第十三章　多项式矩阵与若尔当典范形

§1　多项式矩阵

1. 求下列多项式矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda-1)$.

(2) $\mathrm{diag}(\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2))$.

(3) $\mathrm{diag}(1, \lambda, 0)$.

(4) $\mathrm{diag}(1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)^2\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right))$.

(5) $\mathrm{diag}(1, 1, (\lambda+2)^3)$.

(6) $\mathrm{diag}(\lambda-1, \lambda(\lambda-1)(\lambda+1), \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1))$.

2. 判断下列多项式矩阵是否等价:

(1) $A=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-3 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ 2\lambda-2 & 2\lambda-5 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} \lambda^2-3\lambda+3 & 2\lambda-3 & \lambda-3 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 4\lambda-7 & 2\lambda-5 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & 2\lambda-4 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ (\lambda+1)^2 & \lambda^2+\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 等价; (2) 不等价.

3. 下列多项式矩阵中, 哪些是可逆的? 若可逆试求其逆.

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda+3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ -1+\lambda & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 可逆, 逆矩阵为 $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda+1 \\ -\lambda-3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

(2) 可逆, 逆矩阵为 $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda^2+\lambda \\ -\lambda-2 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}$.

(3) 可逆, 逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+1 & \lambda & \lambda^2 \\ -\lambda^2+\lambda-2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) 不可逆.

4. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是对所有的复数 c, $A(c)$ 都可逆.

证明: ($\Rightarrow$) 设 $A(\lambda)$ 可逆, 则

$$|A(\lambda)| = a \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

故对任意的 $c \in \mathbb{C}$, $|A(c)| = a$, 所以 $A(c)$ 可逆.

($\Leftarrow$) 考察 $f(\lambda)=|A(\lambda)|$, 则对任意的 $c\in\mathbb{C}$, $f(c)\neq 0$, 故 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中无根. 所以 $f(\lambda)=a\neq 0\in\mathbb{C}$, $|A(\lambda)|=a\neq 0\in\mathbb{C}$. 因此 $A(\lambda)$ 可逆.

5. 下列结论是否成立: (如成立, 则加以证明, 如不成立, 则举出反例.)

两个多项式矩阵等价的充分必要条件是, 对所有的 $k\in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 都等价.

解: 不成立. 如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda\end{pmatrix},\qquad B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda^2\end{pmatrix},$$

则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 不等价, 但对任意的 $k\in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 等价.

§2 不变因子

1. 求下列多项式矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & -1\\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda-2\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & \lambda^2\\ 2\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda\\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda\end{pmatrix}$.

解: (1) 3; (2) 2.

2. 试求下列矩阵的不变因子:

(1) $\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}-\lambda+2 & (\lambda-1)^2 & -\lambda+1\\ 1 & \lambda^2-\lambda & 0\\ \lambda^2-2 & -(\lambda-1)^2 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0\\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $1, 1, (\lambda-1)^3$.

(2) $1, \lambda-1, \lambda(\lambda-1)$.

(3) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, 1, [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2$; 如 $\beta = 0$, $1, 1, (\lambda+\alpha)^2, (\lambda+\alpha)^2$.

(4) $1, 1, 1, (\lambda-1)^4$.

(5) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, \cdots, 1, (\lambda-\alpha)^n$; 如 $\beta = 0$, $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha, \cdots, \lambda-\alpha$.

(6) $1, 1, \cdots, 1, \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

3. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $\operatorname{rank} A(\lambda) = \max\{\operatorname{rank} A(k) | k \in K\}$.

解: 设 $\operatorname{rank} A(\lambda) = r$, 则 $A(\lambda)$ 有一个 r 阶子式 $M_{r+1}(\lambda) = 0$. 故对所有的 $k \in K$, $M_{r+1}(k) = 0$, 这说明 $\operatorname{rank} A(k) \leq r$. 又因 $M_r(\lambda) \neq 0$, 存在 $c \in K$ 使 $M_r(c) \neq 0$, 这说明 $r = \max\{\operatorname{rank} A(k) \mid k \in K\}$.

4. 设 $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$ 为 $A(\lambda)$ 的行列式因子, 证明:

$$D_k^2(\lambda) \mid D_{k-1}(\lambda) D_{k+1}(\lambda), \quad k = 2, 3, \cdots, r-1.$$

证明: 设 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda),$$

则

$$D_{k-1}(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_{k-1}(\lambda),$$
$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda) = D_{k-1}(\lambda) d_k(\lambda),$$

$$D_{k+1}(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{k+1}(\lambda),$$

所以

$$D_k^2(\lambda)=D_{k-1}^2(\lambda)d_k^2(\lambda)\mid D_{k-1}(\lambda)D_k(\lambda)d_k(\lambda)d_{k+1}(\lambda),$$

$$D_k^2(\lambda)\mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda).$$

5. 设 $A(\lambda)$ 为 n 阶方阵, 证明: $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

证明: 存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=Q(\lambda)^{\mathrm{T}}A(\lambda)^{\mathrm{T}}P(\lambda)^{\mathrm{T}},$$

于是 $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

***6.** 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)\in K[x]$, 且 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

证明: 存在多项式 $f_{ij}(x)\in K[x]$ $(i=2,3,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n)$, 使

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=1.$$

证明: 考察多项式矩阵

$$A(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)),$$

由已知, $A(x)$ 的不变因子为 1, 故存在可逆矩阵 $P(x)$, 使

$$A(x)P(x)=(1,0,\cdots,0).\tag{$*$}$$

设 $|P(x)| = c \neq 0$, 则存在可逆矩阵 $Q(x)$, 使

$$Q(x)P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

记

$$Q(x) = (f_{ij}(x)),$$

作

$$B(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

则由 (*) 与 (**) 知

$$B(x)P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix},$$

于是 $|B(x)||P(x)| = c$, 又因 $|P(x)| = c$, 得 $|B(x)| = 1$, 从而 $f_{ij}(x)$ 即为所求.

§ 3　矩阵相似的条件

1. 判断下列矩阵是否相似:

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;　$B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;　$B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

(3) $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

解: (1) 是; (2) 是; (3) 否.

2. 证明: 任何方阵 A 与它的转置矩阵 A^{T} 相似.

证明: 由于 $\lambda E-A^{\mathrm{T}}=(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}$ 等价于 $\lambda E-A$ (习题 12–2.5), 因此 A 与 A^{T} 相似.

***3.** 设 A 与 B 为 n 阶方阵, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$

证明: 考察等式

$$\begin{aligned}&\big[(\lambda E+A)(\lambda E+B)\big]\big[(\lambda E+A)(\lambda E+B)\big]^*\\&=|(\lambda E+A)(\lambda E+B)|E=|\lambda E+A|E\cdot|\lambda E+B|E\\&=(\lambda E+A)(\lambda E+B)(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*.\end{aligned}$$

所以

$$(\lambda E+A)(\lambda E+B)\left\{[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*\right\}=0.$$

比较上式两边的次数, 知

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*=0,$$

即

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*=(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*.$$

令 $\lambda=0$ 就有

$$(AB)^*=B^*A^*.$$

***4.** 证明: 如果矩阵 A 与 B 相似, 则它们的伴随矩阵 A^* 与 B^* 也相似.

证明: 试 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P, 使$P^{-1}AP=B$. 于是利用习题 4 的结论,

$$B^*=(P^{-1}AP)^*=P^*A^*(P^{-1})^*=P^*A^*(P^*)^{-1}.$$

故 A^* 与 B^* 相似.

***5.** 证明: 矩阵的相似与数域的扩张无关.

证明: 设 A,B 是数域 K_1 中的矩阵, 则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的不变因子都是系数在 K_1 中的多项式. 设数域 $K_1\subset K_2$, 那么这些多项式也可以看成系数在 K_2 中的多项式, 从而不变因子组与数域的扩张无关 (最多差一个常数因子).

而矩阵 A, B 相似当且仅当 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 有相同的不变因子组. 因此矩阵的相似与数域的扩张无关.

*6. 设 A 为 n 阶方阵, λ_0 为 A 的一个特征值. 证明: 特征值 λ_0 的代数重数 $\geqslant n - \mathrm{rank}(\lambda_0 E - A)$.

证明: 设 λ_0 为 A 的 r 重特征值, 设 $d_1(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 则 $\lambda - \lambda_0 \mid d_n(\lambda)$, 但 $\lambda - \lambda_0 \nmid d_{n-r}(\lambda)$, (否则, 如 $\lambda - \lambda_0 \mid d_{n-r}(\lambda)$, 则 $\lambda - \lambda_0 \mid d_{n-r+1}(\lambda), \cdots, \lambda - \lambda_0 \mid d_n(\lambda)$, 于是 $\lambda - \lambda_0$ 的重数 $\geq r+1$) 因此存在可逆矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E - A)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E - A)Q(\lambda_0) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda_0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $d_1(\lambda_0) \neq 0, \cdots, d_{n-r}(\lambda_0) \neq 0$, 所以

$$\mathrm{rank}(\lambda_0 E - A) \geq \mathrm{rank}\, P(\lambda_0)(\lambda_0 E - A)Q(\lambda_0) \geq n - r.$$

因此

$$r \geq n - \mathrm{rank}(\lambda_0 E - A).$$

§ 4　初等因子

1. 求下列多项式矩阵的初等因子:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda - 3 & \lambda - 1 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\lambda, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+3$.

(2) $\lambda+1, \lambda-3$.

2. 已知多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子, 秩 r 与阶数 n, 求 $A(\lambda)$ 的正规形:

(1) $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2$; $r=4$, $n=5$;

(2) $\lambda-2, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^3$; $r=4$, $n=4$;

(3) $\lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2$; $r=3$, $n=5$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-1), (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2, 0)$.

(2) $\mathrm{diag}(1, \lambda-2, (\lambda-2)^2(\lambda+2), (\lambda-2)^3(\lambda+2)^3)$.

(3) $\mathrm{diag}(\lambda-1, (\lambda-1)^2(\lambda+2), (\lambda-1)^3(\lambda+2)^2, 0, 0)$.

3. 求下列矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 \\ \lambda^2-4 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1), \lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1))$.

(2) $\mathrm{diag}(1, \lambda(\lambda^2-4), \lambda(\lambda^2-4), \lambda^2(\lambda^2-4))$.

(3) $\mathrm{diag}(1, \lambda-1, (\lambda-1)(\lambda+1), 0)$.

(4) $\mathrm{diag}(1, 1, \lambda^2-4, 0)$.

4. 求下列矩阵的不变因子, 行列式因子与初等因子:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

解: (1) 不变因子: $1, 1, \lambda^2(\lambda-1)$, 行列式因子: $1, 1, \lambda^2(\lambda-1)$, 初等因子: $\lambda^2, \lambda-1$.

(2) 不变因子: $1, \lambda, \lambda(\lambda+1)$, 行列式因子: $1, \lambda, \lambda^2(\lambda+1)$, 初等因子: $\lambda, \lambda, \lambda+1$.

(3) 不变因子: $1, \underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{n-2\text{个}}, \lambda(\lambda-n)$, 行列式因子: $1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^{n-2}$, $\lambda^{n-1}(\lambda-n)$, 初等因子: $\underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{n-1\text{个}}, \lambda-n$.

(4) 不变因子: $1, 1, 1, (\lambda+1)^4$, 行列式因子: $1, 1, 1, (\lambda+1)^4$, 初等因子: $(\lambda+1)^4$.

5. 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 证明: 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数等于 $n - \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A)$.

证明: 设 $d_1(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 如 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数为 r, 则

$$\lambda-\lambda_0 \mid d_n(\lambda), \cdots, \lambda-\lambda_0 \mid d_{n-r+1}(\lambda), \lambda-\lambda_0 \nmid d_{n-r}(\lambda), \cdots, \lambda-\lambda_0 \nmid d_1(\lambda).$$

因此存在可逆矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E - A)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E - A)Q(\lambda_0) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$n-r=\operatorname{rank}P(\lambda_0)(\lambda_0E-A)Q(\lambda_0)=\operatorname{rank}(\lambda_0E-A),$$

即

$$r=n-\operatorname{rank}(\lambda_0E-A).$$

§5 若尔当典范形

1. 求下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}13&16&14\\-6&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&4&2\\3&-6&-3\end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-3&3\\2&-2&2\end{pmatrix}$; (8) $\begin{pmatrix}5&2&6\\-2&0&3\\2&1&-2\end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\5&-4&2&9\\-3&1&2&-2\\2&-4&3&8\end{pmatrix}$; (10) $\begin{pmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$;

(11) $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$; (12) $\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&n-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\sqrt{6} \end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(11) $\mathrm{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1})$, $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是 $x^n - 1$ 的 n 个根;

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 矩阵 A 可能有怎样的若尔当典范形?

(2) 试确定 A 可对角化的条件.

解: (1) A 仅有一个特征值 $\lambda_0 = 2$, 所以 A 的若尔当块的块数 $= A$ 的初等因子的个数 $= \mathrm{rank}(\lambda_0 E - A)$ (参见习题 12–4.5) 而

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(\lambda_0 E - A) \\ &= \begin{cases} 2 & \text{当 } ac \neq 0, \\ 1 & \text{当 } a, c \text{ 中一个等于 } 0, \text{ 另一个不等于 } 0, \text{ 或 } a, c \text{ 都是 } 0, \text{ 但 } b \neq 0 \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } a = b = c = 0 \text{ 时}. \end{cases} \end{aligned}$$

因此当 $ac \neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 当 a, c 中一个等于 0, 另一个不等于 0, 或 a, c 都是 0, 但 $b \neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 当 $a = b = c = 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) A 可对角化 $\iff a = b = c = 0$.

3. 设矩阵 A 的特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4.$$

试求出 A 所有可能的若尔当典范形.

解: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)^2$, 因此 A 的可能的初等因子为:

(a) $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(b) $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(c) $(\lambda - 1)^3, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(d) $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda + 2)^2$;

(e) $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1, (\lambda + 2)^2$;

(f) $(\lambda - 1)^3, (\lambda + 2)^2$.

故 A 的可能的若尔当典范形为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*4. 设矩阵 A 的秩为 1. 证明: A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix} \beta & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad 如\beta = \mathrm{Tr}\,A \neq 0,$$

或

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad 如\mathrm{Tr}\,A = 0.$$

证明: 由于 A 的秩等于 1, 因此 J_A 的秩也等于 1. 故 A 的若尔当块中仅有一个的秩为 1, 其余的秩都等于 0. 而秩为 0 的若尔当块就是一阶零矩阵 (0), 秩为 1 的若尔当块可能是一阶阵 (β) 或 2 阶若尔当块 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 所以 A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix} \beta & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 或 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

又因 $\mathrm{Tr}\,J_A = \mathrm{Tr}\,A$, 即得所需结论.

*5. 利用上题的结论计算下列矩阵的行列式:

$$(1)\ \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a_i \neq x, \\ x \neq 0; \end{matrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} x_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

$x_i \neq a_i$.

解: (1) $|A| = \left| \begin{pmatrix} a_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & a_n - x \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left|E + x\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-x} & \cdots & \frac{1}{a_1-x} \\ \frac{1}{a_2-x} & \cdots & \frac{1}{a_2-x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n-x} & \cdots & \frac{1}{a_n-x} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left|E + x\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x} & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i - x}\right].$$

(2) 同样的方法可得

$$|A| = \prod_{i=0}^{n}(x_i - a_i)\left[1 + \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x_i - a_i}\right].$$

*6. 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值. 令

$$n_0 = \operatorname{rank} E = n, n_k = \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A)^k,$$

$$a_k = n_{k-1} - n_k, b_k = a_k - a_{k+1},\ k = 1, 2, \cdots$$

如下表所示:

$$\begin{array}{ccccccccccc} n_0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_4 & & \cdots \\ & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & \\ & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots & \\ & & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & \\ & & & & b_1 & & b_2 & & b_3 & \cdots & \end{array}$$

证明: (1) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的若尔当块的块数等于 a_1;

(2) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数等于 b_k;

证明: (1) 由习题 12–4.5 立即可得.

(2) 由于 n_i 是矩阵的相似不变量, 故所有的 a_i, b_i 也都是矩阵的相似不变量. 设 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数为 m_k, 而其余不属于特征值 λ_0 的各若尔当块的阶数之和为 m, 则

$$n_0 = \sum_{k\geq 1} m_k k + m,$$

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \sum_{k\geq 1} m_k(k-1)+m,\\
n_2 &= \sum_{k\geq 2} m_k(k-2)+m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n_r &= \sum_{k\geq r} m_k(k-r)+m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(\sum_{k\geq 1} m_k k+m\right)-\left(\sum_{k\geq 1} m_k(k-1)+m\right)=\sum_{k\geq 1} m_k,\\
a_2 &= \left(\sum_{k\geq 1} m_k(k-1)+m\right)-\left(\sum_{k\geq 2} m_k(k-2)+m\right)\\
&= \left(\sum_{k\geq 2} m_k(k-1)+m\right)-\left(\sum_{k\geq 2} m_k(k-2)+m\right)=\sum_{k\geq 2} m_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_r &= \left(\sum_{k\geq r-1} m_k(k-r)+m\right)-\left(\sum_{k\geq r} m_k(k-r)+m\right)\\
&= \left(\sum_{k\geq r} m_k(k-r)+m\right)-\left(\sum_{k\geq r} m_k(k-r)+m\right)=\sum_{k\geq r} m_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$
b_r = a_r - a_{r+1} = \sum_{k\geq r} m_k - \sum_{k\geq r+1} m_k = m_r.
$$

*__7.__ 利用上题的结论计算下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & -3\\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 易知, $\lambda_0 = 1$ 是矩阵的一个特征值. 可得下表:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
& 2 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & \cdots & \\
& & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & \cdots & &
\end{array}$$

所以

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = , \qquad b_3 = 1.$$

即此矩阵有 1 阶与 3 阶的若尔当块各 1 个. 从矩阵的阶数可知它没有别的特征值. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 此矩阵仅有 1 个特征值 $\lambda_0 = 2$. 可得下表:

$$\begin{array}{ccccccc}
4 & & 2 & & 0 & & 0 \\
& 2 & & 2 & & 0 & \\
& & 0 & & 2 & &
\end{array}$$

故此矩阵有 2 个 2 阶若尔当块. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

***8.** 设矩阵 A 的特征值 (在复数范围内) 全是 1. 证明: A^k 与 A 相似, 其中, k 为任一非零整数 (正的或负的).

证明: 先设 A 为若尔当块:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $k>0$, 则

$$J^k=\begin{pmatrix}1 & k & & & *\\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & k\\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}.$$

于是 J^k 的若尔当块的块数 $=r-\operatorname{rank}(E-J^k)=r-(r-1)=1$. 所以 J^k 的若尔当典范形也是 J, 从而 J^k 与 J 相似.

又因

$$J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & *\\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1\\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}.$$

同理可证 J^{-1} 与 J 相似, 于是 J^{-k} 与 J^k 相似, 从而也与 J 相似.

对于一般的情形, 设 A 的若尔当典范形为

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}.$$

则

$$A^k\sim J_A^k\sim\begin{pmatrix}J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k\end{pmatrix}\sim J_A\sim A.$$

§6　矩阵的极小多项式

1. 求下列矩阵的极小多项式:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}2 & -5 & 2\\ -1 & 5 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;

*(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $(\lambda-2)^3$.

(2) $\lambda^3-6\lambda^2-4\lambda$.

(3) λ^2.

(4) $(\lambda+1)^2$.

(5) $\lambda(\lambda-n)$.

(6) 设

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda)=1+2\lambda+\cdots+n\lambda^{n-1}.$$

则

$$A=E+2P+3P^2+\cdots+nP^{n-1}=f(P).$$

由于 P 的特征值为 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$, 其中 ε 为 n 次本原单位根. 所以 A 的特征多项式为

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-f(1))(\lambda-f(\varepsilon))\cdots(\lambda-f(\varepsilon^{n-1}))=\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)g(\lambda).$$

因为

$$f(\lambda)=\frac{n\lambda^{n+1}-(n+1)\lambda^n+1}{(1-\lambda)^2},$$

所以

$$f(\varepsilon^k) = \frac{n\varepsilon - n}{(1-\varepsilon^k)^2} = -\frac{n}{1-\varepsilon^k}. \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda + \frac{n}{1-\varepsilon^k}\right) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon^k)}\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda + n - \lambda\varepsilon^k) \\ &= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda\left(\frac{\lambda+n}{\lambda} - \varepsilon^k\right) = \frac{\lambda^{n-1}}{n}\cdot\frac{\left(\dfrac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n - 1}{\dfrac{\lambda+n}{\lambda} - 1} \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n - 1\right] = \frac{1}{n^2}[(\lambda+n)^n - \lambda^n]. \end{aligned}$$

所以

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{n^2}\left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n - \lambda^n].$$

又由 $(*)$ 知, $\chi_A(\lambda)$ 无重根, 故 A 的极小多项式就是其特征多项式, 从而 A 的极小多项式为

$$\frac{1}{n^2}\left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n - \lambda^n].$$

2. 设 A 为 n 阶方阵, $m(\lambda)$ 是它的极小多项式, $g(\lambda)$ 为任一多项式, $d(\lambda) = (m(\lambda), g(\lambda))$.

证明: (1) $\operatorname{rank} d(A) = \operatorname{rank} g(A)$;

(2) $g(A)$ 可逆的充分必要条件是 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 互素;

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g^{-1}(A)$ 一定是 A 的多项式.

证明: (1) 存在多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$, 使

$$m(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda) = d(\lambda).$$

故

$$m(A)u(A) + g(A)v(A) = d(A).$$

由 $m(A) = 0$ 可得 $d(A) = g(A)v(A)$. 所以

$$\operatorname{rank} d(A) \le \operatorname{rank} g(A).$$

又因 $d(\lambda) \mid g(\lambda)$, 存在 $h(\lambda)$ 使 $d(\lambda)h(\lambda) = g(\lambda)$, 即 $d(A)h(A) = g(A)$. 于是

$$\operatorname{rank} g(A) \le \operatorname{rank} d(A).$$

最后得

$$\operatorname{rank} g(A) = \operatorname{rank} d(A).$$

(2) ($\Rightarrow$) 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 则 $g(A)$ 的全部特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$. 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g(A)$ 的每个特征值 $g(\lambda_i) \neq 0$. 由于 $m(\lambda)$ 的根都是 A 的特征值, 因此 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 无公共根, 从而 $(g(\lambda), m(\lambda)) = 1$.

($\Leftarrow$) 如 $(g(\lambda), m(\lambda)) = 1$, 则由 (1) 所证, $d(\lambda) = 1$, 因此 $d(A) = E$. 故对于 (1) 中的 $v(\lambda)$, 有

$$g(A)v(A) = E,$$

$g(A)$ 可逆.

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 在 (2) 的充分性的证明中, 已得 $g(A)v(A) = E$. 所以 $g(A)^{-1} = v(A)$ 为 A 的多项式.

3. 证明: 矩阵 A (在复数域上) 可对角化的充分必要条件是其极小多项式无重根.

证明: ($\Rightarrow$) A 可对角化, 从而此对角形就是 A 的若尔当典范形. 因此 A 的若尔当块全是一阶的, A 的初等因子全是一次的. 而 A 的极小多项式作为初等因子的最小公倍式, 一定是不同一次因子的乘积, 从而无重根.

($\Leftarrow$) 如 A 的极小多项式无重根, 则此极小多项式是不同一次因子的乘积. 于是 A 的初等因子都是一次的, 即若尔当典范形中的若尔当块都是一阶的, 是一个对角矩阵, 说明 A 可对角化.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

解: A 的特征多项式为 $\lambda(\lambda^2 - 2)$. 令

$$\lambda^{100} = \lambda(\lambda^2 - 2)g(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

分别以 $\lambda = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 代入上式, 的

$$c = 0, \qquad 2^{50} = 2a + \sqrt{2}b, \qquad 2^{50} = 2a - \sqrt{2}b.$$

解得 $b = 0$, $a = 2^{49}$. 所以

$$A^{100} = 2^{49}A^2 = 2^{49} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

***5.** 证明: 如果对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$, 则 $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.

证明: 由于矩阵的迹就是矩阵的全部特征值之和, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = s_k.$$

由 $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ 可得 $s_k = 0$. 从牛顿公式可得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的所有初等对称多项式 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0$, 于是

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n.$$

***6.** 设 A 的特征多项式 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$, 且 $\big(h(\lambda), g(\lambda)\big) = 1$,

证明: $\operatorname{rank} h(A) = \deg g(\lambda)$, $\operatorname{rank} g(A) = \deg h(\lambda)$.

证明: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $h(A)$ 的特征值为 $h(\lambda_1), \cdots, h(\lambda_n)$, $g(A)$ 的特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$. 由于 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$ 且 $\big(h(\lambda), g(\lambda)\big) = 1$, 因此 $\{h(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg h(\lambda)$, $\{g(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg g(\lambda)$, 且 $\deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) = n$.

由习题 12–3.6 知,

$$\deg h(\lambda) \geq n - \operatorname{rank}(h(A)) \tag{1}$$

$$\deg g(\lambda) \geq n - \operatorname{rank}(g(A)) \tag{2}$$

因此

$$n = \deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) \geq 2n - (\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A)),$$

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) \geq n.$$

又因

$$h(A)g(A) = \chi(A) = 0,$$

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) \leq n.$$

于是

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) = n.$$

从而 (1), (2) 式全都取等号, 使得

$$\operatorname{rank} h(A) = n - \deg h(\lambda) = \deg g(\lambda),$$

$$\operatorname{rank} g(A) = n - \deg g(\lambda) = \deg h(\lambda).$$