$, 其方向向量为 $\xi(2,-1,-1)$, 故所求直线方程为 $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

4. 求直线 $L:\ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{2}$ 与平面 $\Pi:\ 2x-3y+2z-2=0$ 的交点坐标.

解: 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases}x=3t\\ y=2-2t\\ z=-4+2t.\end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$2(3t)-3(2-2t)+2(-4+2t)-2=0,$$

解得 $t=1$, 所以交点为 $(3,0,-2)$.

5. 求过点 $A(3,1,2)$ 及直线 $L:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-3}$ 的平面的方程.

解: 直线上有一点 $(0,0,-2)$, 因此平面的方向向量是 $\xi_1=(1,-2,-3)$, $\xi_2=(-3,-1,-4)$. 故平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-3 & 1 & -3\\ y-1 & -2 & -1\\ z-2 & -3 & -4\end{vmatrix}=0,$$

计算得 $5x+13y-7z-14=0$.

6. 已知直线 $L:\ \frac{x-1}{m}=\frac{y-a}{-2}=\frac{z+2}{3}$, 平面 $\Pi:\ x-2y-4z+1=0$. 问当 a,m 取什么值时

(1) L 与 Π 相交; (2) L 平行于 Π; (3) L 在 Π 内.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi=(m,-2,3)$, 若 L 与 Π 相交, 则 ξ 不与 Π 平行, 故 $m+4-12\neq 0$, 即 $m\neq 8$, a 是任意实数.

(2) ξ 必须与 Π 平行, 即 $m=8$, 同时 L 上的点 $(1,a,-2)$ 不在 Π 上, 即 $1-2a+8+1\neq 0$, $a\neq 5$.

(3) $m=8$, $a=5$.

7. 求通过点 $(2,2,2)$ 且与两直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \text{ 和} \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解: 设所求直线的方向向量是 $\xi=(X,Y,Z)$. 已知第一条直线上的点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量 $\xi_1=(1,2,3)$. 第二条直线上的点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量 $\xi_2=(2,1,4)$. 为使所求直线与第一条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & X \\ 2 & 2 & Y \\ 2 & 3 & Z \end{vmatrix} = 2X-4Y+2Z=0.$$

同理, 为使所求直线与第二条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & Y \\ -1 & 4 & Z \end{vmatrix} = X-6Y+Z=0.$$

解此线性方程组得 $X:Y:Z=1:0:-1$. 因此所求直线的方程是

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

8. 将下列直线的一般式方程化成标准方程.

(1) $\begin{cases} 2x-3y+4z-12=0 \\ x+4y-2z-10=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y-4z-5=0 \\ 6x-y-2z-4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 4y+3z+1=0. \end{cases}$

解: (1) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-10,8,11).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(8,0,-1)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x-8}{-10}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{11}.$$

(2) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-8, -18, -15).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $\left(\dfrac{1}{3}, 0, -1\right)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x - \dfrac{1}{3}}{8} = \frac{y}{18} = \frac{z+1}{15}.$$

(3) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-3, -9, 12).$$

此向量可化简为 $(1, 3, -4)$. 为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(0, 2, -3)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-4}.$$

9. 求直线与平面的交点.

(1) $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ 与 $3x + 2y + z = 0$;

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 与 xOy 平面.

解: (1) 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$3(-1-2t) + 2(-1+3t) + (3+4t) = 0,$$

解得 $t = \dfrac{1}{2}$, 所以交点为 $\left(-2, \dfrac{1}{2}, 5\right)$.

(2) 交点的坐标是 $(x, y, 0)$, 解方程组 $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 8$, $y = -5$. 故交点为 $(8, -5, 0)$.

10. 求出过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且与相交平面

$$\Pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad i=1,2$$

都平行的直线的方程.

解: 根据命题 9.1, 平面 Π_1 与 Π_2 的交线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

因所求直线必须与交线平行, 因此这也是所求直线的方向向量. 故所求直线的方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

11. 直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOz 坐标平面内.

解: 平面 xOz 的方程是 $y=0$, 因此直线落在平面 xOz 内的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

有无穷解. 而上述方程组与

$$\begin{cases} A_1x+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+C_2z+D_2=0 \\ y=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

同解. 而方程组 (*) 有无穷多解的充分必要条件是前两个方程的系数成比例, 即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

最后一个不等式是直线方程的必要条件.

§4　几何空间中直线的度量性质

1. 判断下列直线与平面的位置关系. 如果相交, 则求它们的交点与夹角.

(1) 直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ 与平面 $4x+3y-z+3=0$;

(2) 直线 $\begin{cases}x=1-2t\\ y=2-4t\\ z=-1+5t\end{cases}$ 与平面 $x+2y+2z-7=0$;

(3) 直线 $\begin{cases}x-y+z=5\\ x+y-z=-1\end{cases}$ 与平面 $2x+y+z-5=0$.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi=(2,-1,5)$, 平面的法向量是 $\nu=(4,3,-1)$. 因为 $(\xi,\nu)=0$, 直线上的点 $(1,-3,-2)$ 又满足平面方程, 所以直线在平面内.

(2) 直线的方向向量是 $\xi=(-2,-4,5)$, 平面的法向量是 $\nu=(1,2,2)$. 因为 $(\xi,\nu)=0$, 直线上的点 $(1,2,-1)$ 不满足平面方程, 所以直线与平面平行.

(3) 直线的标准方程是 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{2}$, 与平面方程联立后求得交点 $(2,-1,2)$. 直线的方向向量是 $\xi=(0,2,2)$, 平面的法向量是 $\nu=(2,1,1)$, 设直线与平面的交角为 θ, 则 $\sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 所以夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 求过点 $A(3,-1,1)$ 且与平面 $\Pi:\ x+y+z=1$ 垂直的直线方程.

解: 因所求直线与平面垂直, 直线的方向向量是 $\xi=(1,1,1)$. 故直线方程为 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

3. 判断下列直线间的关系, 并求它们的夹角. 对于相交的直线并求交点:

(1) $L_1:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $L_2:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$;

(2) $L_1:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$, $L_2:\ \dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z}{7}$.

解: (1) 根据第三章命题 9.2, 行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}6&4&1\\-4&2&3\\-2&3&2\end{vmatrix}=-30\neq 0,$$

所以两直线异面. 设夹角为 θ, 则 $\cos\theta=\dfrac{16}{\sqrt{29}\sqrt{14}}=\dfrac{8\sqrt{406}}{203}$, 故 $\theta=\arccos\dfrac{8\sqrt{406}}{203}$.

(2) 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

所以两直线共面, 又因它们的方向向量不平行, 故两直线相交. 设夹角为 θ, 则 $\cos\theta = \dfrac{13\sqrt{5365}}{1073}$, 故 $\theta = \arccos\dfrac{13\sqrt{5365}}{1073}$. 解联立方程, 求得交点为 $\left(1, 2, \dfrac{7}{2}\right)$.

4. 已知直线 L 的方程是 $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$ 求点 $A(3,2,-1)$ 到 L 的距离.

解: 直线的方向向量是 $\xi = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (0,3,-3)$, 且点 $(1,2,1)$ 在直线上, 故点 A 到直线的距离为

$$d = \frac{|(2,0,-2)\times(0,1,-1)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 试证直线

$$L_1: \begin{cases} x = 3+3t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad 与 \quad L_2: \begin{cases} x = -1+u \\ y = 2 \\ z = u \end{cases} \quad (其中\ t, u\ 是参数)$$

是异面直线, 并求它们的公垂线和两直线间的距离.

解: 直线 L_1 通过点 $M_1(3,0,1)$, 方向向量是 $\xi_1 = (3,1,0)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(-1,2,0)$, 方向向量是 $\xi_2 = (1,0,1)$. 因此

$$\xi_1 \times \xi_2 = (1,-3,-1).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \xi_1\times\xi_2)|}{|\xi_1\times\xi_2|} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11}.$$

由 $M_1, \xi_1, \xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x+3y-10z+13 = 0.$$

由 $M_2, \xi_2, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & -3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases} x - 3y + 10z - 13 = 0 \\ 3x + 2y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

6. 已知直线 $L: \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 及定点 $P_0(2,0,-1)$. 求 P_0 关于 L 的对称点.

解: 我们通过考虑点关于平面 $\Pi_1: x - y - 4z + 12 = 0$ 及 $\Pi_2: 2x + y - 2z + 3 = 0$ 的离差来确定 P_0 关于 L 的对称点 P_0'. $P_0(2,0,-1)$ 关于 Π_1 的离差 $\delta_1 = \dfrac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta_2 = \dfrac{9}{3} = 3$. 所以对称点 $P_0'(x', y', z')$ 关于 Π_1 的离差 $\delta_1' = \dfrac{x' - y' - 4z' + 12}{\sqrt{18}} = -\delta_1 = -\sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta_2' = \dfrac{2x' + y' - 2z' + 3}{3} = -\delta_2 = -3$. 因此

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = -18 \\ 2x + y - 2z + 3 = -9, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x - y - 4z = -30 \\ 2x + y - 2z = -12. \end{cases} \tag{$*$}$$

又因为 $\overrightarrow{P_0P_0'}$ 应与直线 L 垂直, 即

$$\begin{vmatrix} x'-2 & 1 & 2 \\ y' & -1 & 1 \\ z'+1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6x' - 6y' + 3z' - 9 = 0, \tag{$**$}$$

联立此 3 个方程解得: $x' = 0$, $y' = 2$, $z' = 7$. 即对称点的坐标为 $(0,2,7)$.

7. 直线过点 $(2,-3,5)$ 且与三条坐标轴的正向交成等角, 求点 $P(1,-2,3)$ 到此直线的距离.

解: 显然直线方程为

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{1}.$$

所以点 $P(1,-2,3)$ 到这条直线的距离为

$$d=\frac{|(1,-1,2)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}.$$

8. 求通过两直线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z-5}{-3}$ 和

$$\begin{cases}x=3+4t\\ y=21+5t\\ z=-11-10t\end{cases}$$

的交点, 且与这两直线都垂直的直线方程.

解: 因该直线与已知两直线都垂直, 而已知直线的方向分别为 $\xi_1=(-1,8,-3)$, $\xi_2=(4,5,-10)$. 故所求直线的方向向量为 $\xi=\xi_1\times\xi_2=(-65,-22,-37)$. 这两条直线的交点可求得为 $(-1,16,-1)$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{65}=\frac{y-16}{22}=\frac{z+1}{37}.$$

9. 求在平面 $2x+3y+4z-9=0$ 上经过点 $(1,1,1)$ 且与 xOy 平面交成最大角的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$. 因直线在平面 $\Pi:\ 2x+3y+4z-9=0$ 上, 所以 $2A+3B+4C=0$. xOy 平面的方程为 $z=0$, 我们在几何中已经知道, 当且仅当平面上的直线与两个平面的交线垂直时, 这条直线与另一平面的交角达到极大. 而这两个平面的交线的方向向量是 $(2,3,4)\times(0,0,1)=(3,-2,0)$, 因此 ξ 与 $(3,-2,0)$ 垂直, 即 $3A-2B=0$. 解得 $A=\dfrac{2}{3}B$, $C=-\dfrac{13}{12}B$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{12}=\frac{z-1}{-13}.$$

10. 求下列两直线间的距离, 如两直线有共垂线, 求出它们的公垂线的方程.

(1) $\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0,\end{cases}$ 与 $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$;

(2) $\begin{cases}x=3t-5\\ y=2t-5\\ z=-2t+1,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-y+z+5=0\\ x+2y-z-14=0.\end{cases}$

解: (1) 第一条直线化成标准方程为

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z+10}{4},$$

因此两直线平行. 距离为

$$d=\frac{|(13,-11,-19)\times(3,-1,4)|}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}}=25.$$

(2) 直线 L_1 通过点 $M_1(-5,-5,1)$, 方向向量是 $\xi_1=(3,2,-2)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(4,1,-8)$, 方向向量是 $\xi_2=(-1,2,3)$. 因此

$$\xi_1\times\xi_2=(10,-7,8).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\xi_1\times\xi_2)|}{|\xi_1\times\xi_2|}=\frac{24}{\sqrt{213}}=\frac{24\sqrt{213}}{213}.$$

由 $M_1,\xi_1,\xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+5 & 3 & 10\\ y+5 & 2 & -7\\ z-1 & -2 & 8\end{vmatrix}=2x-44y-41z-169=0.$$

由 $M_2,\xi_2,\xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 10\\ y-1 & 2 & -7\\ z+8 & 3 & 8\end{vmatrix}=37x+38y-13z-290=0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases}2x-44y-41z-169=0\\ 37x+38y-13z-290=0.\end{cases}$$

11. 已知一点 $P(a,b,c)$ $(abc\neq 0)$. 过 P 点向各个坐标面作垂线, 垂足分别为 L,M,N, 求证: OP 与各个面 OMN,ONL,OLM 的交角相等.

证明: 根据假设, 垂足分别为 $L(a,b,0)$, $M(a,0,c)$, $N(0,b,c)$. 则面 OMN 的法向量可取为 $\nu_1=\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(-bc,-ac,ab)$, 类似地, 面 OLM 的法向

量可取为 $\nu_2=(bc,-ac,-ab)$, 面 ONL 的法向量可取为 $\nu_3=(-bc,ac,-ab)$. 而 $\overrightarrow{OP}=(a,b,c)$, 由于

$$\overrightarrow{OP}\cdot\nu_1=\overrightarrow{OP}\cdot\nu_2=\overrightarrow{OP}\cdot\nu_3=-abc,$$

可知 OP 与这 3 个面的交角相等.

12. 已知两条异面直线 L_1 和 L_2. 求证连接 L_1 上任一点和 L_2 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

证明: 适当选择坐标系可使 L_1 为 x 轴, 方程为 $\begin{cases}y=0\\z=0,\end{cases}$ L_2 的方程则为 $\begin{cases}kx-y=0\\z=a,\end{cases}$ $(ak\neq 0)$. 设 $P_1(x_1,0,0)$ 为 L_1 上任意一个点, $P_2(x_2,kx_2,a)$ 是 L_2 上任意点, 则 P_1P_2 的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{kx_2}{2},\dfrac{a}{2}\right)$. 即此轨迹满足参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v\\y=\dfrac{k}{2}u\\z=\dfrac{a}{2},\end{cases}\qquad u,v\text{ 为参数.}$$

显然是平面 $z=\dfrac{a}{2}$. 这也是两条异面直线的公垂线段的垂直平分面.

13. 已知直线 L 通过点 $(1,1,0)$ 且与直线

$$L_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1},\quad L_2:\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}$$

垂直, 求直线 L 在各个坐标面上的射影的方程.

解: 因为 L 与 L_1,L_2 都垂直, 所以可取 L 的方向向量为 $\xi=(4,-2,1)\times(4,-3,-2)=(7,12,-4)$, 则 L 的方程为

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{12}=\frac{z}{-4}.$$

它在 xOy 平面 $z=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z}{0}$, 在 yOz 平面 $x=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z}{-4}$, 在 xOz 平面 $y=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-4}$.

14. 求过点 $(2,-3,-1)$ 且与直线

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$$

垂直相交的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$, 因它必须与已知直线垂直, 故有 $-2A-B+C=0$. 再写出所求直线的参数方程 $\begin{cases} x=2+At \\ y=-3+Bt \\ z=-1+Ct, \end{cases}$ 代入已知直线的方程, 得

$$\frac{1+At}{-2}=\frac{-2+Bt}{-1}=\frac{-1+Ct}{1}.$$

由上式可得 $(3A-B+5C)t=0$. 由于 $t=0$ 显然不是解, 而两直线相交说明 t 一定有解, 因此 $3A-B+5C=0$. 最后解得 $A:B:C=4:-13:-5$. 从而直线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-13}=\frac{z+1}{-5}.$$

*§5 平面束

1. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且满足下列条件之一的平面:

(1) 通过原点; (2) 与 y 轴平行;

(3) 通过 $(0,0,1)$ 点;

(4) 与 xOy 平面的交线平行于方向 $(4,5,0)$.

解: (1) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,0)$ 代入得 $k=2m$. 所以平面方程为

$$9x+3y+5z=0.$$

(2) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

y 轴的方向向量是 $\xi = (0,1,0)$, 平面与 ξ 平行的条件是 $-k+5m=0$, 即 $k=5m$. 所以平面方程为

$$21x+14z-3=0.$$

(3) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,1)$ 代入得 $2k+m=0$, 即 $m=-2k$. 所以平面方程为

$$2x-11y+5z-5=0.$$

(4) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

此平面与向量 $(4,5,0)$ 平行的条件是 $4(4k+m)+5(-k+5m)=0$, 即 $11k=-29m$. 所以平面方程为

$$-105x+84y-98z+51=0.$$

2. 求与平面 $x-2y-z+2=0$ 平行且在 x 轴上的截距为 4 的平面.

解: 根据平行平面束性质, 所求平面的方程为 $x-2y-z+D=0$. 化为截距式:

$$\frac{x}{-D}+\frac{y}{\dfrac{D}{2}}+\frac{z}{D}=1.$$

可见 $D=-4$. 故所求方程为 $x-2y-z-4=0$.

3. 直线方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOy 平面内.

解: 过已知直线的平面束的方程为

$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

平面 $z=0$ 应该在此平面束内, 所以有以下关系式:

$$\begin{cases}kA_1+mA_2=0\\kB_1+mB_2=0\\kC_1+mC_2\neq 0\\kD_1+mD_2=0.\end{cases}$$

结论是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

4. 与不共面的直线

$$L_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和直线

$$L_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

都相交的直线 L 的方程为

$$\begin{cases} k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \\ k'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + m'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0, \end{cases}$$

其中, k, m 是不全为零的实数, k', m' 也是不全为零的实数.

解: 由相交直线 L 与 L_1 确定的平面方程一定有以下形式:

$$k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 k, m 不同时为 0. 同理, 由 L 与 L_2 确定的平面方程为

$$k'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + m'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0,$$

其中 k', m' 不同时为 0. 由于 L_1, L_2 不共面, 上述两个平面不重合, 它们的交线就是 L.