期中考试参考答案

一. 微分

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{\frac{y}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = (2x-y)e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = xe^{\frac{y}{x}}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = (2x-y)e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x + xe^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$$

2.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial (y^2 x)}{\partial x} = 2xy\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \\
&\qquad + y^2\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \\
&\qquad + y^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot(2xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot y^2\right] + \\
&\qquad + y^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot(2xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y^2\right] \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + 2xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
&= 2y\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

3.

对于 $z = xy\sin z$ 两边同时求全微分，得

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y\cdot\sin z + y(\cos z)\mathrm{d}z$$

因此

$$(1 - y\cos z)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \sin z\cdot\mathrm{d}y,$$

从而

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{1-y\cos z}\cdot\mathrm{d}x + \frac{\sin z}{1-y\cos z}\cdot\mathrm{d}y.$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y \cos z} \text{ 且 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin z}{1 - y \cos z} \; .$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin z}{1 - y \cos z}\right) \\
&= \frac{(\cos z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (1 - y \cos z) - \sin z \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1 - y \cos z)}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{(\cos z) \cdot \frac{1}{1 - y \cos z} \cdot (1 - y \cos z) + \sin z \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\cos z)}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - \sin z \cdot y \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - \sin^2 z \cdot y \cdot \frac{1}{1 - y \cos z}}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - y \cos^2 z - y \sin^2 z}{(1 - y \cos z)^3} \\
&= \frac{\cos z - y}{(1 - y \cos z)^3}.
\end{aligned}$$

如果计算 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ ，则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1 - y \cos z}\right) \\
&= \frac{-\frac{\partial}{\partial y}(1 - y \cos z)}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(y \cos z)}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - y \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - y \cdot \sin z \cdot \frac{\sin z}{1 - y \cos z}}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - \sin^2 z \cdot y \cdot \frac{1}{1 - y \cos z}}{(1 - y \cos z)^2} \\
&= \frac{\cos z - y \cos^2 z - y \sin^2 z}{(1 - y \cos z)^3} \\
&= \frac{\cos z - y}{(1 - y \cos z)^3}.
\end{aligned}$$

这个结果也说明了对于我们这里的情况，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

部分同学也计算了 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 这个的计算如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-y\cos z}\right) \\
&= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(1-y\cos z)}{(1-y\cos z)^2} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(y\cos z)}{(1-y\cos z)^2} \\
&= \frac{y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\cos z)}{(1-y\cos z)^2} \\
&= \frac{-y\cdot(\sin z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(1-y\cos z)^2} \\
&= \frac{-y\cdot(\sin z)\cdot\frac{1}{1-y\cos z}}{(1-y\cos z)^2} \\
&= \frac{-y\cdot(\sin z)}{(1-y\cos z)^3}
\end{aligned}$$

二. 积分

4.

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \mathsf{d}y \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,\mathsf{d}x &= \int_1^3 \mathsf{d}y \left[\frac{5yx^3}{3} - 2y^3x\right]\Big|_2^5 \\
&= \int_1^3 \mathsf{d}y \left[\frac{5y\cdot 5^3}{3} - 2y^3\cdot 5 - \frac{5y\cdot 2^3}{3} + 2y^3\cdot 2\right] \\
&= \int_1^3 195y - 6y^3 \;\; \mathsf{d}y \\
&= \left[\frac{195y^2}{2} - \frac{6y^4}{4}\right]\Big|_1^3 \\
&= \frac{195}{2}(3^2 - 1^2) - \frac{3}{2}(3^4 - 1^4) \\
&= 780 - 120 \\
&= 660.
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y &= \int_0^1 \mathsf{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} y\,\mathsf{d}y \\
&= \int_0^1 \mathsf{d}x \left[\frac{y^2}{2}\right]\Big|_x^{\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{2x-x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\,\mathsf{d}x \\
&= \int_0^1 x - x^2\,\mathsf{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathsf{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\,\mathsf{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathsf{d}y \left[\frac{yx^2}{2}\right]\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y}{2}(y-y^4)\,\mathsf{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{6}-\frac{y^6}{12}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{768}\right) \\
&= \frac{128-64-16+1}{768} \\
&= \frac{49}{768}.
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \cos(x+y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y &= \int_0^{\pi} \mathsf{d}x \int_x^{\pi} \cos(x+y)\,\mathsf{d}y \\
&= \int_0^{\pi} \mathsf{d}x\,[\sin(x+y)]\Big|_x^{\pi} \\
&= \int_0^{\pi} -\sin x - \sin(2x)\,\mathsf{d}x \\
&= \left[\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\
&= -1+\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

8.

$$
\int_0^1 \mathsf{d}x \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathsf{d}y = \int_0^2 \mathsf{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,\mathsf{d}x + \int_2^3 \mathsf{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,\mathsf{d}x\ .
$$

9.

对于积分 $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ ，这是个广义积分，并且 $x=0$ 是瑕点。我们将 $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 写成

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} + \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}.$$

下面我们来分别判断 $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 和 $\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 的敛散性。

当 $x\to 0$ 时，注意到

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} \Big/ \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{e^{2x^3}-1}{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^3}-1}{x^3}}}$$

根据洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3}-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3}\cdot 6x^2}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0} e^{2x^3} = 2.$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} \Big/ \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0\ .$$

根据比值判别法，$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 与 $\int_0^1 \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性。 根据直接计算可知（因为 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的原函数可以直接写出），$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的。因此 $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 也是收敛的。

当 $x\to\infty$ 时，注意到

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}} \Big/ \frac{x}{\sqrt{e^{2x^3}}} = 1\ .$$

因此 $\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 和 $\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}}} = \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^{x^3}}$ 具有相同的敛散性。

取 N 足够大，使得当 $x>N$ 时，$e^{x^3}>x^3$ ，从而 $\frac{x}{e^{x^3}} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. 由于 $\int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛，根据比较判别法，$\int_N^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^{x^3}}$ 收敛，从而 $\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^{x^3}}$ 收敛，进而 $\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 收敛。

综上所述，$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x^3}-1}}$ 收敛。

三. 应用

10.

D 的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{2x} - x \, \mathsf{d}x \\
&= \left[\sqrt{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_0^2 \\
&= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

D 绕 x 轴旋转得到的体积为

$$
\begin{aligned}
V_x &= \int_0^2 \pi \left[\left(\sqrt{2x} \right)^2 - x^2 \right] \, \mathsf{d}x \\
&= \pi \int_0^2 2x - x^2 \, \mathsf{d}x \\
&= \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^2 \\
&= \pi \left(4 - \frac{8}{3} \right) \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

D 绕 y 轴旋转得到的体积为

$$
\begin{aligned}
V_y &= \int_0^2 \pi \left[y^2 - \left(\frac{y^2}{2} \right)^2 \right] \, \mathsf{d}y \\
&= \pi \int_0^2 y^2 - \frac{y^4}{4} \, \mathsf{d}y \\
&= \pi \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{20} \right] \Bigg|_0^2 \\
&= \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{32}{20} \right) \\
&= \frac{16\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

11.

根据题意，体积 V 为

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-a}^{a} \\
&= \int_{-a}^{a} 2ax^2 + \frac{2a^3}{3} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2ax^3}{3} + \frac{2a^3 x}{3}\right]\Bigg|_{-a}^{a} \\
&= \frac{2a}{3} \cdot 2a^3 + \frac{2a^3}{3} \cdot 2a \\
&= \frac{8a^4}{3}.
\end{aligned}$$

12.

该题有多种解法，这里给出两种解法。

解法一：

先求驻点。 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$$

以及

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12\ .$$

在区域 D 中的驻点只有一个 ，即为 $(1,2)$ 。

在该驻点处，$f(1,2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$ 。

下面考虑 f 在边界上的最大值和最小值。

在 $x = 0$ ，$0 \leq y \leq 4$ 这段边界上， $f(x,y) = y^3 - 12y + 20$. 这是关于 y 的函数。在 $0 \leq y \leq 4$ 时候，考虑 $y^3 - 12y + 20$ 的最大值和最小值。 通过计算导数，可知其在 $0 \leq y \leq 4$ 上唯一驻点为 $y = 2$ 。通过估算一元函数 $y^3 - 12y + 20$ 在驻点 $y = 2$ 以及边界点 $y = 0$ 和 $y = 4$ 处的值，可知最小值在 $y = 2$ 处取得，此时对应的点为 $(0,2)$ ，其值为 $f(0,2) = 8 - 24 + 20 = 4$. 其最大值在 $y = 4$ 处取得，此时对应的点为 $(0,4)$ ，其值为 $f(0,4) = 4^3 - 12 \cdot 4 + 20 = 36$ 。

在 $x = 4$ ，$0 \leq y \leq 4$ 这段边界上， $f(x,y) = y^3 - 12y + 20 + 52$. 这是关于 y 的函数。在 $0 \leq y \leq 4$

时候，考虑 $y^3-12y+20+52$ 的最大值和最小值。 通过计算导数，可知其在 $0\le y\le 4$ 上唯一驻点为 $y=2$ 。通过估算一元函数 $y^3-12y+20+52$ 在驻点 $y=2$ 以及边界点 $y=0$ 和 $y=4$ 处的值，可知其最小值在 $y=2$ 处取得，此时对应的点为 $(4,2)$ ，其值为 $f(4,2)=8-24+20+52=56.$ 其最大值在 $y=4$ 处取得，此时对应的点为 $(4,4)$ ，其值为 $f(4,4)=4^3-12\cdot 4+20+52=88$ 。

在 $y=0$ ，$0\le x\le 4$ 这段边界上， $f(x,y)=x^3-3x+20$. 这是关于 x 的函数。在 $0\le x\le 4$ 时候，考虑 $x^3-3x+20$ 的最大值和最小值。 通过计算导数，可知其在 $0\le x\le 4$ 上唯一驻点为 $x=1$ 。通过估算一元函数 $x^3-3x+20$ 在驻点 $x=1$ 以及边界点 $x=0$ 和 $x=4$ 处的值， 可知其最小值在 $x=1$ 处取得，此时对应的点为 $(1,0)$ ，其值为 $f(1,0)=1-3+20=18$ 。 其最大值在 $x=4$ 处取得，此时对应的点为 $(4,0)$ ，其值为 $f(4,0)=4^3-3\cdot 4+20=72$ 。

在 $y=4$ ，$0\le x\le 4$ 这段边界上， $f(x,y)=x^3-3x+20+16$. 这是关于 x 的函数。在 $0\le x\le 4$ 时候，考虑 $x^3-3x+20+16$ 的最大值和最小值。 通过计算导数，可知其在 $0\le x\le 4$ 上唯一驻点为 $x=1$ 。通过估算一元函数 $x^3-3x+20+16$ 在驻点 $x=1$ 以及边界点 $x=0$ 和 $x=4$ 处的值，可知其最小值在 $x=1$ 处取得，此时对应的点为 $(1,4)$ ，其值为 $f(1,4)=1-3+20+16=34$ 。 其最大值在 $x=4$ 处取得，此时对应的点为 $(4,4)$ ，其值为 $f(4,0)=4^3-3\cdot 4+20+16=88$ 。

由于 $f(x,y)$ 具有连续的二阶导数，因此其最大值和最小值只能在驻点或者边界取到。考虑到各部分边界的局部最大/最小值点以及驻点处的 $f(x,y)$ 之值，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 88 ，在 $(4,4)$ 处取得。 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 2 ，在 $(1,2)$ 处取得。

解法二：

将 $f(x,y)$ 写为 $f(x,y)=G(x)+H(y)+20$ 的形式，其中 $G(x)=x^3-3x$ ， $H(x)=y^3-12y$ 。由于 $G(x)$ 只和 x 有关，$H(y)$ 只和 y 有关，并且区域 D 为标准的 $[0,4]\times[0,4]$ 矩形。为了求出 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值，只需要分别求出 $G(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大/最小值和 $H(y)$ 在 $[0,4]$ 上的最大/最小值即可。

对于一元函数 $G(x)=x^3-3x$ ，其在 $[0,4]$ 上的最大/最小值一定位于驻点上或者边界上（这里的边界就是两个点 0 和 4 ）。令 $G'(x)=0$ ，即 $3x^2-3=0$ 。可以算出在 $[0,4]$ 处 $G(x)$ 的唯一驻点 $x=1$ 。对 $G(x)$ 在驻点 $x=1$ 和两个边界点 $x=0$ 以及 $x=4$ 上分别估值，可知 $G(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值于 $x=4$ 处取得，最小值于 $x=1$ 处取得。

类似的， 对于一元函数 $H(y)=y^3-12y$ ，其在 $[0,4]$ 上的最大/最小值一定位于驻点上或者边界上（这里的边界就是两个点 0 和 4 ）。令 $H'(x)=0$ ，即 $3y^2-12=0$ 。可以算出在 $[0,4]$ 处 $H(x)$ 的唯一驻点 $y=2$ 。对 $H(y)$ 在驻点 $y=2$ 和两个边界点 $y=0$ 以及 $y=4$ 上分别估值，可知 $H(y)$ 在

$[0,4]$ 上的最大值于 $y=4$ 处取得，最小值于 $y=2$ 处取得。

综合对于 $G(x)$ 和 $H(y)$ 的讨论， $f(x,y)$ 的最大值在 $x=4, y=4$ 处取得，最小值在 $x=1, y=2$ 处取得。最大值为 $f(4,4)=88$ ，最小值为 $f(1,2)=2$ 。