阅读 1：数集的演进

在人类的进化初期，最早认识到的是自然数，它是一个一个数出来的。要知道，即便是最简单的自然数，也是一个高度抽象的概念，如 1 可以指一个人，也可以指一把椅子，是实物的抽象。

什么是自然数？老子在《道德经》就有说法：

“道生一， 一生二， 二生三， 三生万物。”

这里包含了自然数的三个特征，需要我们逐一认识。

1. 自然数从 0 开始；“道”相当于 0。

2. 自然数一个接一个；由 0 到 1，由 1 到 2，再由 2 到 3，后者是前者的继续。一个接一个，是自然数的特征。以后的分数（有理数）、实数就没有这样的特征了。

3. 自然数系是无限的。三生万物，这里的“万”泛指无穷之多，永无穷尽。

这三个特征也是数学归纳法的理论基础。

德国数学家克罗尼克（Leopold Kronecker，1823－1891）：自然数是“自然”造的。其他数系都是人为的。

自然数集一般用记号$\mathbb{N}$表示，即

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

在自然数集中可以进行加法运算（自然也能进行乘法运算），但是要进行减法运算就会出问题了，这是由于自然数集本身的原因造成的。为了使减法能够进行，人们将自然数发展成了整数。整数集用$\mathbb{Z}$表示：

$$\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

自然数集有一个很好的性质，就是它的任何一个非空子集都一定有最小数，整数集就没有这个性质了，这是数系扩大的必然结果。但自然数集和整数集有一个共同的特征，就是它们都是离散的数集。

在整数集中，加减乘法都能进行运算，但除法还是不行。一个整数除另一个整数不一定是整数（除不尽），有理数的出现也就很自然了。

有理数就是分数，也可以表示成有限小数，或者无限循环小数。特别注意，分数和小数有着完全不同的数学含义，人们最早认识的是分数，就是几分之几，意义很明确。有理数全体称为有理数集，记为$\mathbb{Q}$，

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle|\, p,q\in\mathbb{Z}；\ p,q\text{互质且}\ q\neq 0\right\}$$

有理数是稠密的，即在任何两个有理数之间一定还有有理数。理由很简单：设$a,b\in\mathbb{Q}$，则$c=(a+b)/2$在a,b之间，且仍然是有理数。这样有理数集就不具备离散性了。从代数学的角度看，有理数集已经是一个数域，对加减乘除运算都封闭，尽管如此，人们还是发现了问题，就是在有理数集中进行开方运算仍然不行，一些非常简单的方程，如$x^2=2$在有理数集中就没有解。因此有理数还有“缝隙”，应该还存在“无理数”。

无理数的发现是缘于$\sqrt{2}$的出现，是古希腊数学家研究正方形时发现边长为 1 的正方形的对角线的长度$\sqrt{2}$无法公度（以前人们认为所有的数都是可以公度的，是有理数），由此导致了第一次数学危机。

我们把有理数与无理数的全体组成的集合称为实数，记为$\mathbb{R}$。

有理数可以表示成有限小数和无限循环小数，而无理数则是无限不循环小数，除了$\sqrt{2}$,如 π, e等都是无理数。

在微积分出现后，数学家通过近200年的努力，终于建立起了严密的实数理论。在引进了数轴后，实数集就与数轴上的点一一对应了，这样实数全体就不存在“缝隙”了。实数集不仅对加减乘除运算封闭，对开方运算封闭，而且对极限运算也封闭。实数的这个性质称为“**完备性**”。