第十四章　若尔当典范形的讨论与应用

§1　若尔当典范形的几何意义

1. 对下列矩阵 A, 求变换矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

解: (1) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda+4 & \lambda^2-2\lambda-3 \\ 0 & 3\lambda+7 & \lambda^2-\lambda-6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \lambda-1 \\ 1 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-3), (\lambda+1)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T = Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ = AT$, 从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-3),(\lambda+1)^2$. 因此 A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta_{11}',\eta_{21}',\eta_{22}'$. 其中 η_{11}' 满足的方程是

$$(A-3E)\eta_{11}'=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 4 & -10 & 8\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}\eta_{11}'=0,$$

解得 $\eta_{11}'=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$.

η_{22}' 应满足的条件是

$$(A+E)^2\eta_{22}'=\begin{pmatrix}16 & -16 & 16\\ 32 & -32 & 32\\ 32 & -32 & 32\end{pmatrix}\eta_{22}'=0,$$

$$(A+E)\eta_{22}'=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}\eta_{22}'\neq 0.$$

可取 $\eta_{22}'=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta_{21}'=(A+E)\eta_{22}'=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

于是

$$T=(\eta_{11}',\eta_{21}',\eta_{22}')=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda-5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-2), (\lambda-2)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = Q_0 = T.$$

从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-2), (\lambda-2)^2$, 因此 A 的极小多项式 $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$, A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11}, \eta'_{21}, \eta'_{22}$.

由于 $(A-2E)^2 = 0$, η'_{22} 应满足的条件是

$$(A-2E)\eta'_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \eta'_{22} \neq 0.$$

可取 $\eta'_{22} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{21} = (A-2E)\eta'_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

η'_{11} 满足的方程是

$$(A-2E)\eta'_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \eta'_{11} = 0,$$

可取一个解 $\eta'_{11} = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, 它与 η'_{21} 线性无关.

于是

$$T = (\eta'_{11}, \eta'_{21}, \eta'_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & \lambda+5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 2(-3\lambda^3-\lambda^2+3\lambda+17) \\ 0 & 1 & -\lambda+3 & 3\lambda^4-8\lambda^3-6\lambda^2+24\lambda+19 \\ 1 & 0 & 4 & 4(-3\lambda^3-\lambda^2+7\lambda+5) \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 2(-3\lambda^3-\lambda^2+3\lambda+17) \\ 0 & 1 & -\lambda+3 & 3\lambda^4-8\lambda^3-6\lambda^2+24\lambda+19 \\ 1 & 0 & 4 & 4(-3\lambda^3-\lambda^2+7\lambda+5) \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)^2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda+1) & 1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda+1) & 1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -8\lambda+16 & 0 \\ \dfrac{1}{2}(3\lambda^4-5\lambda^3-5\lambda^2-11\lambda+34) & 0 \\ \dfrac{1}{4}(-3\lambda^5+14\lambda^4-10\lambda^3-35\lambda^2+27\lambda+39) & 0 \\ 3\lambda^4-5\lambda^3-9\lambda^2+8\lambda+11 & 1 \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 8\lambda+16 & 0 \\ \dfrac{1}{2}(-3\lambda^4-7\lambda^3+\lambda^2+19\lambda+30) & 1 \\ \dfrac{1}{4}(3\lambda^5-2\lambda^4-22\lambda^3+15\lambda^2+57\lambda+25) & -\lambda+3 \\ -3\lambda^4-7\lambda^3+5\lambda^2+15\lambda+6 & 4 \end{matrix}\right).$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^5+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}\lambda^4$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -7 & 0 \\ -5 & 0 & -11 & 0 \\ -10 & 0 & -14 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 2 & 0 \\ -35 & 0 & 15 & 0 \\ -36 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2$$

$$+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -32 & 0 & 32 & 0 \\ -22 & 0 & 38 & 0 \\ 27 & 0 & 57 & -4 \\ 32 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}\lambda+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 64 & 0 & 64 & 0 \\ 68 & 0 & 60 & 8 \\ 39 & 0 & 25 & 12 \\ 44 & 4 & 24 & 16 \end{pmatrix}.$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T=Q_0=\begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 & 8 \\ 8 & -12 & 8 & 6 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ=AT$, 从而

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2$. 因此 A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11},\eta'_{12},\eta'_{21},\eta'_{22}$. 其中 η'_{12} 满足的方程是

$$(A-E)^2\eta'_{12}=\begin{pmatrix}-12&16&12&-16\\-16&20&16&-20\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\eta'_{12}=0,$$

$$(A-E)\eta'_{12}=\begin{pmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\eta'_{12}\neq 0.$$

解得 $\eta'_{12}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

$$\eta'_{11}=(A-E)\eta'_{12}=\begin{pmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

η'_{22} 应满足的条件是

$$(A+E)^2\eta'_{22}=\begin{pmatrix}0&0&12&-8\\0&0&8&-4\\0&0&12&-8\\0&0&8&-4\end{pmatrix}\eta'_{22}=0,$$

$$(A+E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\eta'_{22}\neq 0.$$

可取 $\eta'_{22}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{21}=(A+E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是

$$T=(\eta'_{11},\eta'_{12},\eta'_{21},\eta'_{22})=\begin{pmatrix}2&1&4&1\\2&0&4&0\\2&1&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

显然本题的解二远比解一简单.

(4) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E-A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix}\lambda E-A\\E\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda-1&0\\0&0&0&(\lambda-1)^3\\1&-4&-\lambda+4&\lambda^2-2\lambda+4\\0&1&1&-2\lambda+3\\0&0&0&3\\0&0&1&-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-1),(\lambda-1)^3$. A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda)=\begin{pmatrix}1&-4&-\lambda+4&\lambda^2-2\lambda+4\\0&1&1&-2\lambda+3\\0&0&0&3\\0&0&1&-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda+4 & \lambda^2-3\lambda+5 & 4\lambda-3 & -4 \\ 1 & -2\lambda+3 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1} = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \\ & + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T = Q_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ = AT$, 从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-1), (\lambda-1)^3$. 因此 A 的极小多项式是 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$, 若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11}, \eta'_{21}, \eta'_{22}, \eta'_{23}$.

由于 $(A-E)^3 = 0$, η'_{23} 应满足的条件是

$$(A-E)^2\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \eta'_{23} \neq 0.$$

可取 $\eta'_{23} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{22} = (A-E)\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\eta'_{21} = (A-E)^2\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

η'_{11} 满足的方程是

$$(A-E)\eta'_{11}=\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&-3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\eta'_{11}=0.$$

解得 $\eta'_{11}=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 它与 η'_{21} 线性无关. 于是

$$T=(\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22},\eta'_{23})=\begin{pmatrix}0&3&0&1\\0&1&-2&0\\1&3&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}.$$

2. 证明: 每个复方阵 A 可分解为 $A=D+H$, 其中 D 为可对角化矩阵, H 为幂零阵 (即有一个正整数 m, 使得 $H^m=0$), 且 $DH=HD$.

证明: 设 $A=J_k(c)$ 是一个若尔当块, 则有分解

$$J_k(c)=cE_k+H_k=\begin{pmatrix}c&0&\cdots&0\\0&c&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

其中 cE_k 是纯量矩阵, H_k 满足 $H_k^k=0$, 是幂零矩阵, 而且 $(cE_k)H_k=H_k(cE_k)$. 因此这是满足条件的分解.

再设 $A=J=\mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1),\cdots,J_{k_s}(\lambda_s))$, 则有

$$J=D_J+H_J=\mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1},\cdots,\lambda_sE_{k_s})+\mathrm{diag}(H_{k_1},\cdots,H_{k_s}),$$

其中 $D_J=\mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1},\cdots,\lambda_sE_{k_s})$ 是对角矩阵, $H_J=\mathrm{diag}(H_{k_1},\cdots,H_{k_s})$ 满足 $H_J^{\max_i\{k_i\}}=0$. 因此 H_J 是幂零矩阵. 由于

$$\begin{aligned}D_JH_J&=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{k_1}H_{k_1}&0&\cdots&0\\0&\lambda_2E_{k_2}H_{k_2}&\cdots&0\\0&0&\cdots&\lambda_sE_{k_s}H_{k_s}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}H_{k_1}(\lambda_1E_{k_1})&0&\cdots&0\\0&H_{k_2}(\lambda_2E_{k_2})&\cdots&0\\0&0&\cdots&H_{k_s}(\lambda_sE_{k_s})\end{pmatrix}=H_JD_J,\end{aligned}$$

可见这也是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = D_J + H_J$, 令 $D = TD_JT^{-1}$, $H = TH_JT^{-1}$. 则 $A = D + H$, D 相似于对角矩阵 D_J, 因此是可对角化矩阵. 又因 $H^m = TH_J^mT^{-1}$, 因此从 H_J 是幂零矩阵可以得到 H 也是幂零矩阵. 最后由

$$\begin{aligned} DH &= (TD_JT^{-1})(TH_JT^{-1}) = TD_JH_JT^{-1} \\ &= TH_JD_JT^{-1} = (TH_JT^{-1})(TD_JT^{-1}) = HD, \end{aligned}$$

可知这是符合条件的分解.

3. 特征值全为 1 的方阵称为*幂幺矩阵* (*unipotent matrix*). 证明: 每个可逆的复方阵 A 可分解为 $A = DU$, 其中 D 为可对角化矩阵, U 为幂幺阵, 且 $DU = UD$.

证明: 设 $A = J_k(c)$ 是一个若尔当块, 且 $c \neq 0$, 则有分解

$$J_k(c) = (cE_k)(U_k(c^{-1})) = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

其中 cE_k 是纯量矩阵, $U_k(c^{-1})$ 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵, 而且 (cE_k) $U_k(c^{-1}) = U_k(c^{-1})(cE_k)$. 因此这是满足条件的分解.

再设 $A = J = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \cdots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 由于 A 是可逆矩阵, 因此所有的特征值 $\lambda_i \neq 0$. 则有

$$J = D_JU_J = \mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1}, \cdots, \lambda_sE_{k_s})\,\mathrm{diag}(U_{k_1}(\lambda_1^{-1}), \cdots, U_{k_s}(\lambda_s^{-1})),$$

其中 $D_J = \mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1}, \cdots, \lambda_sE_{k_s})$ 是对角矩阵, $U_J = \mathrm{diag}(U_{k_1}(\lambda_1^{-1}), \cdots, U_{k_s}(\lambda_s^{-1}))$ 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵. 由于

$$\begin{aligned} D_JU_J &= \begin{pmatrix} \lambda_1E_{k_1}H_{k_1}(\lambda_1^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_{k_2}H_{k_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{k_s}H_{k_s}(\lambda_s^{-1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_{k_1}(\lambda_1E_{k_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{k_2}(\lambda_2E_{k_2}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & H_{k_s}(\lambda_s^{-1})(\lambda_sE_{k_s}) \end{pmatrix} = U_JD_J, \end{aligned}$$

可见这也是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = D_J U_J$, 令 $D = TD_J T^{-1}$, $U = TU_J T^{-1}$. 则 $A = DU$, D 相似于对角矩阵 D_J, 因此是可对角化矩阵. 又因 U 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵. 最后由

$$\begin{aligned} DU &= (TD_J T^{-1})(TU_J T^{-1}) = TD_J U_J T^{-1} \\ &= TU_J D_J T^{-1} = (TU_J T^{-1})(TD_J T^{-1}) = UD, \end{aligned}$$

可知这是符合条件的分解.

*4. 证明: 每个复方阵可分解为两个复对称矩阵的乘积, 并且其中的一个是可逆的.

证明: 设 $A = J_k(c)$ 是一个若尔当块, 则有分解

$$J_k(c) = S_k(c) P_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & c \\ 0 & \cdots & 1 & c & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \iddots & 0 & 0 & 0 \\ c & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $S_k(c), P_k$ 都是对称矩阵, P_k 又是可逆的.

再设 $A = J = \operatorname{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \cdots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 则有

$$J = S_J P_J = \operatorname{diag}(S_{k_1}(\lambda_1), \cdots, S_{k_s}(\lambda_s)) \operatorname{diag}(P_{k_1}, \cdots, P_{k_s}),$$

其中 $S_J = \operatorname{diag}(S_{k_1}(\lambda_1), \cdots, S_{k_s}(\lambda_s))$ 和 $P_J = \operatorname{diag}(P_{k_1}, \cdots, P_{k_s})$ 都是对称矩阵, P_J 又是可逆的. 因此这是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = S_J P_J$, 令 $S = TS_J T^{\mathrm{T}}$, $P = T^{-\mathrm{T}} P_J T^{-1}$, 则 S, T 都是对称矩阵, P 又是可逆的. 并且有满足条件的分解

$$A = TS_J P_J T^{-1} = (TS_J T^{\mathrm{T}})(T^{-\mathrm{T}} P_J T^{-1}) = SP.$$

§ 2 简单的矩阵方程

1. 设

$$A=U\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)U^{-1},\ B=V\left(\begin{array}{c|cc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)V^{-1}.$$

求解 $AX=XB$.

解: $X=U\left(\begin{array}{c|cc|ccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ \hline 0 & d & e & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)V^{-1}.$

2. 设

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

求 $C(A)$ 以及 $\dim C(A)$.

解: $C(A)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|cc|c} a & b & c & d & e & 0\\ 0 & a & b & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & f & g & h & i & 0\\ 0 & 0 & f & 0 & h & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{array}\right)\right\}$, 因此 $\dim C(A)=10$.

3. 写出矩阵方程

$$X^2-2X-3E=0,\quad X\in M_3(\mathbb{C}),$$

的解的初等因子组.

解: $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$, 因此初等因子组有4种可能: $\lambda-3,\lambda-3,\lambda-3$; $\lambda-3,\lambda-3,\lambda+1$; $\lambda-3,\lambda+1,\lambda+1$; $\lambda+1,\lambda+1,\lambda+1$.

4. 不用命题 3.1 直接证明: 若 A 与 B 有公共的特征值, 则矩阵方程 $AX=XB$ 有非零解.

证明: 设 A 与 B 有公共的特征值 λ_0, 则 B^{T} 也有特征值 λ_0. 设与 A 和 B^{T} 对应的特征向量分别是 U 和 V (看成列矩阵). 则有 $AU=\lambda_0 U$, $B^{\mathrm{T}}V=\lambda_0 V$. 于是 $A(UV^{\mathrm{T}})=\lambda_0 UV^{\mathrm{T}}$, $(UV^{\mathrm{T}})B=U(V^{\mathrm{T}}B)=U(B^{\mathrm{T}}V)^{\mathrm{T}}=\lambda_0 UV^{\mathrm{T}}=A(UV^{\mathrm{T}})$, 因此 UV^{T} 是矩阵方程 $AX=XB$ 的一个非零解.

§3 矩阵函数

1. 设 $A=T\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}T^{-1}$, 试直接利用矩阵函数的定义写出公式

$$f(A)=f(3)Z_{10}+f(2)Z_{20}+f'(2)Z_{21}$$

中的 Z_{10},Z_{20},Z_{21}.

解: 根据定义,

$$\begin{aligned}f(A)=T\begin{pmatrix}f(3)&0&0\\0&f(2)&f'(2)\\0&0&f(2)\end{pmatrix}T^{-1}&=f(3)T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}\\&+f(2)T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^{-1}+f'(2)T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}.\end{aligned}$$

因此

$$Z_{10}=T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1},\qquad Z_{20}=T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^{-1},$$

$$Z_{21}=T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 求 A^{100}, $\exp A$, $\sqrt[3]{A}$.

解: 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{pmatrix},$$

$m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. 所以

$$f(A)=f(-1)Z_{10}+f(1)Z_{20}+f'(1)Z_{21}.$$

分别取 $f(\lambda)=1,\lambda,\lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned}E&=Z_{10}+Z_{20}\\A&=-Z_{10}+Z_{20}+Z_{21}\\A^2&=Z_{10}+Z_{20}+2Z_{21}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}Z_{10}&=\frac{1}{4}(A^2-2A+E)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-3&0\\-1&1&0\\-2&2&0\end{pmatrix}\\Z_{20}&=\frac{1}{4}(-A^2+2A+3E)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&0\\1&3&0\\2&-2&4\end{pmatrix}\\Z_{21}&=\frac{1}{2}(A^2-E)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

当 $f(\lambda)=\lambda^{100}$ 时,

$$A^{100}=Z_{10}+Z_{20}+100Z_{21}=\begin{pmatrix}51&-50&100\\50&-49&100\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

当 $f(\lambda)=\exp(\lambda)$ 时,

$$\exp(A)=\mathrm{e}^{-1}Z_{10}+\mathrm{e}Z_{20}+\mathrm{e}Z_{21}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\\ 3\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\\ 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{-1} & -2\mathrm{e}+2\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\end{pmatrix}.$$

当 $f(\lambda)=\sqrt[3]{\lambda}$ 时,

$$\sqrt[3]{A}=-Z_{10}+Z_{20}+\frac{1}{3}Z_{21}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵 A 的初等因子应该具有怎样的形式才能使得 $\sin A=\cos A$?

解: 设 $f(\lambda)=\sin\lambda$, $g(\lambda)=\cos\lambda$. 则 $f(A)=g(A)$ 的充分必要条件是 $f(\Lambda_A)=g(\Lambda_A)$. 设 $(\lambda-c)^k$ 是 A 的一个初等因子. 则除了 $f(c)=\sin c=g(c)=\cos c$ 外, 当 $k>1$ 时还有 $f'(c)=\cos c=g'(c)=-\sin c$. 因此当 $k>1$ 时必有 $\sin c=\cos c=0$, 这是不可能的. 所以 $k=1$. 解 $\sin c=\cos c$ 得 $c=m\pi+\dfrac{\pi}{4}$. 因此 A 的初等因子都应该是形如 $(\lambda-\dfrac{\pi}{4}+m\pi)$ 的. A 是一个可对角化矩阵. 这个条件也是充分的.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$, 试求矩阵 B, 使 $B^2=A$.

解: 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ 2 & \lambda+6 & -13\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix},$$

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 所以

$$f(A)=f(1)Z_{10}+f'(1)Z_{11}+f''(1)Z_{12}.$$

分别取 $f(\lambda)=1,\lambda,\lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned}E&=Z_{10}\\ A&=Z_{10}+Z_{11}\\ A^2&=Z_{10}+2Z_{11}+2Z_{12}\end{aligned}$$

解得

$$Z_{10}=E$$

$$Z_{11} = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, 有

$$B = \sqrt{A} = Z_{10} + \frac{1}{2}Z_{11} - \frac{1}{4}Z_{12} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -21 & 30 \\ -9 & -23 & 58 \\ -5 & -19 & 42 \end{pmatrix}.$$

B 满足 $B^2 = A$.

5. 设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是正实数. 证明: 存在实矩阵 B, 使 $B^2 = A$.

证明: 设 A 的初等因子是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$, 其中 λ_i 都是正实数. 以 $(\lambda-\sqrt{\lambda_1})^{k_1}, \cdots, (\lambda-\sqrt{\lambda_t})^{k_t}$ 作为初等因子组构造若尔当典范形 J, 则 J 是一个实矩阵, 把命题 2.5 应用于矩阵函数 $f(\lambda) = \lambda^2$, 由于 $f'(\sqrt{\lambda_i}) = 2\sqrt{\lambda_i} \neq 0$, 因此 J^2 的初等因子组是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$, 与 A 相同, 所以 J^2 与 A 相似. 从而存在可逆实矩阵 T 使得 $A = T^{-1}J^2T = (T^{-1}JT)^2$. $B = T^{-1}JT$ 就是满足题意的实矩阵.

6. 已知矩阵 A 的初等因子组是 $\lambda^3, \left(\lambda-\dfrac{\pi}{2}\right)^3, (\lambda-\pi)^4$. 试写出 $\cos A$ 的初等因子组.

解: 设 $f(\lambda) = \cos\lambda$. 则 $f(0) = 1, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, f(\pi) = -1$, $f'(\lambda) = -\sin\lambda$, $f'(0) = f'(\pi) = 0, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, $f''(\lambda) = -\cos\lambda$, $f''(0) = -1, f''(\pi) = 1$. 因此根据命题 2.5, $f(A) = \cos A$ 的初等因子组是 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1), \lambda^3, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^2$.

7. 设 A 的特征值全为 ± 1, 证明: A 与 A^{-1} 相似.

证明: 设 $f(\lambda) = \lambda^{-1}$, 则有 $f(A) = A^{-1}$. 对于 A 的任意一个初等因子 $(\lambda-c)^k$, 由于 $f'(c) = -c^{-2} \neq 0$, 根据命题 2.5, $f(A)$ 相应的初等因子是 $(\lambda-f(c))^k$. 当 $c = \pm 1$ 时, 有 $f(c) = c^{-1} = c$, 因此 A 与 $f(A)$ 有相同初等因子组, 从而相似.

8. 设 J 是特征值为 1 的 n 阶若尔当块, 试求使 $g(J)$ 相似于 J 的多项式 $g(\lambda)$ 应满足的充分必要条件.

证明: J 的初等因子只有一个 $(\lambda-1)^n$. $g(J)$ 与 J 相似的充分必要条件是 $g(J)$ 的初等因子也是 $(\lambda-1)^n$. 由命题 2.5 可知, 这等价于 $g(1)=1$, $g'(1)\neq 0$.

9. 利用矩阵函数, 求出递归数列

$$D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots, \quad D_n = 3D_{n-1} - 3D_{n-2} + D_{n-3} \quad (n>3)$$

的通项公式 $D_n = f(D_1, D_2, D_3)$.

(提示: 考察矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$)

解: 我们有

$$\begin{pmatrix} D_{n-2} \\ D_{n-1} \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-3} \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-3} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}.$$

为求 A^{n-3}, 可以利用矩阵函数.

通过计算,

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 3 & \lambda-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}.$$

因此 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. 所以

$$f(A) = f(1)Z_{10} + f'(1)Z_{11} + f''(1)Z_{12}.$$

分别取 $f(\lambda) = 1, \lambda, \lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned} E &= Z_{10} \\ A &= Z_{10} + Z_{11} \\ A^2 &= Z_{10} + 2Z_{11} + 2Z_{12} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} Z_{10} &= E \\ Z_{11} &= A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda) = \lambda^{n-3}$, 有

$$\begin{aligned} A^{n-3} &= Z_{10} + (n-3)Z_{11} + (n-3)(n-4)Z_{12} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n^2 - 9n + 20 & -2n^2 + 16n - 30 & (n-3)(n-4) \\ (n-3)(n-4) & -2n^2 + 12n - 16 & n^2 - 5n + 6 \\ (n-2)(n-3) & -2(n-1)(n-3) & (n-1)(n-2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(实际上只要计算矩阵的第 3 行就够了) 因此

$$D_n = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)D_1 - (n-1)(n-3)D_2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)D_3.$$

***10.** 试应用第十三章第 5 节练习 13–5.6 的结论证明命题 3.5 的 (2).

证明: 根据假设, 有 $f(J_k(c)) = f(c)E_k + \dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h + \cdots$, 因此 $f(c)E_k - f(J_k(c)) = -\dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h + \cdots$, 且当 $1 \le i \le q$ 时有 $(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = \left(-\dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h\right)^i + \cdots$. 注意到 $k = hq + r$, $0 \le r < h$, 当 $i > q$ 时有 $(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = 0$. 又因 $f^{(h)}(c) \ne 0$, 可得

$$n_i = \operatorname{rank}(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = \operatorname{rank} H_k^{hi} = \begin{cases} k - hi & 若\ 1 \le i \le q, \\ 0 & 若\ i \ge q+1. \end{cases}$$

并且 $n_0 = k$. 于是

$$a_i = a_{i-1} - a_i = \begin{cases} h & 若\ 1 \le i \le q, \\ k - hq = r & 若\ i = q+1, \\ 0 & 若\ i \ge q+2. \end{cases}$$

$$b_i = b_i - b_{i+1} = \begin{cases} 0 & 若\ 1 \le i \le q-1, \\ h - r & 若\ i = q, \\ r & 若\ i = q+1, \\ 0 & 若\ i \ge q+2. \end{cases}$$

也就是说非零的 b_i 只有 $b_q = h - r$, $b_{q+1} = r$. 根据练习 13–5.6 的结论 (2), $f(J_k(c))$ 的属于特征值 $f(c)$ 的 q 阶若尔当块有 $h-r$ 个, $q+1$ 阶若尔当块有 r 个. 这就是命题 2.5 的 (2) 的结论.

*__11.__ 设

$$\begin{aligned}
&m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},\\
&m_i(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}\\
&\quad = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{k_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{k_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}.
\end{aligned}$$

对于满足 $1 \le i \le s$, $0 \le j \le k_i - 1$ 的 i, j, 定义

$$\varphi_{ij}(\lambda) = \frac{1}{j!}\sum_{\alpha=0}^{k_i-j-1}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(\alpha)}_{\lambda=\lambda_i}(\lambda-\lambda_i)^{j+\alpha}m_i(\lambda),$$

其中右上角的 (α) 表示关于 λ 取 α 阶导数, 右下角的 $\lambda = \lambda_i$ 表示在 λ_i 处的导数值. 验证:

$$(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_p} = \begin{cases} 1, & \text{若 } p = i,\ q = j,\\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

这样的多项式称为拉格朗日–西尔维斯特插值多项式.

证明: 当 $p \ne i$ 时, $(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$ 是 $m_i(\lambda)$ 的因子, 因此 $(\lambda-\lambda_p)^{m_p} \mid \varphi_{ij}(\lambda)$, 从而 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 在 λ_p 处的小于 m_p 阶导数都等于 0. 以下考虑 $p = i$ 的情形. 利用莱布尼兹求导公式,

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_i}\\
&= \frac{1}{j!}\sum_{l=0}^{q}\frac{q!}{l!(q-l)!}\left(\sum_{\alpha=0}^{k_i-j-1}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(\alpha)}_{\lambda=\lambda_i}(\lambda-\lambda_i)^{j+\alpha}\right)^{(l)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i}\\
&= \frac{1}{j!}\sum_{l=j}^{q}\frac{q!}{l!(q-l)!}\cdot\frac{l!}{(l-j)!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(l-j)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i},
\end{aligned}$$

当 $q < j$ 时上式等于 0, 当 $q = j$ 时, 上式等于 1. 如果 $q > j$, 同样根据莱布尼兹求导公式, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=j}^{q}\frac{(q-j)!}{(l-j)!(q-l)!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(l-j)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i}\\
&= \left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\cdot m_i(\lambda)\right)^{(q-j)}_{\lambda=\lambda_i} = (1)^{(q-j)}_{\lambda=\lambda_i} = 0.
\end{aligned}$$

这样就证明了当 $q \neq j$ 时有 $(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_i} = 0$.

§4 矩阵的广义逆

1. 根据命题 4.1 求出矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

的所有 {1} 逆.

解: 通过初等变换

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

就有

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的所有 {1} 逆为

$$G = Q \begin{pmatrix} E_2 & U \\ V & W \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ v_{11} & v_{12} & w_1 \\ v_{21} & v_{22} & w_2 \\ v_{31} & v_{32} & w_3 \end{pmatrix} P.$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 证明 $G=\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & X_{12} \\ X_{21} & A_2^{(1)} \end{pmatrix}$ 是 A 的 $\{1\}$ 逆的充分必要条件是 $A_1X_{12}A_2=A_2X_{21}A_1=0$.

证明: 由于

$$\begin{aligned} AGA &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & X_{12} \\ X_{21} & A_2^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1A_1^{(1)}A_1 & A_1X_{12}A_2 \\ A_2X_{21}A_1 & A_2A_2^{(1)}A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1X_{12}A_2 \\ A_2X_{21}A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $AGA=A$ 当且仅当 $A_1X_{12}A_2=A_2X_{21}A_1=0$.

3. 证明 $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等矩阵 (即满足 $A^2=A$ 的矩阵). 且

$$\operatorname{rank}(AA^{(1)})=\operatorname{rank}(A^{(1)}A)=\operatorname{rank}A.$$

证明: $(AA^{(1)})^2=(AA^{(1)}A)A^{(1)}=AA^{(1)}$, $(A^{(1)}A)^2=A^{(1)}(AA^{(1)}A)=A^{(1)}A$, 因此 $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等矩阵.

根据矩阵乘积的秩的不等式 $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}$, 可得

$$\operatorname{rank}(AA^{(1)})\le\operatorname{rank}A \quad 以及 \quad \operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(AA^{(1)}A)\le\operatorname{rank}(AA^{(1)}).$$

因此 $\operatorname{rank}(AA^{(1)})=\operatorname{rank}A$. 同理可证另一个等式.

4. 设 $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A^{(1)}$ 是 A 的一个 $\{1\}$ 逆. 如果对于 $B\in M_{m,1}(\mathbb{R})$, 方程 $AX=B$ 有解. 证明方程的所有解都能表示成以下形式

$$X=A^{(1)}B+(E_n-A^{(1)}A)Z$$

其中 $Z\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ 是任意的列矩阵.

(提示: 如果 X_0 是 $AX=B$ 的一个解, 可取 $Z=X_0$.)

证明: 首先验证上面定义的 X 确实是方程的解:

$$AX=A(A^{(1)}B+(E_n-A^{(1)}A)Z)=A(A^{(1)}B)+(A-AA^{(1)}A)Z=A(A^{(1)}B).$$

由于 $A^{(1)}$ 是 A 的 $\{1\}$ 逆, 因此 $A^{(1)}B$ 是方程 $AX=B$ 的解. 即 $A(A^{(1)}B)=B$. 从而 $AX=B$.

反之, 若方程 $AX=B$ 有解 X_0, 即 $AX_0=B$, 则

$$A^{(1)}B+(E_n-A^{(1)}A)X_0=A^{(1)}B+X_0-A^{(1)}AX_0=A^{(1)}B+X_0-A^{(1)}B=X_0.$$

只要取 $Z=X_0$, X_0 就可用上述公式表示.

5. 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $G \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ 是一个列向量. 证明: 若 GB 是 $AX = B$ 的解, 且满足 $(GA)^{\mathrm{T}} = GA$, 则必有 $(E_n - GA)^{\mathrm{T}}(GB) = 0$.

证明: 由于 GB 是 $AX = B$ 的解, 因此 $AGB = B$. 从而

$$\begin{aligned}&(E_n - GA)^{\mathrm{T}}(GB) = (E_n - (GA)^{\mathrm{T}})GB = (E_n - GA)GB \\ &= (GB - G(AGB)) = 0.\end{aligned}$$

6. 验证 (4.2) 式定义的 A^+ 确实是 A 的 M-P 逆.

证明: 记 $G = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}$.

(1) $AGA = (UV)(V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})(UV) = UV = A$.

(2) $GAG = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})(UV)(V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}) = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}} = G$.

(3) $(AG)^{\mathrm{T}} = (UVV^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = U((U^{\mathrm{T}}U)^{\mathrm{T}})^{-1}U^{\mathrm{T}} = U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}} = AG$.

(4) $(GA)^{\mathrm{T}} = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}UV)^{\mathrm{T}} = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}V)^{\mathrm{T}} = V^{\mathrm{T}}((VV^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}V = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}V = GA$.

7. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的 M-P 逆.

解: 先作满秩分解

$$A = UV = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$VV^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&A^+ = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. 利用 M-P 逆求以下方程组的最小二乘解:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

解: 取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此上述方程组可以表达为 $AX = B$. 利用广义逆可以得到一个最小二乘解

$$A^+B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

即 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 3$.

9. 验证例 4.3 的结论.

(1) $$AA^+A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^+ \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_1^+A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^+A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^+A_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = A.$$

$$(3)\ (AA^+)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_1A_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^+ \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1A_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^+ \end{pmatrix} = AA^+.$$

(2) 与 (4) 可类似证明.

10. 举例说明 $(AB)^+ = B^+A^+$ 不一定正确.

解: 例如取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = (1)$, $(AB)^+ = (1)$, $A^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B^+A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

*__11.__ 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $G \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ 满足以下两个条件:

$$AGA = A, \qquad (GA)^{\mathrm{T}} = GA.$$

则称 G 是 A 的 $\{1,4\}$ 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, 使得方程 $AX = B$ 有解. 证明 GB 是具有最小长度的解 (这里把列矩阵看成标准欧几里得空间里的向量, 因此向量 X 的长度 $|X| = \sqrt{X^{\mathrm{T}}X}$.)

(提示: 利用练习 4, 5 的结果.)

证明: 由于 G 也是 A 的 $\{1\}$ 逆, 因此 GB 是方程 $AX = B$ 的解, 即 $A(GB) = B$. 由练习 1 知, 方程的所有解可以表成

$$X = GB + (E_n - GA)Z$$

的形式. 而根据练习 5, 有

$$((E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}GB = Z^{\mathrm{T}}(E_n - GA)^{\mathrm{T}}GB = 0,$$

$$(GB)^{\mathrm{T}}(E_n - GA)Z = ((E_n - GA)^{\mathrm{T}}GB)^{\mathrm{T}}Z = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} |X|^2 &= (GB + (E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}(GB + (E_n - GA)Z) \\ &= |GB|^2 + |(E_n - GA)Z|^2 + (GB)^{\mathrm{T}}(E_n - GA)Z + ((E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}GB \end{aligned}$$

$$= |GB|^2 + |(E_n - GA)Z|^2 \geq |GB|^2.$$

可见 GB 确实是长度最小的解.

*$\mathbf{12.}$ 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A^+ 是 A 的 M-P 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. 证明方程 $AX = B$ 的所有最小二乘解都能表示成以下形式

$$X = A^+B + (E_n - A^+A)Z$$

其中 $Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ 是任意的列矩阵.

(提示: 参考练习 4 的解法.)

证明: 由于 M-P 逆当然是 $\{1\}$ 逆, 因此当 $AX = B$ 有解时结论已在练习 4 证明. 现在假设 $AX = B$ 无解, 那么 X_0 是最小二乘解的充分必要条件是 $A^{\mathrm{T}}AX_0 = A^{\mathrm{T}}B$. 因此由于 A^+B 是最小二乘解, 首先有 $A^{\mathrm{T}}AA^+B = A^{\mathrm{T}}B$. 以下验证练习给出的 X 确实是方程的最小二乘解:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}AX &= A^{\mathrm{T}}A(A^+B + (E_n - A^+A)Z) \\ &= A^{\mathrm{T}}A(A^+B) + (A^{\mathrm{T}}A - A^{\mathrm{T}}(AA^+A))Z = A^{\mathrm{T}}AA^+B = A^{\mathrm{T}}B. \end{aligned}$$

可见 X 是方程 $AX = B$ 的最小二乘解.

反之, 若 X_0 是方程 $AX = B$ 的最小二乘解, 即 $A^{\mathrm{T}}AX_0 = A^{\mathrm{T}}B$, 则

$$\begin{aligned} A^+AX_0 &= A^+AA^+AX_0 = A^+(AA^+)^{\mathrm{T}}AX_0 = A^+(A^+)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX_0 \\ &= A^+(A^+)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B = A^+(AA^+)^{\mathrm{T}}B = A^+AA^+B = A^+B. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} A^+B + (E_n - A^+A)X_0 &= A^+B + X_0 - A^+AX_0 \\ &= A^+B + X_0 - A^+B = X_0. \end{aligned}$$

也就是说只要取 $Z = X_0$, X_0 就可用上述公式表示.

*$\mathbf{13.}$ 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A^+ 是 A 的 M-P 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. 证明 A^+B 是方程 $AX = B$ 的长度最小的最小二乘解.

证明: 由于 $(A^+A)^{\mathrm{T}} = A^+A$, 因此 $E - AA^+$ 是对称矩阵. 所以

$$(E - A^+A)^{\mathrm{T}}A^+B = (E - A^+A)A^+B = A^+B - (A^+AA^+)B = 0,$$

$$(A^+B)^{\mathrm{T}}(E - A^+A) = ((E - A^+A)^{\mathrm{T}}A^+B)^{\mathrm{T}} = 0.$$

根据练习 12, $AX = B$ 的所有最小二乘解可以表成 $A^+B + (E_n - A^+A)Z$, 于是

$$|A^+B + (E_n - A^+A)Z|^2 = |A^+B|^2 + |(E_n - A^+A)Z|^2$$

$$\begin{aligned}&+(A^+B)^{\mathrm{T}}(E-A^+A)Z+((E-A^+A)Z)^{\mathrm{T}}A^+B\\&=|A^+B|^2+|(E_n-A^+A)Z|^2\geq|A^+B|^2.\end{aligned}$$

可见 A^+B 确实是长度最小的最小二乘解.

§5　矩阵特征值的范围

1. 模仿例 5.1 求出以下矩阵的特征值范围:

(1) $A=\begin{pmatrix}9&-1&1\\-1&\mathrm{i}&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&10&1\\-8&2&20\end{pmatrix}$.

解: (1) A 的 3 个盖施戈林圆为

$$\begin{aligned}G_1&:|z-9|\leq 2,\\G_2&:|z-\mathrm{i}|\leq 2,\\G_3&:|z-3|\leq 2.\end{aligned}$$

G_2 与 G_3 相交, G_1 是孤立的, 因此其中恰有一个特征值.

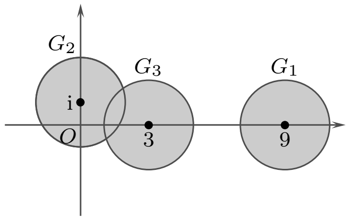
取对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(2,1,1)$, 则

$$B=DAD^{-1}=\begin{pmatrix}9&-2&2\\-0.5&\mathrm{i}&1\\-0.5&1&3\end{pmatrix}.$$

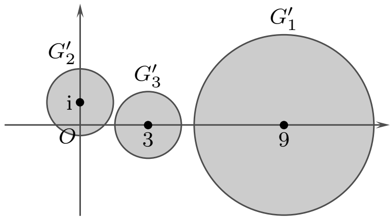
得到新的盖施戈林圆

$$\begin{aligned}G_1'&:|z-9|\leq 4,\\G_2'&:|z-\mathrm{i}|\leq 1.5,\\G_3'&:|z-3|\leq 1.5.\end{aligned}$$

这是 3 个孤立的圆. 每个圆中恰有 B (也是 A) 的一个特征值. 因此 A 的 3 个特征值分别位于 G_1,G_2',G_3' 中.



第 1(1) 题图 1



第 1(1) 题图 2

(2) A 的 3 个盖施戈林圆为

$$G_1 : |z-2| \le 3,$$
$$G_2 : |z-10| \le 2,$$
$$G_3 : |z-20| \le 10.$$

G_2 与 G_3 相交, G_1 是孤立的, 因此其中恰有一个特征值, 而且是实数.

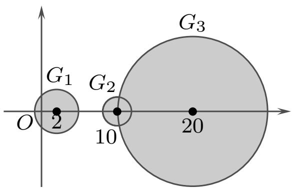
取对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(2,1,1)$, 则

$$B = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -0.5 & 10 & 1 \\ -4 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

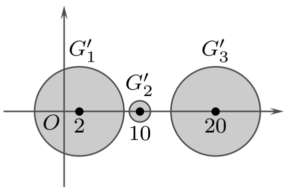
得到新的盖施戈林圆

$$G_1' : |z-2| \le 6,$$
$$G_2' : |z-10| \le 1.5,$$
$$G_3' : |z-20| \le 6.$$

这是 3 个孤立的圆. 每个圆中恰有 B (也是 A) 的一个特征值. 因此 A 的 3 个特征值分别位于 G_1, G_2', G_3' 中, 而且都是实数.



第 1(2) 题图 1



第 1(2) 题图 2

2. 应用盖施戈林圆定理确定实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值范围, 并证明 A 至少有 2 个实特征值.

解: A 的 4 个盖施戈林圆为

$$G_1 : |z-9| \le 4,$$

$$G_2 : |z - 8| \le 2,$$
$$G_3 : |z - 4| \le 1,$$
$$G_4 : |z - 1| \le 1.$$

其中 G_4 是孤立的圆, 因此根据推论 5.5, 必有一个实特征值. 又因虚特征值是成对出现的, 所以 A 至少有 2 个实特征值.

3. 利用推论 5.5 证明以下 n 阶 $(n > 1)$ 实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2^2} & \cdots & \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ \dfrac{2}{3} & 4 & \dfrac{2}{3^2} & \cdots & \dfrac{2}{3^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{n}{n+1} & \dfrac{n}{(n+1)^2} & \dfrac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

可相似于实对角矩阵.

证明: A 的第 i 个盖施戈林圆的半径是

$$r_i = \frac{i}{i+1} + \frac{i}{(i+1)^2} + \cdots + \frac{i}{(i+1)^{n-1}} = 1 - \frac{1}{(i+1)^{n-1}} < 1.$$

所以 A 的 n 个盖施戈林圆

$$G_i : |z - 2i| \le r_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

都是孤立的. 根据推论 5.5, A 的特征值是 n 个不同的实数, 所以 A 相似于实对角矩阵.

4. 证明: 如果对称矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 满足条件

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

则 A 是正定矩阵.

证明: 由于对称矩阵的特征值都是实数, 根据盖施戈林圆盘定理, 必有某个 $1 \le i \le n$ 使得

$$|\lambda_0 - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|,$$

即

$$\lambda_0 \ge a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| > 0.$$

因此 A 的所有特征值都是正实数, A 是正定矩阵.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{n^2}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & \dfrac{n^2}{2} & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n-2 & n-1 & \dfrac{n^2}{2} & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & \dfrac{n^2}{2} \end{pmatrix},$$

证明: $|\det A| \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$. 你能进一步证明 $\det A \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ 吗?

证明: 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$H_i = \frac{n^2}{2} - (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2},$$

根据推论 5.2 可得

$$|\det A| \geq \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

为证上述不等式中的绝对值符号可以取消, 需要证明 $\det A > 0$. 为此, 设

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{n^2}{2} & t & 2t & \cdots & (n-2)t & (n-1)t \\ (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} & t & \cdots & (n-3)t & (n-2)t \\ (n-2)t & (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} & \cdots & (n-4)t & (n-3)t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t & 2t & 3t & \cdots & (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} \end{pmatrix},$$

当 $1 \leq t \leq 1$ 时, 矩阵 $A(t)$ 满足阿达马条件, 因此 $\det A(t) \neq 0$. 而 $\det A(0) = \left(\dfrac{n^2}{2}\right)^n > 0$, 由于 $\det A(t)$ 是 t 的连续实函数, 根据连续性原理, 必有 $\det A = \det A(1) > 0$.