1 《代数几何初步》期末考试试题

考试日期：2006 年 1 月 9 日，下午 13：00 − 15:00

本试题中曲线都是指复射影平面曲线。

试题 1 （15 分）计算下面两条曲线在圆点 $0 = (0,0)$ 的相交重数。

（1） $y^2 - x^3 = 0$;　　　（2） $x^2y^3 - y^4 + 2x^7 = 0$.

试题 2 （15 分，每题 5 分） $F = X^3 + X^2Z + Y^2Z$. 记 H_F 为其 Hessian。

（1）证明曲线 F 有唯一的奇点 $[0,0,1]$。求出该奇点的重数和所有切线方程。

（2）验证 $H_F = -8(3XY^2 + X^2Z + Y^2Z)$，且 F 有三个不同但共线的拐点。

（3）求出此奇异曲线的一个有理参数化。

试题 3 （15 分）设 C 是曲线 $X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$, $P = [0,0,1], Q = [0,1,0]$. 计算复向量空间 $L(3P)$ 的基。并证明存在 C 上的点 R 使得 $3P \equiv 2Q + R$.

试题 4 （20 分） $P = (0,1)$ 是椭圆曲线 $y^2 = x^3 + x + 1$ 上的整数点，求有理点 $2P$ 和 $3P$ 的坐标。这里加法的基点是无穷远处的拐点。

试题 5 （共 15 分，每题 5 分）设 C_λ 是 $y^2 = x^3 + x + \lambda$ 定义的椭圆曲线，$\lambda \in \mathbb{C}$. E 是椭圆曲线 $y^2 = x^3 + 3x^2 + x - 1$。

(1) 证明除一条椭圆曲线 D 外，其它椭圆曲线同构于某 C_λ，写出 D 的方程。

(2) 问 C_λ 同构于 C_μ 的条件是什么？

(3) λ 为多少时 C_λ 同构于 E？

试题 6 （10 分）亏格 $g \geq 2$ 的光滑曲线 C 称为是超椭圆的，如果 C 上存在 4 个不同点 p_1, p_2, p_3, p_4 使得 $p_1 + p_2 \equiv p_3 + p_4$. 证明次数 $d \geq 4$ 的光滑平面曲线 C 一定不是超椭圆的。

试题 7 （共 10 分，每题 5 分）设 4 次曲线 C_1, C_2 相交于 16 个不同点，C_3 是过其中 13 个点的 4 次曲线。

（1）证明要么 C_3 过所有 16 个交点，要么剩下的 3 点共线。

（2）如果 C_3 不过剩下的 3 点，那么过前面 13 个点的任意两条 4 次曲线 C_4, C_5 的剩余的 3 个交点都共线。

试题 8 （附加题，共 10 分，每题 5 分）设 C, D 是 n 次曲线，直线 L 与 C 相交于 n 个不同点，$L_1, \cdots, L_n$ 分别是 C 在这 n 个点处的切线。D 通过这 n 个点且与 C 在这 n 个点处相切（即与 C 有相同的切线）。证明

（1） D 的方程具有形式 $L^2A + L_1 \cdots L_n = 0$.

（2） C 和 $L_1, \cdots, L_n$ 的其它交点落在一条 $n-2$ 次曲线上。