第二章　行列式

§1　映射与变换

1. 判别下列映射哪些是单映射, 哪些是满映射, 哪些是可逆映射?

(1) $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\qquad a\longmapsto |a|$

(2) V 为几何空间, $\overrightarrow{e}$ 为一固定的单位向量, 映射

$\sigma: V\longrightarrow V$

$\qquad \overrightarrow{a}\longmapsto \sigma(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}-2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e})\overrightarrow{e}$

(3) $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$

$\qquad n\longmapsto n+1$

解: (1) 非单, 非满, 不可逆.

(2) 单, 满, 可逆.

(3) 单, 非满, 不可逆.

2. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的映射, 证明:

(1) 如果 gf 为单映射, 则 f 为单映射;

(2) 如果为 gf 满映射, 则 g 为满映射.

证明: (1) 对任意的 $s_1,s_2\in S$, 如 $f(s_1)=f(s_2)$, 则 $gf(s_1)=gf(s_2)$. 因 gf 是单映射, 故 $s_1=s_2$, 从而 f 是单映射.

(2) 对任意的 $s''\in S''$, 因 gf 是满映射, 故存在 $s\in S$, 使 $gf(s)=s''$, 从而 $s'=f(s)\in S'$, 使 $g(s')=s''$, 故 g 是满映射.

3. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的可逆映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的可逆映射, 则 gf 为集合 S 到集合 S'' 的可逆映射, 且 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

证明: 因为 f 与 g 都可逆, 所以 $f^{-1}g^{-1}$ 是集合 S'' 到 S 的一个映射, 且

$$(f^{-1}g^{-1})(gf)=f^{-1}(g^{-1}g)f=f^{-1}1_{S'}f=f^{-1}f=1_S,$$

$$(gf)(f^{-1}g^{-1})=g(ff^{-1})g^{-1}=g1_{S'}g^{-1}=gg^{-1}=1_{S''}.$$

§2 置换的奇偶性

1. 设:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 pq, $p^{-1}qp$, 并把 p, q 分别表示成对换的乘积.

解: $pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $p^{-1}qp = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,
$p = (13)(34)(47)(25)(56)$, $q = (12)(25)(56)(64)(47)(73)$. (后面两个表示式不唯一).

2. 计算下列置换的逆序数, 并确定其奇偶性:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 逆序数是 8, 偶.

(2) 逆序数是 20, 偶.

(3) 逆序数是 11, 奇.

(4) 逆序数是 n, 奇偶性同 n 的奇偶性.

3. 计算下列排列的逆序数, 并确定其奇偶性:

(1) 5317246;　(2) 384576192;

(3) 246813579;　(4) 987654321.

解: (1) 逆序数是 9, 奇.

(2) 逆序数是 18, 偶.

(3) 逆序数是 10, 偶.

(4) 逆序数是 36, 偶.

4. 确定 i 及 k, 使

(1) $237i864k5$ 成偶排列;　(2) $469k1i752$ 成奇排列.

解: (1) $i = 1, k = 9$.

(2) $i = 8, k = 3$.

5. 计算下列排列的逆序数:

(1) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots642$;

(2) $(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots321$.

解: (1) $n(n-1)$.

(2) $n(2n+1)$.

6. 已知置换 p 的逆序数为 a, 求 p^{-1} 的逆序数.

解: a.

7. 已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 a, 求 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解: 因为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数 $+x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的顺序数 $=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 而 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数 $=x_1x_2\cdots x_n$ 的顺序数, 所以 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数 $=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

***8.** 证明: 对任何不超过 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的正整数 k, 必存在逆序数为 k 的 n 阶排列.

证明: 对 k 用数学归纳法.

首先, 当 $k=1$ 时, $213\cdots n$ 的逆序数为 1;

假定结论对 $k-1$ 成立 $\left(k\leq\dfrac{n(n-1)}{2}\right)$, 即存在 n 阶排列

$$i_1i_2\cdots i_n \tag{1}$$

其逆序数为 $k-1$, 则必存在 $j<k$, 使 $i_j<i_k$ (否则此排列的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$), 从而在 j,k 之间必有两个相邻的编号 $j\leq r<r+1\leq k$, 使 $i_r<i_{r+1}$. 作排列

$$i_1\cdots i_{r-1}i_{r+1}i_ri_{r+2}\cdots i_n,$$

则此排列的逆序数 $=$ 排列 (1) 的逆序数 $+1=k$.

由归纳法原理知结论成立.

***9.** 在所有 n 阶置换中, 分别有多少个逆序数为 1, 2, 3 的置换?

解: 由排列与置换的关系, 我们只需对排列确定相应的值即可.

当 $k=1$ 时, 因任意逆序数为 1 的排列都可以由排列 $123\cdots n$ 交换两个相邻的数而得到, 故逆序数为 1 的排列个数等于 $P_1(n)=n-1$.

由于任一 n 阶排列都可以由 $n-1$ 阶排列添加数 n 而得到. 故当 $k=2$ 时, 逆序数为 2 的排列可由下述方式得到:

(a) $12\cdots n-2\ n-1\longrightarrow 12\cdots n-3\ n\ n-2\ n-1$;

(b) $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ (逆序数 1) $\longrightarrow i_1i_2\cdots i_{n-2}\ n\ i_{n-1}$;

(c) $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ (逆序数 2) $\longrightarrow i_1i_2\cdots i_{n-1}\ n$.

所以逆序数为 2 的排列个数为

$$P_2(n) = 1 + P_1(n-1) + P_2(n-1).$$

由此可得

$$\begin{aligned} &P_2(n-1) = 1 + P_1(n-2) + P_2(n-2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &P_2(3) = 1 + P_1(2) + P_2(2), \end{aligned}$$

所以 $P_2(n) = (n-2) + (n-1) + \cdots + 2 = \dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$.

当 $n=3$ 时, 类似于上面的讨论, 可得

$$P_3(n) = 1 + P_1(n-1) + P_2(n-1) + P_3(n-1),$$

所以

$$P_3(n) - P_3(n-1) = \frac{(n-2)(n+1)}{2},$$

由此可得 $P_3(n) = \dfrac{n(n^2-7)}{6}$.

§3 矩阵

1. 用初等行变换将下列矩阵变为上三角形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$;

解: (1) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -16 & 38 & 5 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 用初等列变换将下列矩阵变为下三角形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -30 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 10 & -11 \\ -1 & 1 & -15 & 8 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \\ -3 & -35 & -54 & 0 \\ -1 & -30 & 27 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§4 行列式的定义

1. 确定下列行列式的项前面所带的符号:

(1) $a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}$; (2) $a_{31}a_{23}a_{14}a_{42}a_{65}a_{56}$.

解: (1) $+$.

(2) $+$.

2. 下列各项是否为五阶行列式的项 (包括符号)?

(1) $-a_{21}a_{34}a_{15}a_{23}a_{52}$; (2) $+a_{32}a_{15}a_{24}a_{53}a_{41}$.

解: (1) 不是.

(2) 是.

3. 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

解: $-a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $-a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$, $-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$.

4. 在 n 阶行列式中, 两条对角线上各元素的乘积分别应取什么符号?

解: $+$, $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

(5) $\begin{vmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x \\ x & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$;

解: (1) 0.

(2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

(3) $(-1)^{n-1}n!$.

(4) $n!$.

(5) a^5+x^5.

(6) $acfh+bdeg-adeh-bcfg$.

§5 行列式的性质

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & -cd & ed \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a & a_4 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a \end{vmatrix}$.

解: (1) $4abcdef$.

(2) 48.

(3) 12.

(4) 160.

(5) a^2b^2.

(6) $(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)$.

2. 证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

证明: (1) 左边 $= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha-\cos^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2\beta-\cos^2\beta & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2\gamma-\cos^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -\cos(2\alpha) & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ -\cos(2\beta) & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ -\cos(2\gamma) & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0$.

(2) 左边 $= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a'+b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ a''+b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a'+b'+c' & -b' & -c' \\ a''+b''+c'' & -b'' & -c'' \end{vmatrix} =$ 右边.

(3) 左边 $=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

§6 行列式按一行(一列)展开

1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ b & -1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 2 & 3 \\ d & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

的第一列各元素的代数余子式.

解: $A_{11}=-1$, $A_{21}=1$, $A_{31}=2$, $A_{41}=2$.

2. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

的全部元素的代数余子式.

解: $A_{11}=7$, $A_{12}=-12$, $A_{13}=3$, $A_{21}=6$, $A_{22}=4$, $A_{23}=-1$, $A_{31}=-5$, $A_{32}=5$, $A_{33}=5$.

3. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & c & d \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 & 1 \\ x^3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

解: (1) 0.

(2) -53.

(3) $-x^3-x^2-x+2$.

(4) $-5x+2y+2z+2t$.

(5) $(ah-bg)(cf-ed)$.

§ 7 用行列式解线性方程组的克拉默法则

1. 用克拉默法则解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3=1, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=11; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+5x_2+\ \ x_3+2x_4=0, \\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-\ \ x_3+2x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4=4; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-5x_3+\ \ x_4=-14, \\ x_1-3x_2-6x_3\qquad\ \ =-11, \\ \quad\ -2x_2+\ \ x_3+2x_4=9, \\ x_1+4x_2+7x_3+6x_4=20. \end{cases}$

解: (1) $|A|=12$, $|B_1|=24$, $|B_2|=-24$, $|B_3|=36$, $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$.

(2) $|A|=-20$, $|B_1|=|B_2|=|B_3|=|B_4|=0$, $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

(3) $|A|=12$, $|B_1|=12$, $|B_2|=24$, $|B_3|=-12$, $|B_4|=-24$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=-2$.

(4) $|A|=-9$, $|B_1|=-9$, $|B_2|=18$, $|B_3|=-27$, $|B_4|=-9$, $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=1$.

2. 求一个二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$, 使$f(1)=1$, $f(-1)=9$, $f(2)=3$.

解: $f(x)=2x^2-4x+3$.

3. 证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ \ x_2+\cdots+\ \ \ x_n=0, \\ 2x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+\cdots+n^nx_n=0 \end{cases}$$

仅有零解.

证明: 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1!2!\cdots n! \neq 0,$$

根据推论 7.2, 原方程只有零解.

§8 拉普拉斯定理

1. 将下列行列式按拉普拉斯定理展开, 以求下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots\cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots\cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \quad \qquad \quad \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \quad \qquad \quad \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots\cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots\cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n}$.

解: (1) 按第 1, 2 两行展开:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^8 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

(2) $(ax-by)(cz-dw)$.

(3) 按第 1, 2, 3 行展开:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 16 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2.$$

(4) 依次按中间两行展开:

$$\text{原式} = (a^2-b^2)D_{2(n-1)} = \cdots = (a^2-b^2)^n.$$

2. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$, $(a \neq b)$;

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解: (1) 各行加到第 1 行, 得 $D = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^n = 1$.

(2) 自第 1 行起, 各行乘以 x 加到下一行:

$$D = (-1)^{n+1}(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) \cdot (-1)^{n-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

(3) $D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (x-a)D_{n-1},$$

所以

$$D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1},$$

又,

$$D_n = D_n^{\mathrm{T}} = a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1},$$

消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

(4) 类似于上题, 可得

$$D_n = z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1}.$$

又

$$D_n = D_n^{\mathrm{T}} = y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}.$$

当 $y \neq z$ 时, 由上两式消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

当 $y = z$ 时, 由递推公式 $D_n = y(x-y)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}$, 得 $D_n = (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

(5) 令 $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, $\ldots$, $\Delta_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$, 则

$$(a+b)\Delta_k - ab\Delta_{k-1} = \Delta_{k+1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \Delta_1 & b\Delta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta_1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b-\dfrac{ab\Delta_0}{\Delta_1} & b & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$=\begin{vmatrix} (a+b)\Delta_1-ab\Delta_0 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta_2 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1} = \cdots = \Delta_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

(6)

$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \\
&= (-1)\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$