第三章　线性方程组与线性子空间

§1　用消元法解线性方程组

1. 用消元法解下列线性方程组:

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = -4 \\ \ \ x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + 4x_4 = \ \ 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = \ \ 3 \\ 3x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 = \ \ 3 \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + x_4 = \ \ 7 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 \qquad = \ \ 1 \\ \qquad x_2 + \ \ x_3 + x_4 = \ \ 3 \end{cases}$$

解: (1) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 1$.

(2) $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$, $x_4 = -4$.

2. 分别用矩阵的初等行变换和列变换将下列矩阵化为行阶梯矩阵和列阶梯矩阵:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

解: $(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 4 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & -11 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{11} & -\frac{16}{11} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{10}{3} & -\frac{17}{18} & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 证明: 线性方程组的第二类, 第三类初等变换把线性方程组化成与它同解的线性方程组.

证明: (略)

4. 证明推论 1.4.

证明: 对矩阵 A^{T} 应用推论 1.3, 则 A^{T} 可以经过一系列初等行变换化成简化行阶梯矩阵. 将上述变换施行于矩阵 A 的列上, 就将 A 化成简化列阶梯矩阵.

***5.** 思考题:

(1) 线性方程组的解集可以看作是空间的一个点集. 那么, 线性空间中任一点集是否一定是某个线性方程组的解集合呢? 如果是这样, 那么, 空集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 与两点集 $\{(0,0,\cdots,0),(1,1,\cdots,1)\}$ 分别是怎样的线性方程组的解集合呢? 如果不是这样, 那么, 怎样的点集才是某个线性方程组的解集合呢?

(2) 线性方程组的初等变换把线性方程组变成同解的线性方程组. 那么, 两个同解的线性方程组是否一定可以通过初等变换互化呢?

解: (1) 除了空集与单点集外, 线性方程组的解集合一定是无限集. 空集是矛盾方程组的解集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 可以是以下方程组

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

的解集. 线性方程组的解集合是一个线性流形. 解集合的性质可参看 §2, §6, §7 的讨论.

(2) 在允许添加或删去平凡方程 “$0=0$” 的前提下, 此结论是正确的.

§ 2 线性方程组的解的情况

1. 用消元法解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=2 \\ x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_5=2 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_5=3 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=-4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=12 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-4x_2+2x_3-2x_4+3x_5=0 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

解: (1) 无解.

(2) $x_3=1-x_1+2x_2$, $x_4=-4x_1+5x_2$, $x_5=-1-x_1+2x_2$, x_1,x_2 为自由未知量.

(3) $x_1=2x_2-x_3$, $x_4=1$, x_2,x_3 为自由未知量.

(4) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

(5) $x_1=\dfrac{1}{3}x_5$, $x_2=\dfrac{1}{6}(3x_3-3x_4+5x_5)$, x_3,x_4,x_5 为自由未知量.

2. 选择 λ, 使方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$

有解, 并求它的一般解.

解: 仅当 $\lambda = 5$ 时有无穷多解, 其一般解为 $x_1 = \dfrac{1}{5}(4 - x_3 - 6x_4)$, $x_2 = \dfrac{1}{5}(3 + 3x_3 - 7x_4)$, x_3, x_4 为自由未知量.

3. a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求一般解.

解: 仅当 $a = 0, b = 2$ 时有解, 其一般解为 $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$, x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

4. 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.$$

在有解的情况下, 求它的一般解.

证明: $(\Rightarrow)$ 如线性方程组有解, 设 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 为其一个解, 将它代入原方程组, 并将各式相加, 即得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.

$(\Leftarrow)$ 如 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$, 则由最后一个方程得 $x_5 = x_1 + a_5$, 依次代入前一个方程, 得 $x_4 = a_4 + a_5 + x_1$, $x_3 = a_3 + a_4 + a_5 + x_1$, $x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1$, 将 x_2, x_3, x_4, x_5 代入第一个方程, 得

$$x_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1) = -a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = a_1.$$

所以原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1 \\ x_3 = a_3 + a_4 + a_5 + x_1 \\ x_4 = a_4 + a_5 + x_1 \\ x_5 = a_5 + x_1 \end{cases} \qquad x_1 \text{ 为自由未知量.}$$

5. 求一多项式 $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, 使 $f(1) = -3$, $f(-1) = -7$, $f(2) = -1$, $f(-2) = -21$.

解: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

6. 给出平面上 3 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 共线的充分必要条件.

解: 若点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 共线, 不妨设此直线的方程为 $Ax + By + C = 0$, 则

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1t_1 + y_1t_2 + t_3 = 0 \\ x_2t_1 + y_2t_2 + t_3 = 0 \\ x_3t_1 + y_3t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解 (A, B, C)

$\Leftrightarrow$ 其系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

7. 给出平面上 3 条不平行直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

共点的充分必要条件.

解: 此 3 条直线有公共点 (x_0, y_0) 的充分必要条件是相应的齐次线性方程组

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

有非零解 $(x_0, y_0, 1)$, 当且仅当系数矩阵等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3 向量组的线性相关性

1. 设 $\alpha_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\alpha_2 = (10, 1, 5, 10)$, $\alpha_3 = (4, 1, -1, 1)$. 求一向量 α, 使 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$.

解: $\alpha = (1, 2, 3, 4)$.

2. 已知 $3\alpha + 4\beta = (2, 1, 1, 2)$, $2\alpha - 3\beta = (-1, 2, 3, 1)$. 求 α 与 β.

解: $\alpha = \dfrac{1}{17}(2, 11, 15, 10)$, $\beta = \dfrac{1}{17}(7, -4, -7, 1)$.

3. 把向量 β 表成向量 α_1, α_2, α_3 的线性组合:

(1) $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1)$, $\alpha_3 = (1, -1, -1)$, $\beta = (1, 2, 1)$;

(2) $\alpha_1 = (1, 3, 5)$, $\alpha_2 = (6, 3, -2)$, $\alpha_3 = (3, 1, 0)$, $\beta = (5, 8, 8)$;

解: (1) $\beta = \alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 - \dfrac{1}{2}\alpha_3$.

(2) $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$.

4. 判别下列向量组是否线性相关:

(1) $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 3, 6)$;

(2) $\alpha_1 = (3, 2, -5, 4)$, $\alpha_2 = (2, 1, -3, -5)$, $\alpha_3 = (3, 5, -13, 11)$, $\alpha_4 = (4, 5, -14, -3)$;

(3) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (1, 7, 8, 9)$, $\alpha_4 = (3, 2, 1, 2)$;

(4) $\alpha_1 = (1, 2, -1, 4)$, $\alpha_2 = (9, 1, 2, -3)$, $\alpha_3 = (3, 5, 0, 2)$, $\alpha_4 = (3, 2, 2, 1)$, $\alpha_5 = (1, 3, 3, 2)$.

解: (1) 否; (2) 是; (3) 否; (4) 是.

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的数, 令

$$\alpha_1 = (1, a_1, a_1^2, \cdots, a_1^{n-1}),$$

$$\alpha_2=(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n=(1,a_n,a_n^2,\cdots,a_n^{n-1}).$$

证明: 任一 n 维向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\neq 0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

又对任意的 n 维向量 β, 向量组 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 从而向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

6. 设向量组 α_1, α_2, α_3 线性无关. 证明:向量组 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

证明: 设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0,$$

则

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为 α_1, α_2, α_3 线性无关, 所以

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\ k_1+k_2=0\\ k_2+k_3=0\end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$, 所以 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

7. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ (其中 $\alpha_1\neq 0$) 线性相关的充要条件是至少有一个 α_i $(1<i\leqslant s)$ 可被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示.

证明: 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

设 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 中最后一个不为零的为 k_i, 则 $i \neq 1$ (否则 $\alpha_1 = 0$ 与假设矛盾), 从而 $i > 1$. 故

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} = -k_i\alpha_i,$$

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_i}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}.$$

8. 证明: 如果向量组的一个延伸组线性相关, 则此向量组也线性相关.

证明: 设向量组 (II) 为 (I) 的延伸组, 如向量组 (I) 线性无关, 则由例 3.9 知, (II) 也线性无关, 与已知矛盾, 故此向量组线性无关.

9. 下列论断是否成立? 对的, 加以证明; 错的, 举出反例.

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则其中每一个都可由其余向量线性表示;

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也线性无关;

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_s + \beta_s$ 也线性无关;

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 则一定存在 r 个不等于零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0;$$

(5) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则它的任何线性组合都不等于零.

解: (1) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1)$ 线性相关, 但 α_2 不可由 α_1 线性表示.

(2) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2)$ 线性无关, $\beta_1 = (2, 2)$, $\beta_2 = (0, 1)$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性相关.

(3) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1)$, $\beta_1 = (1, -1)$, $\beta_2 = (1, 2)$ 线性无关, 但 $\alpha_1 + \beta_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 + \beta_2 = (1, 3)$ 线性相关.

(4) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$ 线性相关, 但对任意的 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$.

(5) 错. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的零线性组合就等于零.

§4 线性子空间

1. 在三维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 下列集合 W 是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?

(1) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \perp (1, 1, 1)\}$;

(2) W 是终点在某直线上的全体向量所构成的集合;

(3) W 是与空间中某固定非零向量 (x_0, y_0, z_0) 的夹角等于定值的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 如直线过原点, 是; 否则, 不是; (3) 夹角等于 $\dfrac{\pi}{2}$, 是; 否则, 不是.

2. 设 V 为数域 K 上 n 维向量空间, 判断 V 的下列子集 W 是否构成 V 的线性子空间.

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量,

$$W = \{\beta \in V \mid \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta \text{ 线性相关}\};$$

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量, W是V中不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ α_r 线性表示的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 不是.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 K^n 中给定的 r 个向量, 证明:

$$W = \{(c_1, c_2, \cdots, c_r) \mid c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r = 0\}$$

组成 K^r 的子空间.

证明: 显然 $W \subseteq K^r$ 且 $(0, 0, \cdots, 0) \in W$, 从而 W 非空.

对任意的 $(a_1, \cdots, a_r), (b_1, \cdots, b_r) \in W$ 以及 $k \in K$, 有

$$(a_1+b_1)\alpha_1+\cdots+(a_r+b_r)\alpha_r = a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r+b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r = 0+0 = 0.$$

所以

$$(a_1, \cdots, a_r) + (b_1, \cdots, b_r) \in W.$$

$$(ka_1)\alpha_1 + (ka_2)\alpha_2 + \cdots + (ka_r)\alpha_r = k(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r) = k \cdot 0 = 0.$$

所以

$$k(a_1, \cdots, a_r) \in W.$$

W 成为 K^r 的子空间.

4. 设 $\alpha_1 = (2, 1, 11, 2), \alpha_2 = (1, 0, 4, -1), \alpha_3 = (1, 4, 16, 15),$ $\beta_1 = (3, 1, 15, 1),$ $\beta_2 = (1, 1, 7, 3),$ $\gamma = (1, 6, 22, \lambda).$

(1) λ 取什么值时才能使 $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;

(2) 验证: $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2)$.

解: (1) $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \iff \gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 得线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + 4k_3 = 6 \\ 11k_1 + 4k_2 + 16k_3 = 22 \\ 2k_1 - k_2 + 15k_3 = \lambda. \end{cases}$$

当且仅当 $\lambda = 23$ 时 (k_1, k_2, k_3) 有解 $(6, -11, 0)$. 即当且仅当 $\lambda = 23$ 时 $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

(2) 因为 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, 所以 $L(\beta_1, \beta_2) \subseteq L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 反之, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{2}(-3\beta_1 + 11\beta_2)$, 所以 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subseteq L(\beta_1, \beta_2)$.

***5.** 设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 为 K^n 的 s 个线性子空间. $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$. 证明: W 为 K^n 的线性子空间的充分必要条件是, 存在 i $(1 \leq i \leq s)$, 使 $W = W_i$.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性. 对 s 用归纳法. 当 $s = 1$ 时结论显然成立. 假定结论对 $s - 1$ 成立, 考察 $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$. 如果 $W \neq W_s$, 则可取 $\beta \in W \setminus W_s$. 对于任意的 $\alpha \in W_s$, 必有 $\beta + k\alpha \in W \setminus W_s$ (从 $\beta + k\alpha \in W_s$ 以及 $\alpha \in W_s$ 可以推得 $\beta \in W_s$, 矛盾). 当 $k = 1, \cdots, s$ 时, s 个向量中必有两个向量属于同一个 W_i $(1 \leq i \leq s - 1)$. 这两个向量相减后可得 $\alpha \in W_i$. 因此 $W_s \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_{s-1}$, 于是 $W = W_1 \cup \cdots \cup W_{s-1}$. 利用归纳假设, 可得一个 i, $1 \leq i \leq s - 1$ 使得 $W = W_i$. 结论成立.

§ 5 线性子空间的基与维数

1. 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是一个线性子空间, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 并且 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基.

证明: 由于 W 中的任意向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合, 而 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 因此 W 中的任意向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示. 根据命题 5.1, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基.

2. 利用练习 1 验证:

(1) 若 $\alpha_1 = (2, 1, 11, 2)$, $\alpha_2 = (1, 0, 4, -1)$, $\alpha_3 = (1, 4, 16, 15)$, $\alpha_4 = (2, -1, 5, -6)$, $\alpha_5 = (1, 6, 22, 23)$, 则 α_1, α_2 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 的基;

(2) 若 $\alpha_1=(1,-4,15,5,-4)$, $\alpha_2=(0,7,29,-8,7)$, $\alpha_3=(2,-1,1,1,-3)$, $\alpha_4=(1,-4,3,5,-4)$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的基.

解: (1) 因为 α_1,α_2 线性无关且 $\alpha_3=4\alpha_1-7\alpha_2$, $\alpha_4=-\alpha_1+4\alpha_2$, $\alpha_5=6\alpha_1-11\alpha_2$.

(2) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

3. 设 W 为向量空间 V 的子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 W 的一个基, $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j$, $i=1,2,\cdots,r$.

证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 因此

$$k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{ij}\right)\alpha_j=0$$

当且仅当 $k_1,\cdots,k_r$ 是以下齐次线性方程组的解

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jr}k_r=0 \qquad j=1,2,\cdots,r.$$

因此要使 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基的充分必要条件是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 这等价于上述齐次线性方程组只有零解, 也就是它的系数行列式不等于零, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

将上述行列式转置后得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

***4.** 设 V 为数域 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对任何大于 n 的自然数 m, 一定存在由 V 的 m 个向量组成的向量组, 使其中任何 n 个向量都线性无关.

证明: 由习题 3–4.5 的结果可以知道, V 不可能表示成它的有限多个真线性子空间的并集. 对 $m \geq n$ 施行数学归纳法. 当 $m = n$ 时结论成立. 假设已经找到满足条件的 $m-1 \geq n$ 个向量的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$. 把其中任意 $n-1$ 的向量生成的线性子空间记为 W_i $(i = 1, \cdots, s)$, 则因 $V \neq \bigcup W_i$, 存在向量 $\alpha_m \notin \bigcup W_i$ $(i = 1, \cdots, s)$. 则向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 也满足条件.

§6 齐次线性方程组的解的结构

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解: (1) $(1, -2, 1, 0, 0)$, $(1, -2, 0, 1, 0)$, $(3, -4, 0, 0, 1)$.

(2) $(-1, 24, 9, 0)$, $(2, -21, 0, 9)$.

(3) $(-7, 7, -1, 1, 0)$, $(-25, 28, -4, 0, 1)$.

(4) $(0, 1, 2, 1)$.

2. 证明: 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 方程组的秩是 $n-1$, 并且矩阵 A 中 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$, 那么 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

证明: 由于

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = |A| = 0,$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad \text{当 } i \neq k \text{ 时},$$

因此 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是题设齐次线性方程组的解. 又因 $A_{kl} \neq 0$, 这是一个非零解. 由假设知道方程组的秩是 $n-1$, 所以此齐次线性方程组的基础解系由一个非零解构成. 因此 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

3. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A, M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列所得的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式. 证明:

(1) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;

(2) 如果这个线性方程组的秩为 $n-1$, 某个 $M_i \neq 0$, 证明方程组的解全是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{(n-1)}M_n)$ 的倍数.

证明: (1) 作齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn}=0$, 则此线性方程组与原方程组同解, 且系数矩阵等于 0. 故由上题, 最后一行的代数余子式 $(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解. 又 $A_{ni}=(-1)^{n+i}M_i$, 所以 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)=(-1)^{n+1}(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解.

(2) 因原方程组的秩为 $n-1$, 且有一个 $M_i\neq 0$. 因此原方程组的基础解系由一个非零解向量构成. 从而非零解 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 构成原线性方程组的一个基础解系. 故原方程组的每一个解都是

$$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$$

的倍数.

§7 非齐次线性方程组的解的结构, 线性流形

1. 求下列线性方程组的全部解:

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3+7x_4=0\\4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0\\2x_1-x_2+x_3-5x_4=0\\2x_1-x_2+6x_3+10x_4=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=2\\x_1-x_2+2x_3-x_4=1\\4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=8\\2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=9\end{cases}$

(4) $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=-2\\2x_1+5x_2+5x_3+3x_4+x_5=4\\x_1-x_2-x_3-2x_4+5x_5=-6\\x_1+6x_2+8x_3+5x_4-3x_5=9\end{cases}$

解: (1) $k_1(4,0,-3,1)+k_2(0,8,3,-1)$.

(2) $(1,0,1,0)+k(-3,3,-1,2)$.

(3) $(1,0,0,0,-1)+k_1(-1,1,1,0,0)+k_2(7,5,0,2,6)$.

(4) $(1,0,0,1,-1)+k(-1,1,0,-1,0)$.

2. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (b_i \text{ 不全为 } 0)$$

的任意 r 个解, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i \eta_i \,(k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, r)$. 证明: 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = 1$ 时, η 也是这个非齐次线性方程组的解.

证明: 设 $\eta_i = (c_{1i}, c_{2i}, \cdots, c_{ni})\ (i = 1, \cdots, r)$. 则

$$a_{j1}c_{1i} + a_{j2}c_{2i} + \cdots + a_{jn}c_{ni} = b_j, \qquad j = 1, \cdots, m, i = 1, \cdots, r.$$

而

$$\eta = \sum_{i=1}^{r} k_i \eta_i = \left(\sum_{i=1}^{r} k_i c_{1i}, \sum_{i=1}^{r} k_i c_{2i}, \cdots, \sum_{i=1}^{r} k_i c_{ni} \right),$$

代入非齐次线性方程组后得

$$\begin{aligned} & a_{j1} \sum_{i=1}^{r} k_i c_{1i} + a_{j2} \sum_{i=1}^{r} k_i c_{2i} + \cdots + a_{jn} \sum_{i=1}^{r} k_i c_{ni} \\ = & \sum_{i=1}^{r} k_i (a_{j1}c_{1i} + a_{j2}c_{2i} + \cdots + a_{jn}c_{ni}) \\ = & \left(\sum_{i=1}^{r} k_i \right) b_j, \qquad j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

由于 b_j 不全为 0, 因此 η 是这个非齐次线性方程组的解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = 1$.

3. 设 γ_0 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (b_i \text{ 不全为 } 0)$$

的一个解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是它的导出组的基础解系.

证明: (1) $\gamma_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关;

(2) $\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 也线性无关;

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的任意解, 则 $\gamma,\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 线性相关;

(4) K^n 中向量 γ 是这个非齐次线性方程组的解的充分必要条件是存在 $r+1$ 个数 k_i $(i=0,1,\cdots,r)$, $\sum\limits_{i=0}^{r}k_i=1$, 使得

$$\gamma=k_0\gamma_0+k_1(\gamma_0+\eta_1)+k_2(\gamma_0+\eta_2)+\cdots+k_r(\gamma_0+\eta_r).$$

证明: (1) 设

$$\alpha=k_0\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0,$$

则

$$0=A\alpha=k_0A\gamma_0+\sum_{i=1}^{r}k_iA\eta_i=k_0B.$$

所以 $k_0=0$, $k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0$. 由于 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 线性无关, 可得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 因此 $\gamma_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关.

(2) 设

$$k_0\gamma_0+k_1(\gamma_0+\eta_1)+\cdots+k_r(\gamma_0+\eta_r)=0,$$

则

$$(k_0+k_1+\cdots+k_r)\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0,$$

由 (1), $\gamma_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关, 所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0,\qquad k_0+k_1+\cdots+k_r=0,$$

进而 $k_0=k_1=\cdots=k_r=0$. 因此 $\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 线性无关.

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的解, 则 $\gamma-\gamma_0$ 是它的导出组的解. 所以存在 $k_i\in K$, 使 $\gamma-\gamma_0=\sum k_i\eta_i$. 于是

$$\gamma=\gamma_0+\sum k_i\eta_i=\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)\gamma_0+\sum_{i=1}^{r}k_i(\gamma_0+\eta_i),$$

从而 $\gamma,\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\cdots,\gamma_0+\eta_r$ 线性相关.

(4) $(\Rightarrow)$ γ 为非齐次线性方程组的解, 则由 (3) 的证明可得

$$\gamma=\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)\gamma_0+\sum_{i=1}^{r}k_i(\gamma_0+\eta_i),$$

从而此线性表示式的系数之和等于

$$\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)+\sum_{i=1}^{r}k_i=1.$$

($\Leftarrow$) 如 $\sum\limits_{i=0}^{r}k_i=1$, 则由上题的结论可知 γ 是一个解.

*4. 设 Y_1,Y_2 为向量空间 V 的两个线性流形, 下列集合是否构成 V 的线性流形?

(1) $Y_1\cap Y_2$;

(2) $Y_1\cup Y_2$;

(3) $Y_1+Y_2=\{\alpha_1+\alpha_2\mid \alpha_1\in Y_1,\alpha_2\in Y_2\}$.

解: (1) 是. 设 $\alpha\in Y_1\cap Y_2$, 则

$$Y_1=\alpha+W_1,\qquad Y_2=\alpha+W_2,$$

其中 W_1,W_2 为子空间, 于是

$$Y_1\cap Y_2=\alpha+(W_1\cap W_2),$$

可知 $Y_1\cap Y_2$ 也是线性流形.

(2) 不一定. 如取 α,β 线性无关, 令

$$Y_1=L(\alpha),\qquad Y_2=L(\beta),$$

则 Y_1,Y_2 都是线性流形, 但 $\alpha+\beta\notin Y_1\cup Y_2$.

(3) 是. 如

$$Y_1=\alpha_1+W_1,\qquad Y_2=\alpha_2+W_2,$$

其中 W_1,W_2 为子空间, 则

$$Y_1+Y_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(W_1+W_2),$$

可知 Y_1+Y_2 也是线性流形.

*5. 设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 V 的 $r+1$ 个向量, 证明:

$$Y=\left\{\sum_{i=0}^{r}k_i\alpha_i\;\middle|\;\sum_{i=0}^{r}k_i=1,k_i\in K,i=0,1,\cdots r\right\}$$

构成 V 的一个线性流形.

证明: 设

$$\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} k_i = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} l_i = 1,$$

则对任意的 $k, l \in K$, $k+l=1$, 有

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i\right) = \sum_{i=0}^{r}(kk_i + ll_i)\alpha_i,$$

而

$$\sum_{i=0}^{r} kk_i + \sum_{i=0}^{r} ll_i = k\sum_{i=0}^{r} k_i + l\sum_{i=0}^{r} l_i = k + l = 1,$$

于是

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i\right) \in Y,$$

从而 Y 是线性流形.

*6. 设 Y 为向量空间 V 的一个线性流形. 证明: 存在 Y 中的 $r+1$ 个向量 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 使

$$Y = \left\{ \sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r} k_i = 1, k_i \in K, i = 0, 1, \cdots r \right\}.$$

证明: 设 $Y = \alpha_0 + W$, 其中 W 是子空间. 设 W 的基为 $\eta_1, \cdots, \eta_r$, 令

$$\alpha_0 = \alpha_0, \alpha_1 = \alpha_0 + \eta_1, \cdots, \alpha_r = \alpha_0 + \eta_r,$$

则 $\alpha_i \in Y$, 且对任意的 $k_i \in K$, $\sum\limits_{i=0}^{r} k_i = 1$, 有

$$\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_0 + \sum_{i=0}^{r} k_i\eta_i \in \alpha_0 + W = Y.$$

反之, 对任意的 $\alpha = \alpha_0 + \eta \in Y = \alpha_0 + W$, 存在 k_i, 使 $\eta = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\eta_i$, 从而

$$\alpha = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} k_i\right)\alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\alpha_0 + \eta_i),$$

其中

$$\left(1-\sum_{i=1}^{r} k_i\right)+k_1+k_2+\cdots+k_r=1.$$

这证明了

$$Y=\left\{\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{r} k_i=1, k_i\in K, i=0,1,\cdots r\right\}.$$