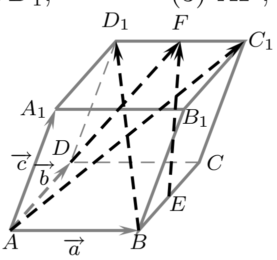
第一章　向量代数

§1　向量的线性运算

1. 如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E、F 分别是棱 BC、C_1D_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{c}$. 试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 表示下列向量:

(1) $\overrightarrow{AC_1}$;　　(2) $\overrightarrow{BD_1}$;　　(3) $\overrightarrow{AF}$;　　(4) $\overrightarrow{EF}$.



第 1 题图

解: (1) 因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1},$$

所以

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}$, 而

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1}.$$

所以

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}.$$

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1F}$, 而

$$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{D_1F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}.$$

(4) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AF}-\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

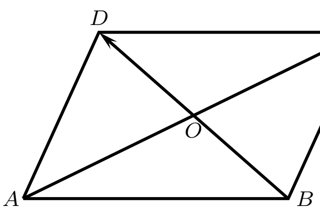
2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 AC 和 BD. 设 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

解: 如图,

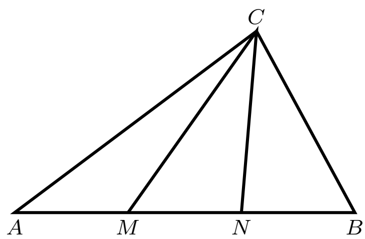
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}),$$

$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}).$$



第 2 题图



第 3 题图

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M,N 是 AB 边上的三等分点. 设 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$.

解: 如图, 因为

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{a},$$

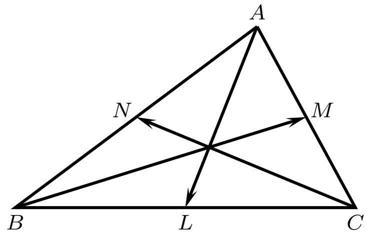
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{a}.$$

4. 设 L,M,N 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点. 证明三中线向量 $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

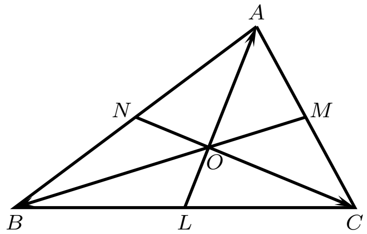
证明: 因为 $\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形, 当且仅当将这三个向量之和为零向量. 由

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\quad \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}),\quad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),$$

可得: $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$.



第 4 题图



第 5 题图

5. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0.$$

解: 如图, 设 AL,BM,CN 是 3 条中线, O 是三角形的重心. 则 $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{LA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CN}$, 因此由第 4 题,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN})=0.$$

6. 在四面体 $O-ABC$ 中, 设点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心. 用 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 来表示向量 $\overrightarrow{OG}$.

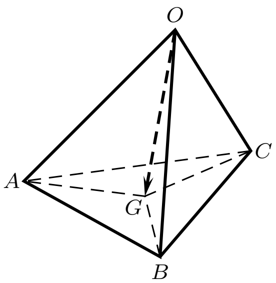
解: 因为 $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CO}$. 而由第 5 题知 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$. 因此

$$3\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}.$$

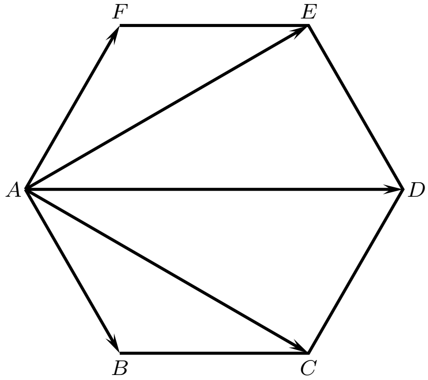
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

7. 设 $ABCDEF$ 为正六边形, 求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

解: 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.



第 6 题图



第 7 题图

8. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是不共线的非零向量). 证明 $ABCD$ 为梯形.

证明: 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = -8\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$. 但 $|\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{BC}|$, 所以 $ABCD$ 是梯形.

9. 设 A, B, C, D 是一个四面体的四个顶点, M, N 分别是边 AB, CD 的中点. 证明:

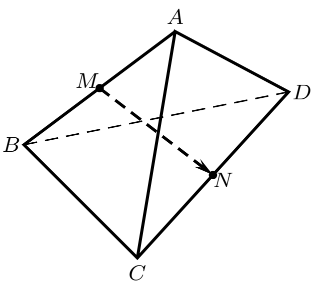
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

证明: 如图,

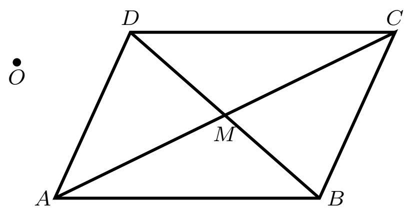
$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}), \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

所以

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$



第 9 题图



第 10 题图

10. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}.$$

证明: 如图, 因为

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}),$$

所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

11. 要使下列各式成立, 向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$; (2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$;

(3) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$; (4) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

解: (1) 利用"三角形两边之和大于第三边"可知: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$. 且要使 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$ 必须: $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 同向, 或 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 中至少有一为 0.

(2) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}$, 原式化为: $|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|+|\overrightarrow{b}|$. 所以 $\overrightarrow{b}/\!/\overrightarrow{c}$ 且反向. 由此可得: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$, 反向, 且 $|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.

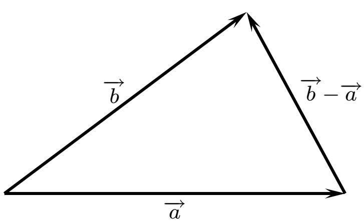
(3) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, 原式化为: $|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|$. 由 (1) 知: $\overrightarrow{b}/\!/\overrightarrow{c}$ 且同向. 所以 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$ 且同向. 又因$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|\geq 0$, 所以$|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.

(4) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, 原式化为: $|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{c}|-|\overrightarrow{b}|$. 由 (2) 知: $\overrightarrow{c}/\!/\overrightarrow{b}$ 且反向, 或 $\overrightarrow{b}=0$, 同时, $|\overrightarrow{c}|\geq|\overrightarrow{b}|$. 所以$\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$ 且反向, 或 $\overrightarrow{b}=0$ 或 $\overrightarrow{a}=0$.

12. 证明下列不等式, 并说明等号什么时候成立.

(1) $|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|\geqslant|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$; (2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|$.

证明: (1) 如图, 利用"三角形两边之差小于第三边"可得欲证的不等式. 等式成立的条件可参见习题 11(3): $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$, 同向, 且 $|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.



第 12(1) 题图

(2) 令 $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$. 则: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{d}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|$. 等号成立当且仅当(i) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 互相平行且同向, 或(ii) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 中至少两个为 0 (也可看成 (i) 的特例).

***13.** O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心. 证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

证明: 先考虑 n 为偶数的情形. 此时. 显然有: $\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$. 再看 n 为奇数的情形: 我们增加一倍顶点 $B_1,\cdots,B_n$ 使原来正 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 成为: $A_1B_1A_2B_2\cdots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$, 这是一个 $2n$ 边形. 所以

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OB_n}=0.$$

注意到 $\overrightarrow{OB_i}$ 是由 $\overrightarrow{OA_i}$ 旋转一个定角 $\dfrac{\pi}{n}$ 而得到, 若记:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n},\\ \overrightarrow{q}&=\overrightarrow{OB_1}+\cdots+\overrightarrow{OB_n},\end{aligned}$$

那么 $\overrightarrow{q}$ 是由 $\overrightarrow{p}$ 旋转 $\dfrac{\pi}{n}$ 角而得到. 由于 $0<\dfrac{\pi}{n}<\pi$, $\overrightarrow{q}$ 与 $\overrightarrow{p}$ 不平行, 故 $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}=0$.

*__14.__ O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, P 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}.$$

证明: 因为

$$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{A_iO}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$n\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}+(\overrightarrow{A_1O}+\cdots+\overrightarrow{A_nO})=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}$$

(利用第 13 题的结论).

§ 2　向量的共线与共面

1. 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 不共线, 则向量 $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{d}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 是否线性相关?

解: 设有 k m 使: $k\overrightarrow{c}+m\overrightarrow{d}=0$, 即

$$3k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}+2m\overrightarrow{a}-m\overrightarrow{b}=0,$$

整理后为

$$(3k+2m)\overrightarrow{a}+(k-m)\overrightarrow{b}=0.$$

由于 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 不共线, 故 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases}3k+2m=0\\ k-m=0\end{cases}\qquad 解得\ k=m=0,$$

即 $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ 线性无关.

2. 如果 3 个向量都能被两个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 线性表示, 那么这 3 个向量一定共面.

证明: 设 $\overrightarrow{p} = c_{11}\overrightarrow{a} + c_{12}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = c_{21}\overrightarrow{a} + c_{22}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{r} = c_{31}\overrightarrow{a} + c_{32}\overrightarrow{b}$. 则

$$x_1\overrightarrow{p} + x_2\overrightarrow{q} + x_3\overrightarrow{r} = (x_1c_{11} + x_2c_{21} + x_3c_{31})\overrightarrow{a} + (x_1c_{12} + x_2c_{22} + x_3c_{32})\overrightarrow{b}.$$

方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + c_{31}x_3 = 0 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{32}x_3 = 0 \end{cases}$$

的变量个数超过方程个数, 一定有一组非零解 $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, $x_3 = k_3$, 使得

$$k_1\overrightarrow{p} + k_2\overrightarrow{q} + k_3\overrightarrow{r} = (k_1c_{11} + k_2c_{21} + k_3c_{31})\overrightarrow{a} + (k_1c_{12} + k_2c_{22} + k_3c_{32})\overrightarrow{b} = 0.$$

因此 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ 线性相关, 从而共面.

3. 证明三个向量 $k_1\overrightarrow{a} - k_2\overrightarrow{b}$, $k_2\overrightarrow{b} - k_3\overrightarrow{c}$, $k_3\overrightarrow{c} - k_1\overrightarrow{a}$ 共面.

证明: 由等式

$$(k_1\overrightarrow{a} - k_2\overrightarrow{b}) + (k_2\overrightarrow{b} - k_3\overrightarrow{c}) + (k_3\overrightarrow{c} - k_1\overrightarrow{a}) = 0,$$

可知这 3 个向量线性相关, 所以共面.

4. 设 $\overrightarrow{a_1} = 2\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{b_3}$, $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{b_3}$, $\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3}$. 证明向量 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 共面的充分必要条件是 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 共面.

证明:

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} = 2k_1\overrightarrow{b_1} + (3k_1 + k_2 + k_3)\overrightarrow{b_2} + (-k_1 - k_2 + k_3)\overrightarrow{b_3}.$$

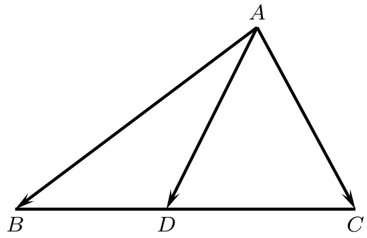
从方程组

$$\begin{cases} 2k_1 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

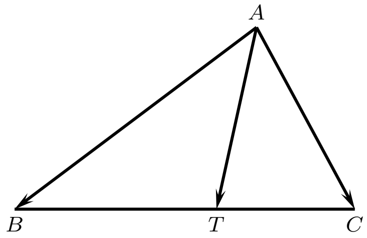
解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 也就是说, k_1, k_2, k_3 不全为零当且仅当 $2k_1, 3k_1 + k_2 + k_3, -k_1 - k_2 + k_3$ 不全为零. 即 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 线性相关当且仅当 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 线性相关. 从而 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 共面.

5. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的点, 满足 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$. 试用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 来表示 $\overrightarrow{AD}$.

解: 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. 代入 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{DC}$, 得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AD}$, 解得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$.



第 5 题图



第 6 题图

6. 设 AT 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线 (与 BC 交于 T 点), 将 $\overrightarrow{AT}$ 用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 来表示.

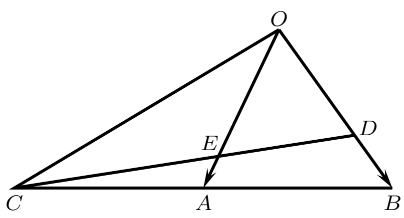
解: 设 $\overrightarrow{BT}=k\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{TC}=(1-k)\overrightarrow{BC}$. 由角平分线的性质可知, $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{AC}|=k:(1-k)$, 因此 $k=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$. 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).\end{aligned}$$

7 平面上有一个三角形 $\triangle OAB$, 点 B 和 C 关于中心 A 对称, 点 D 把线段 OB 分成 $2:1$, DC 和 OA 交于点 E. 设 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$.

(1) 试用 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 来表示 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{DC}$;

(2) 求比值 $OE:OA$.



第 7 题图

解: (1) 因 B 和 C 关于中心 A 对称, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}=2(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$. 又因 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$, 得 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{b}$. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.

(2) 设 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{a}$, 则由 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+m\overrightarrow{DC}$ 可知 $k\overrightarrow{a}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}+m\left(2\overrightarrow{a}-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{b}\right)$. 解得 $k=\dfrac{4}{5}$, 因此 $OE:OA=4:5$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 分线段 AB 为 $2:1$, 点 N 分线段 AC 为 $3:2$. 设 CM 与 BN 的交点为 P, 直线 AP 与边 BC 交于点 Q. 试用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 来表示 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AQ}$.

解: 因为 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BN}$. 则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}$ 得

$$k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+m\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).$$

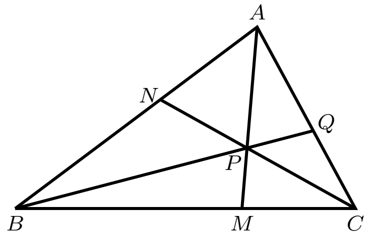
解出 $k=\dfrac{2}{3}$. 所以

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

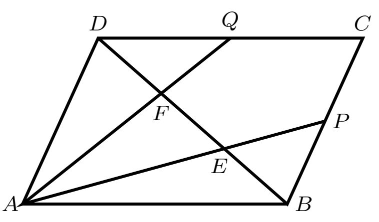
又点 Q 在 BC 及 AP 的延长线上, 所以 $\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$. 即

$$l\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}).$$

解出 $l=\dfrac{9}{7}$, 即有 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.



第 8 题图



第 9 题图

9. 设 $ABCD$ 是平行四边形, P,Q 分别是边 BC,CD 的中点. 证明 AP,AQ 与对角线 BD 相交于 E,F, 而将 BD 三等分.

证明: 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, 则

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}.$$

又设

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AP} \quad (k > 0), \quad \overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AQ} \quad (m > 0),$$

则

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{a} + \frac{k}{2}\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{b} + \frac{m}{2}\overrightarrow{a}.$$

但是

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \quad (t > 0).$$

所以

$$k\overrightarrow{a} + \frac{k}{2}\overrightarrow{b} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b},$$

即:

$$(k+t-1)\overrightarrow{a} = \left(t - \frac{k}{2}\right)\overrightarrow{b},$$

由于 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不平行, 所以

$$\begin{cases} k+t-1=0 \\ t-\dfrac{k}{2}=0 \end{cases} \qquad \text{即} \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

同理, 由

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{BD} = (1-s)\overrightarrow{b} + s\overrightarrow{b} \quad (s > 0),$$

可得:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}+s-1=0 \\ s-m=0, \end{cases} \qquad \text{即:} \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ s=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

最后得到:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD},$$

说明 E, F 是线段 BD 的三等分点.

10. 设 O 是一个定点, 证明: 对于不在一直线上的 3 个点 A, B, C, 点 M 位于平面 ABC 上的充分必要条件是存在实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

证明: 已知 $A\ B\ C$ 三点不共线, 故 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性无关. 任意点 M 位于平面 ABC 上当且仅当 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面, 即: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性相关, 当且仅当存在不全为 0 的实数m_1, m_2, m_3, 使

$$m_1\overrightarrow{AM} + m_2\overrightarrow{AB} + m_3\overrightarrow{AC} = 0,$$

当且仅当对于定点 O 有:

$$m_1(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) + m_2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m_3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0,$$

当且仅当

$$m_1\overrightarrow{OM} = (m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{OA} - m_2\overrightarrow{OB} - m_3\overrightarrow{OC}.$$

显然 $m_1 \neq 0$, 不然与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性无关矛盾. 因此若记:

$$k_1 = \frac{1}{m_1}(m_1 + m_2 + m_3), \quad k_2 = -\frac{m_2}{m_1},$$

$$k_3 = -\frac{m_3}{m_1},$$

则

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC},$$

且 $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

11. 设 O 是一个定点, 证明: 点 M 位于 $\triangle ABC$ 上 (包括它的边) 的充分必要条件是存在非负实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

证明: 延长 AM, 必可交 BC 于 D 点. 因此 $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AD}$, 其中 $0 \leq l \leq 1$. 由于 D 在线段 BC 上, 根据例 2.1, 存在实数 m_1, m_2, 使得

$$\overrightarrow{OD} = m_1\overrightarrow{OB} + m_2\overrightarrow{OC}, \quad m_1 + m_2 = 1, m_1, m_2 \geq 0.$$

于是

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = (1-l)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OD} = (1-l)\overrightarrow{OA} + lm_1\overrightarrow{OB} + lm_2\overrightarrow{OC}.$$

令 $k_1 = 1 - l$, $k_2 = lm_1$, $k_3 = lm_2$, 即得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1,\ k_1, k_2, k_3 \geq 0.$$

反之, 不妨设 $k_1 \neq 1$, 解方程组

$$\begin{cases} 1-l=k_1 \\ lm_1=k_2 \\ lm_2=k_3 \end{cases} \qquad \text{可得} \begin{cases} l=1-k_1, \\ m_1=\dfrac{k_2}{1-k_1}, \\ m_2=\dfrac{k_3}{1-k_1}, \end{cases}$$

则有

$$m_1+m_2=1, \quad m_1, m_2 \geq 0, \quad 0<l \leq 1.$$

令

$$\overrightarrow{OD}=m_1\overrightarrow{OB}+m_2\overrightarrow{OC},$$

则 D 点在线段 BC 上. 由

$$\overrightarrow{OM}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OD}$$

可以得出 $\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD}$, 因此 M 在线段 AD 上, 从而在 $\triangle ABC$ 上.

12. 证明: 任意不同的三点 A, B, C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3=0.$$

证明: $A\,B\,C$ 共线, 当且仅当 $l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=0$ (l, m 都不为零), 当且仅当

$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$-(l+m)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0.$$

令 $k_1=-(l+m)$, $k_2=l$, $k_3=m$, 显然它们不全为零, 且:

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0, \quad k_1+k_2+k_3=0.$$

13. 证明: 任意不同的四点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是存在四个不全为零的实数, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

证明: $A\,B\,C\,D$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 线性相关, 当且仅当有不全为零的数 l, m, n 使:

$$l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}=0,$$

当且仅当

$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

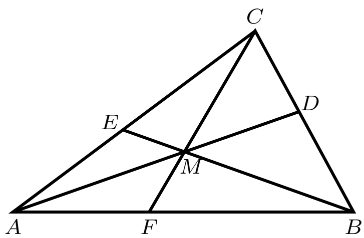
$$-(l+m+n)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OD}=0.$$

记 $k_1=-(l+m+n)$, $k_2=l$, $k_3=m$, $k_4=n$, 显然它们不全为零, 使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}=0,\quad k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

*__14.__ 用向量的方法证明契维定理: 若 $\triangle ABC$ 的三条边 AB, BC, CA 依次被分割成 $AF:FB=k_1:k_2$, $BD:DC=k_3:k_1$, $CE:EA=k_2:k_3$, 其中, $k_1,k_2.k_3$ 均为正数. 则 $\triangle ABC$ 的顶点与它对边的分点的连线交于一点 M, 且对于任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).$$



第 11 题图

证明: 根据分点 D 与 E 的定义可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

设 AD 与 BE 交于 M, 则有

$$\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BE}.$$

把前面得到的表达式代入以下等式: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, 得到

$$l\left(\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+m\left(\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).$$

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 线性无关, 由上述等式得到方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{lk_3}{k_1+k_3}=\dfrac{mk_3}{k_2+k_3}\\ \dfrac{lk_1}{k_1+k_3}=1-m\end{cases}\qquad \text{解得}\begin{cases}l=\dfrac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\\ m=\dfrac{k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}.\end{cases}$$

即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD}.$$

又设 AD 与 CF 相交于 M', 同理可得

$$\overrightarrow{AM'}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD},$$

即 M 与 M' 重合, 因此 AD,BE,CF 交于同一点 M.

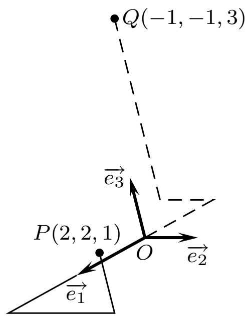
对任意点 O, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\left(\frac{k_2}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

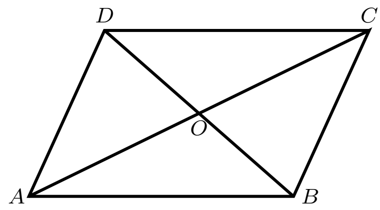
§3 用坐标表示向量

1. 设 P,Q 两点在标架$[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]$下的坐标分别是$(2,2,1)$, $(-1,-1,3)$. 试画出 P,Q 点的位置.

解: 见附图.



第 1 题图



第 2 题图

2. 对于平行四边形$ABCD$, 求A, D, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}$在标架$[C; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$ 下的坐标.

解: $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = (-1)\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{BD}$, 点 A 坐标为 $(-1, 0)$;

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

点 D 坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{AD}$ 坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} = 0\overrightarrow{AC} + (-1)\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{DB}$ 坐标为 $(0, -1)$.

3. 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1, 5, 2)$, $(0, -3, 4)$, $(-2, 3, -1)$. 求向量 $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, $-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}$ 的坐标.

解: $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = 2(1, 5, 2) + (-2, 3, -1) = (2, 10, 4) + (-2, 3, -1) = (0, 13, 3)$.

$$\begin{aligned}&-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c} = -3(1, 5, 2) + 2(0, -3, 4) + 4(-2, 3, -1)\\&= (-3, -15, -6) + (0, -6, 8) + (-8, 12, -4) = (-11, -9, -2).\end{aligned}$$

4. 已知 A、B 两点的坐标分别为 $(1, -2, 3)$, $(4, 1, 2)$.

(1) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 AB 成定比 $3:2$;

(2) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 BA 成定比 $-2:3$.

解: (1) 由 $|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PB}|=3:2$ 可得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$. 利用例 3.1 的定比分点公式, 取 $k=\dfrac{3}{2}$, 可得 P 点坐标 $\left(\dfrac{14}{5},-\dfrac{1}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.

(2) 由已知条件可得 $\overrightarrow{BP}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$, 用定比分点公式算得 P 点坐标 $(10,7,0)$.

5 已知 $A(1,-1)$, $B(-4,5)$, 将线段 AB 延长至 C 使 $|AC|=5|AB|$. 求点 C 的坐标.

解: (1) 当 $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}$. 因此 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 即 B 是线段 AC 的比值为 $\dfrac{1}{4}$ 的定比分点. 所以

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{1+\frac{1}{4}x_C}{1+\frac{1}{4}} \\ y_B=\dfrac{-1+\frac{1}{4}y_C}{1+\frac{1}{4}} \end{cases} \qquad \text{解得: } C(-24,29).$$

(2) 当 $\overrightarrow{AC}=-5\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{AB}$. 所以

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{x_C+5x_B}{1+5} \\ y_A=\dfrac{y_C+5y_B}{1+5} \end{cases} \qquad \text{解得: } C(26,-31).$$

6. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分, 试求出这线段的两个端点 A,B 的坐标.

解: 不妨设 A,B,C,D 四点如图所示, A,B 两点的坐标分别为 (x_A,y_A,z_A) 与 (x_B,y_B,z_B), 则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$. 所以

$$(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C),$$

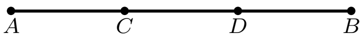
即:

$$\begin{cases} x_A=2x_C-x_D=-1 \\ y_A=2y_C-y_D=2 \\ z_A=2z_C-z_D=4. \end{cases}$$

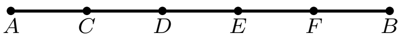
同理,

$$\begin{cases} x_B=2x_D-x_C=8 \\ y_B=2y_D-y_C=-4 \\ z_B=2z_D-z_C=-2. \end{cases}$$

因此 A, B 两点的坐标分别为 $(-1,2,4)$ 与 $(8,-4,-2)$ (两种可能).



第 6 题图



第 7 题图

7. 设 A, B 两点的坐标分别为 $(-6,5,-8)$, $(4,0,7)$, 试确定点 C, D, E, F, 使 C, D, E, F 将线段 AB 五等分.

解: 不妨设 A, B, C, D, E, F 如图. 所以

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB},$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EB}, \quad \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}.$$

利用定比分点公式算得 C 点坐标为 $(-4,4,-5)$, D 点坐标为 $(-2,3,-2)$, E 点坐标为 $(0,2,1)$, F 点坐标为 $(2,1,4)$.

8. $ABCD$ 为平行四边形. 已知 A, B 及对角线交点的坐标分别为 $(-3,1,5)$, $(2,-3,4)$, $(1,-1,2)$. 试确定点 C, D 的坐标.

解: 设对角线交点为 M, C, D 的坐标分别为 $(x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D)$. 由于 M 是 A, C 的中点, 因此

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(-3 + x_C) = 1 \\ \dfrac{1}{2}(1 + y_C) = -1 \\ \dfrac{1}{2}(5 + z_C) = 2, \end{cases}$$

解得 C 点坐标为 $(5,-3,-1)$. 由于 M 也是 B, D 的中点, 同理可得 D 点坐标为 $(0,1,0)$.

9. 证明三角形的三条中线交于一点 (重心).

证明: 设 D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 上的中点. AD 与 BE 交于 G, AD 与 CF 交于 G'. 则

$$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AD} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC}.$$

若建立仿射标架 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, 则点 G 坐标为 $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2}\right)$. 又

$$\overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{BE} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = m\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right]$$

$$= \frac{m}{2}\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB},$$

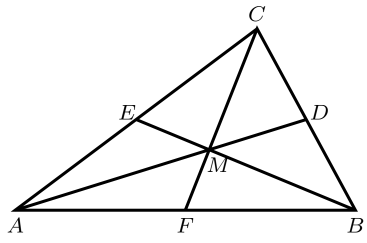
所以 $\overrightarrow{BG}$ 坐标为 $\left(-m, \dfrac{m}{2}\right)$. 但 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, 所以,

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) = (1, 0) + \left(-m, \frac{m}{2}\right),$$

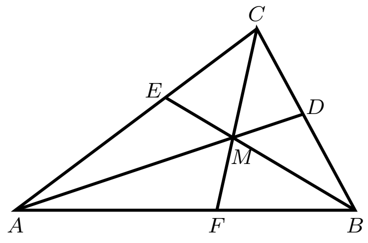
解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 - m \\ \dfrac{k}{2} = \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

得 $k = m = \dfrac{2}{3}$. 所以 G 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. 同理, 可以推得 G' 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. 证得 $G = G'$.



第 9 题图



第 10 题图

*$\mathbf{10.}$ 证明三角形的三条角平分线交于一点.

证明: 设 $\triangle ABC$ 的三条角平分线分别为 AD, BE 和 CF. 且设 AD 与 BE 交于 T 点. 令

$$\overrightarrow{AT} = k\overrightarrow{AD} = \frac{k}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).$$

建立仿射标架 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, 且令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. 则 T 点坐标是 $\left(\dfrac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \dfrac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$. 我们还知道

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|}(|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA} + |\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}),$$

所以

$$\overrightarrow{BT} = m\overrightarrow{BE} = \frac{m}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}(-|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|\overrightarrow{a} + |\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}))$$

$$= -m\overrightarrow{a} + \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\overrightarrow{b}.$$

由于 $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, 所以

$$\left(\frac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right) = (1,0) + \left(-m, \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\right),$$

即:

$$\begin{cases} \dfrac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = 1 - m \\ \dfrac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|} \end{cases}$$

解得:

$$k = \frac{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}.$$

又设 AD 与 CF 交于 T' 点,

$$\overrightarrow{AT'} = s\overrightarrow{AD} = \frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} + \frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}.$$

得 T' 点的坐标为 $\left(\dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$.

$$\overrightarrow{CT'} = t\overrightarrow{CF} = \frac{t}{|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|}(|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA} + |\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}) = \frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b},$$

由 $\overrightarrow{AT'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT'}$, 得:

$$\left(\frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right) = (0,1) + \left(\frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}, -t\right),$$

即:

$$\begin{cases} \dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|} \\ \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = 1 - t \end{cases}$$

解得:

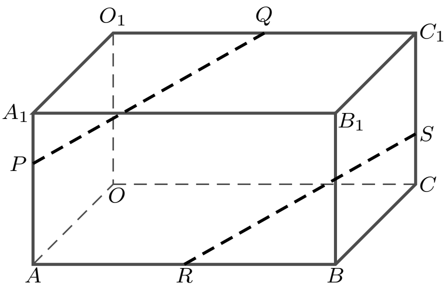
$$s = \frac{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}.$$

由此可见 $s=k$, 即 $T=T'$.

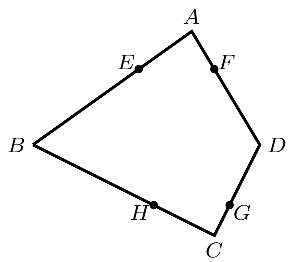
11 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 由 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+mt\overrightarrow{AC}$ 所确定, 其中实数 k,m,t 满足 $k+m=1$, $k\geq\dfrac{1}{3}$, $m\geq\dfrac{1}{3}$, $-1\leq t\leq 1$. 若使 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 k,m,t 各应取什么值?

解: 建立仿射坐标系 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$. 则 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $P(k,mt)$. 若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $k=\dfrac{1}{3}$, $mt=\dfrac{1}{3}$. 而 $k+m=1$, 推知 $m=\dfrac{2}{3}$, 从而 $t=\dfrac{1}{2}$.

12. 如图, 已知平行六面体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中, 点 P 在棱 AA_1 上, 且 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}$, 点 S 在棱 CC_1 上, 且 $\overrightarrow{CS}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC_1}$, 点 Q,R 分别是棱 O_1C_1,AB 的中点. 求证: 直线 PQ 与直线 RS 平行.



第 12 题图



第 13 题图

证明: 建立坐标系 $[O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}]$. 因为 $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PA_1}|$, 所以

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1Q}=\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

从而

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

类似地,

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$

所以

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

这样就有 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$, 于是 $\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{RS}$.

13. 已知空间四边形 $ABCD$, 将 AB, AD, CD 及 CB 以相同比分之, 证明这四个分点构成一个平行四边形.

证明: 如图. 设分点为 E, F, G, H. 设

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EB}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{FD}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD},$$

则

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BD}.$$

类似地, 由 $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CB}$ 以及 $\overrightarrow{CG}=k\overrightarrow{CD}$ 可以得到 $\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. 因此 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, 证明了 $EFGH$ 是平行四边形.

14. 证明: 四面体的四条中线交于一点 (即四面体的重心), 且此交点将每一条中线分成定比为 $3:1$ (由顶点算起) 的两部分. (注: 四面体的中线即四面体的顶点到其对面的重心的连线)

证明: 建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$. G 点为 $\triangle ABC$ 的重心, G_1 为 $\triangle VBC$ 的重心, 由习题 1–2 的第 3 题知:

$$\overrightarrow{VG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_1}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AV})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VB}-\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VA}-\overrightarrow{VA})\\&=\frac{1}{3}(-3\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(-1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

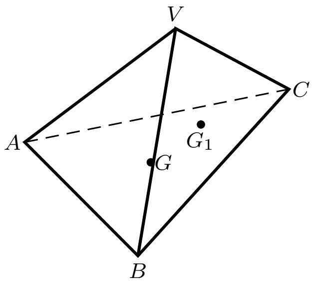
取把中线 VG 分成 $3:1$ 的分点 M, 即

$$\overrightarrow{VM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{VG}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$

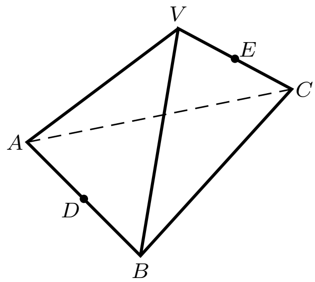
同时,

$$\overrightarrow{VA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM}.$$

所以 M 在 VG 与 AG_1 上. 同理, 可证得: 若设 G_2, G_3 分别是 $\triangle VAB$ 和 $\triangle VAC$ 的重心. 则 CG_2 与 BG_3 也必交于点 M', 且 $\overrightarrow{VM'}=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$, 因此 $M'=M$, 且交点分每一中线成定比 $3:1$.



第 14 题图



第 15 题图

15. 四面体的不相交的两条棱称为对棱, 每一对对棱的中点的连线称为四面体的拟中线. 证明: 四面体的三条拟中线交于它的重心, 且此重心是每一条拟中线的中点.

证明: 同上题建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$, 设 M 是四面体的重心, 则 $\overrightarrow{VM}=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$. 设 D,E 分别为 AB,VC 的中点. 则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{VA},$$

$$\overrightarrow{VD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

$$\overrightarrow{VE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VC}=\left(0,0,\frac{1}{2}\right),$$

所以

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

由于

$$\overrightarrow{VE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM},$$

说明重心 M 在 ED 上且等分 ED. 同理可证其它.

§ 4 线性相关性与线性方程组

1. 计算下列 2 阶与 3 阶行列式:

解: (1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5.$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2.$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -22.$ (6) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz.$

2. 利用 2 阶或 3 阶行列式解线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+2y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-3, \\ x+3y-2z=-6. \end{cases}$

解: (1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{13}{13} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-13}{13} = -1.$

(2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-42}{49} = -\dfrac{6}{7}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{189}{49} = \dfrac{27}{7}.$

3. 设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 为基.

(1) 证明: 向量 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}$ 线性无关;

(2) 求向量 $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ 在基 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 下的坐标;

(3) 求向量 $\overrightarrow{f}$, 使 $-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{f} = 0$.

解: (1) 设有实数 x_1, x_2, x_3 满足线性关系式$x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} + x_3\overrightarrow{c} = 0$, 表达

成坐标形式就是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

它的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -10 & 6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

因此这个方程组只有零解, 即 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 线性无关.

(2) $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 3(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) - 2(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}) + (-\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 17\overrightarrow{e_2} + 23\overrightarrow{e_3}$, 故 $\overrightarrow{d}$ 的坐标是 $(-2, 17, 23)$.

(3) $\overrightarrow{f} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) = \frac{1}{3}(-6\overrightarrow{e_1} + 15\overrightarrow{e_2} + 37\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + \frac{37}{3}\overrightarrow{e_3}$.

4. 判断下列每组的三个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 是否共面? 能否将 $\overrightarrow{c}$ 表示成其它两个向量的线性组合? 若能, 写出具体的表示式子.

(1) $\overrightarrow{a}(5, 2, 1)$, $\overrightarrow{b}(-1, 4, 2)$, $\overrightarrow{c}(-1, -1, 5)$;

(2) $\overrightarrow{a}(3, 3, 2)$, $\overrightarrow{b}(6, 6, 4)$, $\overrightarrow{c}(1, -1, 0)$;

(3) $\overrightarrow{a}(1, 2, -3)$, $\overrightarrow{b}(-2, -4, 6)$, $\overrightarrow{c}(1, 0, 5)$.

解: 问题归结为求解 $x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} + x_3\overrightarrow{c} = 0$.

(1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 121 \neq 0,$$

方程只有零解, 故原向量组不共面.

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3 = -1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合.

(3) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3 = -1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 = -5, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合.

5. 设向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1, -1, 2)$, $(2, k, 1)$, $(1, 1-k, k)$. 问: 当 k 取什么值时, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面? 特别地, k 取什么值时, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ 共线?

解: 这 3 个向量共面的充分必要条件是其坐标的行列式等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1-k & k \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0.$$

因此当 $k=1$ 或 2 时这 3 个向量共面. 要使 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 共线必须使它们的相应坐标成比例, 即 $\frac{1}{1}=\frac{1-k}{-1}=\frac{k}{2}$, 解得 $k=2$. 因此当 $k=2$ 时 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 共线.

6. 设 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 为基. 问向量 $\overrightarrow{v}$ 能否表为向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 的线性组合? 如能, 则写出表达式.

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=6\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+15\overrightarrow{e_3}$;

(2) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{e_1}+6\overrightarrow{e_2}+5\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$.

解: 设 $\overrightarrow{v}=x_1\overrightarrow{a}+x_2\overrightarrow{b}+x_3\overrightarrow{c}$, 问题归结为解线性方程组.

(1) 方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ 4x_1+x_2+3x_3=15, \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, 不能断定方程组是否有解. 用加减消去法解得 $\begin{cases} x_1=3-\frac{2}{3}x_3 \\ x_2=3-\frac{1}{3}x_3, \end{cases}$ 令 $x_3=3k$ 可以得到线性表示式 $\overrightarrow{v}=(3-2k)\overrightarrow{a}+(3-k)\overrightarrow{b}+3k\overrightarrow{c}$, 其中 k 为任意数.

(2) 方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ -2x_1+2x_2+6x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=0, \end{cases}$ 系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=36,$$

方程组有解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{36}=-\frac{11}{36},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{36}=\frac{16}{9},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{36} = -\frac{19}{36}.$$

线性表示式为 $\overrightarrow{v} = -\frac{11}{36}\overrightarrow{a} + \frac{16}{9}\overrightarrow{b} - \frac{19}{36}\overrightarrow{c}$.

7. 当 a 为何值时, 下列四点共面:

$$M_1(1, a, a^2), \quad M_2(1, -1, 1), \quad M_3(2, 1, -2), \quad M_4(-1, 2, 2).$$

解: 根据推论 4.5, 此 4 点共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2-1 & -1-1 \\ -1-a & 1-a & 2-a \\ 1-a^2 & -2-a^2 & 2-a^2 \end{vmatrix} = -7a^2 - 5a + 2 = 0,$$

解得 $a = -1$ 或 $\frac{2}{7}$.

§5 n 维向量空间

1. 根据 n 维向量的定义证明: 对任意 n 维向量 α, 有

(1) $0\alpha = 0$;

(2) $(-1)\alpha = -\alpha$;

(3) $k0 = 0$ (任意数 k);

(4) 从 $k\alpha = 0$ 推出 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$.

证明: 对任意的 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, 则:

(1) $0\alpha = (0a_1, \cdots, 0a_n) = (0, \cdots, 0) = 0$.

(2) $(-1)\alpha = ((-1)a_1, \cdots, (-1)a_n) = (-a_1, \cdots, -a_n) = -\alpha$.

(3) $k0 = (k0, \cdots, k0) = (0, \cdots, 0) = 0$.

(4) $k\alpha = (ka_1, \cdots, ka_n) = (0, \cdots, 0)$. 若 $\alpha \neq 0$, 则存在 $a_i \neq 0$, 由 $ka_i = 0$ 可得 $k = 0$.

2. 证明: 任一数域都包含有理数域.

证明: 设 K 为一个数域, 则 $1 \in K$. 所以对任意的正整数 n 有 $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \in K$, 并且 n 的负元 $-n \in K$. 因此 K 含有全部整数. 又因对任意的整数 $n \neq 0$, $n \in K$, $\frac{1}{n}$ 为 n 的逆元, 则 $\frac{1}{n} \in K$, 所以对任意的有理数 $\frac{m}{n}$ (其中 m, n 是整数), 有 $\frac{m}{n} = m \times n \in K$, 故有理数域 $\mathbb{Q} \subseteq K$.

3. 证明: 全体形如
$$a+b\sqrt{2},\quad a,b\in\mathbb{Q}$$
的数组成的集合构成一个数域.

证明: 把这个集合记为 K, 设 $a_1+b_1\sqrt{2}, a_2+b_2\sqrt{2}\in K$, 则
$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in K$$
(因为有理数的和与差仍是有理数);
$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in K$$
(因为有理数的和、差与乘积仍是有理数); 当 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时,
$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{a_2^2-2b_2^2}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\in K$$
(有理数关于除法也是封闭的). 因此集合 K 关于加减乘除法都封闭, 成为一个数域.

4. 设 K 为数域, V 为 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对所有的 $k\in K$, $\alpha,\beta\in V$, 有

(1) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$;

(2) $\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n\text{个}}=n\alpha$;

(3) 若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 则 $\beta=\gamma$.

证明: 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$ $(a_i,b_i\in K)$. 则对任意的 $k\in K$,

(1) $k(\alpha-\beta)=k(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)=(k(a_1-b_1),\cdots,k(a_n-b_n))=(ka_1-kb_1,\cdots,ka_n-kb_n)=k(a_1,\cdots,a_n)-k(b_1,\cdots,b_n)=k\alpha-k\beta$.

(2) $\underbrace{\alpha+\cdots+\alpha}_{n}=(\underbrace{a_1+\cdots a_1}_{n},\underbrace{a_2+\cdots+a_2}_{n},\cdots,\underbrace{a_n+\cdots+a_n}_{n})=(na_1,\cdots,na_n)=n\alpha$.

(3) 若设 $\gamma=(c_1,\cdots,c_n)$, 且 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 即: $(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)=(a_1+c_1,\cdots,a_n+c_n)$, 则有 $a_i+b_i=a_i+c_i$, 即$b_i=c_i$, 所以$\beta=\gamma$.

§6　几何空间向量的内积

1. 将下列向量单位化:

(1) $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$;　　　(2) $\overrightarrow{b}=\frac{1}{2}\overrightarrow{i}-\frac{1}{3}\overrightarrow{k}$.

解: (1) $\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{\sqrt{70}}{70}(5\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k})$.

(2) $\overrightarrow{b^0}=\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{k})$.

2. 计算下列向量的夹角:

(1) $\overrightarrow{a}=(1,-2,3)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,-2)$; (2) $\overrightarrow{a}=(-2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,4)$.

解: (1) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{14}$, $|\overrightarrow{b}|=3$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-6$, 所以

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 3}=-\frac{\sqrt{14}}{7},\quad \langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\pi-\arccos\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

(2) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{b}|=3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-7$, 所以

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\frac{-7}{6\sqrt{3}}=-\frac{7\sqrt{3}}{18},\quad \langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\pi-\arccos\frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

3. 求向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{e^0}$ 上的投影:

(1) $\overrightarrow{a}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{e}=(1,1,1)$; (2) $\overrightarrow{a}=(-2,1,3)$, $\overrightarrow{e}=(1,2,0)$.

解: (1) $\overrightarrow{e^0}=\dfrac{\overrightarrow{e}}{|\overrightarrow{e}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e^0}}\overrightarrow{a}&=(\Pi_{\overrightarrow{e^0}}\overrightarrow{a})\overrightarrow{e^0}=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e^0})\overrightarrow{e^0}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{e^0}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)=\frac{2}{3}(1,1,1).\end{aligned}$$

(2) 因 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}=0$, 所以 $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e^0}}\overrightarrow{a}=0$.

4. 证明: 以 $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,2,1)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证明: $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-6,3,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,6,-1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{46}\neq|\overrightarrow{AB}|$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. 证明: 以 $A(3,-2,1)$, $B(7,6,9)$, $C(9,1,-5)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明: $\overrightarrow{AB}=(4,8,8)$, $\overrightarrow{AC}=(6,3,-6)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12(2+2-4)=0$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

6. 设有三个向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 两两构成 60° 角, 且知 $|\overrightarrow{a}|=4$, $|\overrightarrow{b}|=2$, $|\overrightarrow{c}|=6$. 求 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 的长度.

解: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=16+4+36+2(8+24+12)\cos 60^\circ=100$. 所以 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=10$.

7. 已知 $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=2$, $\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$. 试求 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 与 $2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ 的内积.

解: $(3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b})=6\overrightarrow{a}^2-10\overrightarrow{b}^2-11\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=54-40-11\times 3\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=14-33\sqrt{3}$.

8. 在直角坐标系中, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$的坐标分别是$(3,5,7)$, $(0,4,3)$, $(-1,2,-4)$. 求 $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}$ 与 $2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 的夹角.

解: 记

$$\overrightarrow{p}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}=(14,21,53),\quad \overrightarrow{q}=2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(-1,10,2),$$

则

$$\overrightarrow{p}^2=3446,\quad \overrightarrow{q}^2=105,\quad \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=302.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}\rangle=\frac{151\sqrt{361830}}{180915}.$$

9. 求下列向量的方向余弦:

(1) $\overrightarrow{a}=(2,-3,-6)$;　　(2) $\overrightarrow{b}=(2,3,-10)$.

解: (1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{-3}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{-6}{7}$.

(2) $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{113}}{113}$, $\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{113}}{113}$, $\cos\gamma=-\dfrac{10\sqrt{113}}{113}$.

10 设向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,4)$, $\overrightarrow{b}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}$ (k 是实数).

(1) 求 k 使 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$;　　(2) 求与 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 都垂直的 $\overrightarrow{d}$.

解: (1) 由已知,

$$\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}^2=0.$$

而 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=7$, $\overrightarrow{a}^2=21$, 所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\overrightarrow{d}$ 垂直于 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 等价于 $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{c}=0$, 由假设 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}$, 也等价于 $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=0$. 设 $\overrightarrow{d}=(x,y,z)$, 得

$$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=x+2y+4z=0,$$

$$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=x+y+z=0.$$

解得 $x=2z, y=-3z$, 即 $\overrightarrow{d}=(2k,-3k,k)$ (k 是实数).

11 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是两个单位向量, s,t 是两个非零实数, 使得

$$|s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|=|t\overrightarrow{a}-s\overrightarrow{b}|,$$

求 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的夹角.

解: 由 $|s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|=|t\overrightarrow{a}-s\overrightarrow{b}|$ 得 $(s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})^2=(t\overrightarrow{a}-s\overrightarrow{b})^2$. 推出 $s^2+t^2+2st\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=t^2+s^2-2st\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$. 故 $2st\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$. 又因 $st\neq 0$, 得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$, 夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

12. 如图, 已知长方体 $OABC$–$O_1A_1B_1C_1$ 中, $|OA|=8$, $|OC|=6$, $|OO_1|=1$. P 是棱 OC 上的点, 且 $|PC|=2|OP|$, M 是棱 AB 上的点, 且 $|AM|=2|MB|$, N 是棱 B_1C_1 的中点. 求直线 A_1P 与直线 MN 所成的角.

解: 把向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OO_1}$ 的单位向量记为 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, 建立直角坐标系 $[O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$. 则

$$\overrightarrow{OA_1}=8\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}=(8,0,1);$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{j}=(0,2,0);$$

$$\overrightarrow{OM}=8\overrightarrow{i}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=8\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}=(8,4,0);$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}=(4,6,1);$$

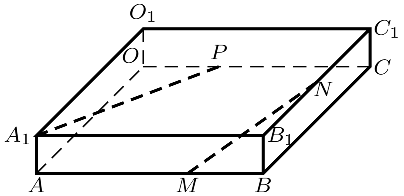
因此

$$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_1}=(-8,2,-1);$$

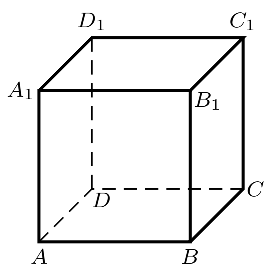
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-4,2,1).$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{A_1P}, \overrightarrow{MN}\rangle=\frac{35}{\sqrt{69}\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{161}}{69}.$$



第 12 题图



第 13 题图

13. 计算正方体的对角线与它的任一个面的对角线之间的夹角.

解: 建立直角坐标系 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}]$, 以对角线 AC_1 来计算此题.

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=(1,1,1).$$

(a) $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=(1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 由对称性, $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{AC}$ 的夹角余弦也为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$, 即 $\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$. 同理. $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CD_1}$ 的夹角也为 $\dfrac{\pi}{2}$.

14. 试问 $(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})$ 一定成立吗? 请给出该向量等式成立的条件.

解: 等式左端是与 $\overrightarrow{c}$ 共线的向量, 右端是与 $\overrightarrow{a}$ 共线的向量. 如果两端都不等于 0, 则 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 即存在 $k\neq 0$, 使 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{c}$. 反之若 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{c}$, 左边 $=k(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}=(k\overrightarrow{c})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=$ 右边.

若等式两边都等于 0, 则或者 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 中至少有一个零向量; 或者三个向量都不等于 0, 但 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$, 即 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 均正交.

15. 求解向量方程 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$.

解: 因为 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\overrightarrow{x}=0$, 分两种情况: (a) 若 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\neq 0$, 则解 $\overrightarrow{x}$ 为任意与 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直的向量; (b) 若 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=0$, 则任意向量 $\overrightarrow{x}$ 都是解向量.

16. 若向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面, 而且 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{x}=0$. 则 $\overrightarrow{x}=0$. 试证之.

证明: 因为 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面, 所以它们线性无关, 且 $\overrightarrow{x}$ 可由它们线性表示, 即: $\overrightarrow{x}=k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}$. 于是 $\overrightarrow{x}^2=k_1(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})+k_2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{x})+k_3(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{x})=0$, 即: $\overrightarrow{x}=0$.

17. 证明三个向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{c}\end{vmatrix}=0.$$

证明: $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使: $k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}=0$. 从而

$$\begin{cases}k_1\overrightarrow{a}^2+k_2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+k_3(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})+k_2\overrightarrow{b}^2+k_3(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+k_2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})+k_3\overrightarrow{c}^2=0,\end{cases}$$

也即齐次线性方程组

$$\begin{cases} x\overrightarrow{a}^2+y(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+z(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ x(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})+y\overrightarrow{b}^2+z(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ x(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+y(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})+z\overrightarrow{c}^2=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

有非零解 $x=k_1$, $y=k_2$, $z=k_3$. 根据引理 4.1, 系数行列式

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2 \end{vmatrix}=0.$$

反之, 若

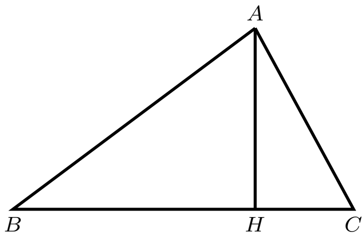
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2 \end{vmatrix}=0,$$

则 $(*)$ 必有非零解, 设为 $x=k_1$, $y=k_2$, $z=k_3$, 令 $\overrightarrow{p}=k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}$, 那么. 从 $(*)$ 知:

$$\overrightarrow{p}^2=k_1\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}=0,$$

即 $\overrightarrow{p}=0$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 线性无关, 必定共面.

18. 三角形 ABC 中, 已知 BC 边上的高为 AH. 试用 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AH}$.



第 18 题图

解: 将 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}$ 代入 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BC}^2=0$. 因此

$$k=\frac{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2},$$

得

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2}.$$

再用 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 代入, 整理后得

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2}[(\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AC}].$$

19 在平面四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{d}$. 那么, 当 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}$ 时, $ABCD$ 是什么四边形? 为什么?

解: 由于 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=0$, 所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})\\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}=-(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}^2+\overrightarrow{d}^2+2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{d}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2=\overrightarrow{c}^2+\overrightarrow{d}^2$, $\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{d}^2=\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2$. 推知 $\overrightarrow{a}^2=\overrightarrow{c}^2$, $\overrightarrow{b}^2=\overrightarrow{d}^2$. 从而 $|AB|=|CD|$, $|BC|=|AD|$, 即 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}=0$, $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}=0$. 由 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 知 $0=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}$. 因此 $ABCD$ 是矩形.

*__20.__ 设一个四边形各边之长分别是 a,b,c,d, 且其对角线互相垂直. 求证各边之长也是 a,b,c,d 的任一四边形的两条对角线也相互垂直.

证明: 如图, 有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.$$

考虑以下内积:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC};$$

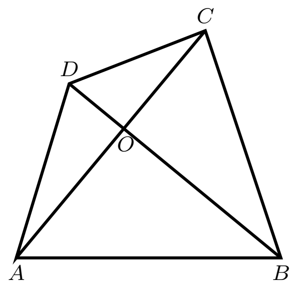
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=-\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

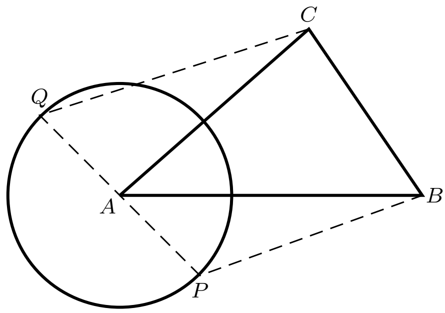
将上述 4 式相加, 可得:

$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

由
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$$
可得
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}.$$
由
$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})^2$$
整理得
$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2=2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}).$$
代入上式得
$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2)=2(b^2+d^2-a^2-c^2).$$
这说明对角线垂直的充分必要条件是 $a^2+c^2=b^2+d^2$, 只与四边形的边长有关.



第 20 题图



第 21 题图

21 有一个三角形 $\triangle ABC$ 和一个圆. 三角形的三边之长分别是 $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, 圆的圆心在点 A, 半径为 r. 作圆的一条直径 PQ 使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到: (1) 最大, (2) 最小. 试分别求出 $\overrightarrow{PQ}$, 并用 a,b,c 及 r 分别表示这最大值和最小值.

解: 设 $\overrightarrow{PQ}$ 为圆的一条直径, 则 $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AP}$, $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AP}|=r$. 由于 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}$, 得
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AP}-r^2\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}-r^2.\end{aligned}$$

(1) 要使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到极大当且仅当 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 达到极大, 当且仅当 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{CB}$, $k>0$;

(2) 要使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到极小当且仅当 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 达到极小, 当且仅当 $\overrightarrow{AP}=-m\overrightarrow{CB}$, $m>0$.

而 $|\overrightarrow{AP}|=r$, 所以 $k=m=\dfrac{r}{a}$, $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{AP}$. 最后得到:

(1) $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{2r}{a}\overrightarrow{CB}$, 最大值为

$$cb\cos\angle BAC+ar-r^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+ar-r^2;$$

(2) $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{2r}{a}\overrightarrow{CB}$, 最小值为

$$cb\cos\angle BAC-ar-r^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-ar-r^2.$$

22 设有一向量集合 $S=\{\overrightarrow{x}\mid|\overrightarrow{x}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\le 1\}$, $\overrightarrow{a}$ 是一个非零向量. 证明: 对于任意 $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S$ 及实数 $0\le t\le 1$, $t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}\in S$.

解:

$$|\overrightarrow{x}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\le 1\iff\left(\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)^2\le 1+\frac{\overrightarrow{a}^2}{4}.$$

若记 $r=1+\dfrac{\overrightarrow{a}^2}{4}$, 则 $\overrightarrow{x}\in S$ 当且仅当 $\overrightarrow{x}$ 落在以 $-\dfrac{\overrightarrow{a}}{2}$ 为圆心, 半径为 r 的圆内 (包括圆周). 因此对 $0\le t\le 1$ 及任意 $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S$, 只需验证

$$\left|t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|\le r=1+\frac{\overrightarrow{a}^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}\left|t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|&=\left|t\left(\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)\right|\\&\le t\left|\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|+(1-t)\left|\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|\le tr+(1-t)r=r.\end{aligned}$$

所以 $t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}\in S$.

***23** 设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 C 的内接四边形, H_1,H_2,H_3,H_4 依次是 $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证: H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆. (提示: 以圆 C 的圆心为原点建立直角坐标系)

解: 以圆 C 的圆心为原点 O 建立直角坐标系. 设圆 C 的半径为 r, 则 $|OA_i|=r$. 在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中, 令 $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}$, 则

$$\overrightarrow{A_2H_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}=(\overrightarrow{OH_1}-\overrightarrow{OA_2})(\overrightarrow{OA_4}-\overrightarrow{OA_3})=(\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_3})(\overrightarrow{OA_4}-\overrightarrow{OA_3})=0.$$

同理, $\overrightarrow{A_3H_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_4}=\overrightarrow{A_4H_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=0$, 即 H_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心. 其余同理. 因此有

$$\overrightarrow{OH_i}=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})-\overrightarrow{OA_i},\qquad (i=1,2,3,4)$$

令 $\overrightarrow{OH_0}=\sum_{i=1}^4\overrightarrow{OA_i}$, 这是一个常向量, 则 $|\overrightarrow{OH_i}-\overrightarrow{OH_0}|=|\overrightarrow{OA_i}|=r$. 所以 H_1,H_2,H_3,H_4 在以 H_0 为圆心、半径为 r 的圆周上.

*__24__ 设 $0<a<1$, $0<b<1$. 用几何方法证明:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geq 2\sqrt{2}.$$

解: 建立平面直角坐标系 $[O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}]$. 取 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ 四个点构成一个正方形, 边长为 1. 设 $P(a,b)$, 则 P 在正方形 $ABCD$ 之内, 且 $|PA|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|PB|=\sqrt{(1-a)^2+b^2}$, $|PC|=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$, $|PD|=\sqrt{a^2+(1-b)^2}$. 由于 $|PA|+|PC|\geq|AC|=\sqrt{2}$, $|PB|+|PD|\geq|BD|=\sqrt{2}$, 得证.

*__25__ 设 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ 是中心在原点 O、半径为 1 的圆上相异的 6 点. 证明: 总可以在 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_6}$ 中找出两个向量 $\overrightarrow{OP_i}$ 和 $\overrightarrow{OP_j}$ $(1\leq i\neq j\leq 6)$ 使得 $|\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{OP_j}|\geq\sqrt{3}$.

解: 令 a_{ij} 表示 $\overrightarrow{OP_i}$ 与 $\overrightarrow{OP_j}$ 的夹角 $(\leq\pi)$, 即 $a_{ij}=\angle P_iOP_j\neq\pi$. 设 $a_0=\min\{a_{ij}\mid 1\leq i\neq j\leq 6\}$, 我们先证 $0<a_0\leq\dfrac{\pi}{3}$. 不妨设从 $\overrightarrow{OP_1}$ 开始依逆时针转动时依次得到 $\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_6}$, 若 $a_{12}>\dfrac{\pi}{3}$, $a_{23}>\dfrac{\pi}{3}$, $\dots$, $a_{16}>\dfrac{\pi}{3}$, 将导致 $2\pi=a_{12}+\cdots+a_{61}>6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$, 矛盾. 因此不妨设 $a_{12}=\angle P_1OP_2\leq\dfrac{\pi}{3}$. 利用余弦定理便有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}|^2=2+2\cos a_{12}\geq 2+1=3.$$

即 $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}|\geq\sqrt{3}$.

*__26__ 设实数 a,b,c 满足: $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. 如果记 $\overrightarrow{r_i}=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\cdots,6)$, 其中 $\{x_i,y_i,z_i\}=\{a,b,c\}$. 则必存在 $\overrightarrow{r_i}\neq\overrightarrow{r_j}$, 使 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j}\geq\dfrac{1}{2}$.

解: 设 $\overrightarrow{p}=(1,1,1)$. 则对任意 $\overrightarrow{r_i}$ $(1\leq i\leq 6)$, 总有 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{p}=0$. 因此 $\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_6}$ 均与 $\overrightarrow{p}$ 垂直, 从而它们共面. 再由 $|\overrightarrow{r_i}|=1$ $(1\leq i\leq 6)$, 可知 $\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_6}$ 是单位圆上的 6 个相异点. 由习题 25 可知, 必存在相异的两个向量, 设为 $\overrightarrow{r_i}\neq\overrightarrow{r_j}$, 使得

$$|\overrightarrow{r_i}+\overrightarrow{r_j}|\geq\sqrt{3}.$$

两边平方之后可知 $|\overrightarrow{r_i}|^2+|\overrightarrow{r_j}|^2+2(\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j})\geq 3$, 即 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j}\geq\dfrac{1}{2}$.

§7 几何空间向量的外积

1. 在直角坐标系中, 已知 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,-2,0)$, $(-1,2,1)$, 求 $(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})$ 的坐标.

解: $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(4,-2,3)$, $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(2,-4,-1)$, 所以

$$(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=\left(\begin{vmatrix}-2&3\\-4&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}4&3\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&-2\\2&-4\end{vmatrix}\right)$$
$$=(14,10,-12).$$

2. 证明 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2\le\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2$. 并说明等式何时成立.

证明: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle\le|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$, 等号成立当且仅当 $\sin\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=0$. 即: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$.

3. 已知 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 是两个互不平行的向量, 求证 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$, 并说明它的几何意义.

证明: $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$. 几何意义: 若以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 构成一个平行四边形的相邻两边, 则 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 为此平行四边形的两对角线. 上式说明: 以对角线构成的平行四边形面积为原平行四边形面积 2 倍.

4. 求向量 $\overrightarrow{c}$, 使 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$, 其中,

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$.

解: 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$. 则 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$. 计算得:

(1) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$.

(2) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$. (本题答案不唯一)

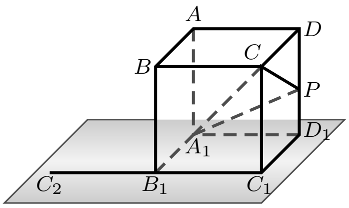
5. 计算由向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 所张成的平行四边形的面积:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$.

解: (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{30}$. 所以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $\sqrt{30}$.

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=2\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $2\sqrt{3}$.



第 6 题图

6. 如图, 已知 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体, P 是棱 DD_1 上任意一个点. 线段 C_1C_2 的中点是 B_1. 请指出下列各个向量积所确定的向量:

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}$; (2) $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}$; (3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}$.

解: 建立直角标架 $[A_1;\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1D_1},\overrightarrow{A_1A}]$. 设 P 为 DD_1 上任一点. 则: $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k)$, $\overrightarrow{A_1C}=(1,1,1)$.

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k)\times(0,0,1)=(1,0,0)=\overrightarrow{A_1B_1}$.

(2) $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{A_1C}-\overrightarrow{A_1P}=(1,0,1-k)$, $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,0,1-k)\times(0,0,1)=(0,-1,0)=-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{D_1A_1}$.

(3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,1,1)\times(0,0,1)=(1,-1,0)=\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C_2}$.

7. 设 $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}=-8\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. 求 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, 使$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$.

解: 令 $\overrightarrow{u^0}=\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$, $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})\overrightarrow{u^0}=\dfrac{-17}{7}(2,3,-1)$. 令

$$\overrightarrow{v_2}=\frac{-17}{7}(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}),\quad \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}=\frac{2}{7}(-11\overrightarrow{i}+8\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}),$$

则: $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, 且 $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=0$.

8. 设 $\overrightarrow{u}$ 为给定的非零向量, $\overrightarrow{v}$ 为任一向量.

(1) 证明: $\overrightarrow{v}$ 可唯一分解为 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 其中, $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$;

(2) 具体写出 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ 的表达式.

证明: (1) 若 $\overrightarrow{v}$ 有两种分解法: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_1'}+\overrightarrow{v_2'}$, 其中. $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2'}/\!/\overrightarrow{u}$, 则 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}$. 但 $(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'})\cdot\overrightarrow{u}=0$, $(\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2})\times\overrightarrow{u}=0$, 所以 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\neq 0$, 推出: $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=0$, $\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}=0$, 即 $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_1'}$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_2'}$.

(2) 令 $\overrightarrow{v_2}=\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})\overrightarrow{u^0}=\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}$. 则$\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}^2=0$, 即$\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$. 且知: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 由 (1) 知

这种分解是唯一的, 故表达式为

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_2}. \end{cases}$$

9. 设 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 为两两不共线的向量. 证明: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ 当且仅当 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

证明: 若 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$, 则此式与 $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 作外积后可得 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = 0$ 以及 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = 0$, 即 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

反之, 设 $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. 由上述等式可得 $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = 0$ 以及 $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = 0$. 如果 $\overrightarrow{p} \neq 0$, 则由 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{b}$ 共线以及 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{b}$ 共线可得 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 与假设矛盾.

10. 设 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 为两不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$. 证明: A, B, D 三点共线.

证明: 要证 A, B, D 三点共线, 只须证明: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = 0$ 即可. 由

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} = 5(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 5\overrightarrow{AB},$$

可得 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = 0$, 即: A, B, D 三点共线.

11. 三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 满足

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = 0.$$

求证: 三点 A, B, C 共线.

证明: 要证 A, B, C 共线只须证明: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = 0,$$

故 A, B, C 三点共线.

12. 如果 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{n}$, 则 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面. 试证明之.

证明: 由于 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{c} = 0$, 若 $\overrightarrow{n} \neq 0$, 则 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面; 否则, 由 $\overrightarrow{n} = 0$ 可得 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = 0$, 也共面.

§8 几何空间向量的混合积

1. 判断下列向量组是否共面:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=5\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=11\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=7\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{k}$;

(4) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$.

解: (1) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix}=88\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(2) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=25\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(3) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -51 & \\ 7 & -5 & 8 \end{vmatrix}=-40\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(4) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面.

2. 计算由向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所张成的平行六面体的体积:

(1) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$;

(4) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.

解: (1) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|=15.$

(2) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{matrix}\right\|=|-1|=1.$

(3) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|=|-1|=1.$

(4) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{matrix}\right\|=1.$

3. 确定下列四点是否共面:

(1) $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$;

(2) $A(3,-2,1)$, $B(2,0,-1)$, $C(-1,-4,5)$, $D(3,-2,4)$;

(3) $A(1,2,-3)$, $B(3,5,-1)$, $C(0,-2,7)$, $D(2,1,3)$;

(4) $A(1,0,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(1,2,-2)$, $D(2,0,-21)$.

解: 要确定 A,B,C,D 四点是否共面, 只须确定 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 这三个向量是否共面. 所以只须看 $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ 是否为零.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,4)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=0,\quad \text{共面.}$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-2,4)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&2&-2\\-4&-2&4\\0&0&3\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad \text{不共面.}$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(2,3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,10)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,6)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&3&2\\-1&-4&10\\1&-1&6\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad \text{不共面.}$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(1,0,-22)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&2&-3\\1&0&-22\end{vmatrix}=45\neq 0,\quad \text{不共面.}$$

4. 确定以 A, B, C, D 为顶点的四面体的体积:

(1) $A(-1,0,1)$, $B(-2,1,4)$, $C(1,3,-3)$, $D(-2,-1,3)$;

(2) $A(2,-1,1)$, $B(5,4,4)$, $C(2,3,-1)$, $D(4,1,2)$;

(3) $A(1,0,2)$, $B(1,-1,0)$, $C(2,2,-1)$, $D(3,1,0)$;

(4) $A(2,2,-1)$, $B(1,2,-2)$, $C(2,-2,1)$, $D(1,1,1)$.

解: (1) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3,-4)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ -1 & -1 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(3,5,3)$. $\overrightarrow{AC}=(0,4,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,2,1)$,

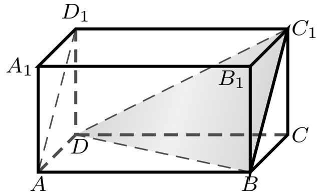
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}3 & 5 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{|-20|}{6}=\frac{10}{3}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(2,1,-2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-4,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{5}{3}.$$



第 5 题图

5. 如图, 已知长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$, $|AB|=4$, $|AD|=|AA_1|=2$. 求

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离;

(2) 直线 AD_1 与平面 C_1BD 的距离.

解: 设 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的单位向量是 $\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}$, 建立直角坐标系 $[D;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]$. 则

$$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2),\quad \overrightarrow{DB}=(2,4,0),\quad \overrightarrow{DC_1}=(0,4,2).$$

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}2&0&2\\2&4&0\\0&4&2\end{vmatrix}\right|}{|(8,-4,8)|}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

(2) 因为 $AD_1//BC_1$, 所以 $AD_1//$ 平面 C_1BD. 故 AD_1 上任一点到平面 C_1BD 的距离即为 AD_1 到平面 C_1BD 的距离.

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}2&0&0\\2&4&0\\0&4&2\end{vmatrix}\right|}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

6. 设 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3}$. 求证

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}).$$

证明: $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3})\times(a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3})=a_1b_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+a_1c_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+b_1a_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}+b_1c_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}+c_1a_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}+c_1b_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2}=(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}$,

$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=[(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}]\cdot(a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3})=[(a_1b_2-b_1a_2)c_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})-[(a_1c_2-c_1a_2)b_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})+[(b_1c_2-c_1b_2)a_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$.

(只要利用三阶行列式的定义便可计算得).

7. 求证: $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

证明: $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\Big||\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\cos\langle\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle\Big|\leq|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

8. 证明雅可比恒等式:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})+\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0.$$

证明: 由命题 7.7 知:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c},$$

$$\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b},$$

相加即得结论.

9. 证明: 空间中四点 A, B, C, P 共面的充分必要条件是, 它们所对应的位置向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p}$ 满足

$$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0.$$

证明: A,B,C,P 共面当且仅当 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面. 已知

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP},$$

故

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\quad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\quad \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p}.$$

因此 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})=0$, 当且仅当

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0.$$

10. 证明

(1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$;

(2) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{a}$.

证明: (1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=-(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=-[\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\overrightarrow{d}-\overrightarrow{d}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}]=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$.

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b}-[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$.

11. 证明对任意四个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 总有
$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}+(\vec{c},\vec{a},\vec{d})\vec{b}+(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}+(\vec{b},\vec{a},\vec{c})\vec{d}=0.$

证明: 由第 10 题结论可得

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a},$$

移项后再适当改变混合积中向量次序即可证得.

12. 证明下列向量恒等式:

(1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$;

(2) $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=-2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$;

(3) $(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$;

(4) $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$.

证明: (1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a})=[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=[(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$.

(2) $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d})=-(\vec{a}\times\vec{d})\times(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\vec{d}+(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d})=-(\vec{b}\times\vec{d})\times(\vec{c}\times\vec{a})=-(\vec{c},\vec{a},\vec{b})\vec{d}+(\vec{c},\vec{a},\vec{d})\vec{b}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{c},\vec{d},\vec{a})\vec{b}-(\vec{c},\vec{d},\vec{b})\vec{a}$, 所以

$$\begin{aligned}&(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})\\&=-2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}.\end{aligned}$$

(3) $(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}$,
$(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{a}\cdot\vec{d}$,
$(\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$,

将上述等式左 右两端分别相加则:

$$(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0.$$

(4) $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d}$,
$(\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{d}$,
$(\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}$,

将上述等式左、右两端分别相加得:

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$$
$$=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}).$$

13. 证明对于任意向量 r_i $(i=1,2,3,4)$, 下式成立:

$$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=0.$$

证明: 根据定理 8.7, $(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})\cdot(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})$,
$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})\cdot(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})$,
$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})\cdot(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})$,
将上述等式的左、右两端分别相加后得到结论.

14. 证明 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面.

证明: 因为 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=0$, 但由 12 题的 (1) 知: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})^2$, 所以 $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$ 共面.

15 设 a,b,c 为非负实数, 且 $a+b+c<\dfrac{1}{2}$. 证明由 $\overrightarrow{p}=(1-a,0,0)$, $\overrightarrow{q}=(0,1-b,0)$, $\overrightarrow{r}=(0,0,1-c)$ 构成的平行六面体的体积大于 $\dfrac{1}{2}$.

解: 设此平行六面体的体积为 V, 则

$$V=|(\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{q})\cdot\overrightarrow{r}|=\left\|\begin{matrix}1-a&0&0\\0&1-b&0\\0&0&1-c\end{matrix}\right\|=(1-a)(1-b)(1-c).$$

因为

$$(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab\geq 1-(a+b)>0,$$

所以

$$(1-c)(1-b)(1-a)=(1-b)(1-a)-c(1-b)(1-a)\geq 1-a-b-c>\frac{1}{2}.$$

16 设 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$. 利用拉格朗日恒等式证明:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

解: 由拉格朗日恒等式可得

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2.$$

而由

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

算出

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2,\\&\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2),\\&(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2=&(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\\&-[(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2],\end{aligned}$$

即有

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

而且等号成立当且仅当 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

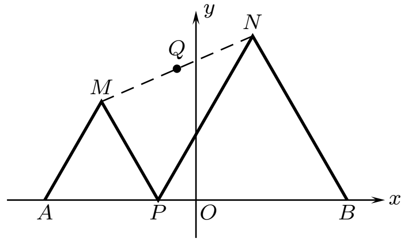
*§ 9 平面曲线的方程

1. 三角形 ABC 底边的两个端点为 $B(-3,0)$, $C(3,0)$. 顶点 A 在直线 $7x-5y-35=0$ 上移动, 求三角形重心的轨迹.

解: 设重心的坐标为 (x,y), 则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{x_A}{3} \\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{y_A}{3}, \end{cases}\qquad 即\ \begin{cases} x_A=3x \\ y_A=3y. \end{cases}$$

而 (x_A,y_A) 满足方程 $7x-5y-35=0$, 代入即得 $21x-15y-35=0$.



第 2 题图

2. 在长为 l 的线段 AB 上有一动点 P. 在 AB 的同侧, 以 AP, PB 为边分别作等边三角形 AMP 和 BNP. 求 MN 的中点 Q 的轨迹.

解: 以 AB 的中点 O 为原点, 以 AB 为 x 轴, 建立直角坐标系 $[O;\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}]$. 于是

$$A\left(-\frac{l}{2},0\right),\quad B\left(\frac{l}{2},0\right),\quad P(t,0),\quad \left(-\frac{l}{2}<t<\frac{l}{2}\right).$$

则

$$M\left(\frac{t-\dfrac{l}{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{l}{2}\right)\right),\quad N\left(\frac{t+\dfrac{l}{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}-t\right)\right).$$

所以 MN 的中点 Q 的坐标为:

$$\begin{cases} x_Q=\dfrac{t}{2} & \left(-\dfrac{l}{2}<t<\dfrac{l}{2}\right) \\ y_Q=\dfrac{\sqrt{3}}{4}l. \end{cases}$$

即 Q 点的轨迹方程为: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}l\ \left(-\dfrac{l}{4}<x<\dfrac{l}{4}\right)$.