阅读 2：极限的文学意境

庄子的 “一尺之棰，日去其半，万世不竭”作为极限的例子，非常形象地描述了一个无限的变化过程，最后的归宿为 0 这样一个现象。

我国著名数学家徐利治先生在课堂上讲极限的时候，总要引用李白的《送孟浩然之广陵》诗：

故人西辞黄鹤楼，
烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，
唯见长江天际流。

“孤帆远影碧空尽”文学意境

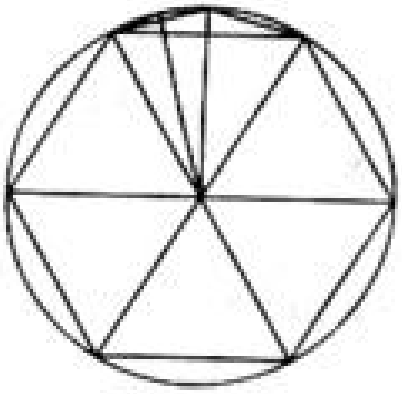
“孤帆远影碧空尽”一句，描述了“孤帆”变化的动态意境：逐渐远去（远影）最后消失在地平线上（碧空尽），即极限为 0。

“孤帆远影碧空尽”与“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的差别在于：前者变化过程是连续的， 后者则是离散的。“孤帆远影碧空尽”，不再是数列的极限，而是经历了航行中无数时刻的连续变化过程。用数学符号写出来则是：

$$\text{当} t \to t_0 \text{时}, \quad f(t) \to 0.$$

这里t_0表示“孤帆”消失的那一时刻，$f(t)$表示在时刻t可以观察到的“孤帆”大小。 在$t \to t_0$ 的过程中，时间连续变化，经历了无限多的时刻，“孤帆”经历的是连续变量的极限。

中国古代数学家刘徽(生于公元 250 年左右)在“割圆术”中运用圆内接正多边形面积的极限过程求圆周率，谓之“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，把极限的动态过程及其结果，描写得十分透彻和传神。



刘徽与他的割园术