1 《代数几何初步》习题集

设 $C\subset\mathbb{P}^2$ 是由 $F(X,Y,Z)=0$ 定义的不可约曲线. $\mu_p(C)$ 表示 C 在 p 点的重数。$f(x,y)=F(x,y,1)$.

习题 1 C 光滑。D 是 C 上的除子。

(1) 证明线性等价 $\equiv$ 是一个等价关系。

(2) $D\equiv 0$ 当且仅当存在非零有理函数 φ 使得 $D=\operatorname{div}(\varphi)$。

(3) 如果 $D\equiv D'$, 那么 $\deg D=\deg D'$.

(4) 如果 $D\equiv D'$, $D_1\equiv D_1'$, 那么 $D+D_1\equiv D'+D_1'$.

(5) 如果 $D\equiv D'$, 那么 $\ell(D)=\ell(D')$.

(6) 如果 $D\geq D'$, (即 $D-D'\geq 0$), 那么 $L(D')\subset L(D)$. 所以 $\ell(D)\geq\ell(D')$.

(7) $\ell(D)>0$ 当且仅当 D 线性等价于一个有效除子。

(8) 设 $\ell(D)>0$ 且 $\deg D=0$, 则 D 线性等价于 0。

(9) 设 $\ell(D)>0, 0\neq\varphi\in L(D)$. 证明 C 上最多只有有限个点 p 使 $\varphi\notin L(D-p)$. 所以最多除有限多个点 p 以外, $\ell(D-p)=\ell(D)-1$.

(10) $g(C)\geq 1$, p, $q\in C$. 如果 $p\equiv q$, 则 $p=q$.

习题 2 (1) $\dim(L(D+p)/L(D))\leq 1$.

(2) 如果 $D\geq D'$, $\dim\left(L(D)/L(D')\right)\leq\deg(D-D')$.

(3) 如果 $D\geq 0$, 那么 $\ell(D)\leq\deg D+1$.

习题 3 求出下述不可约曲线的奇点、奇点的重数及奇点处所有的切线方程。

(1) $F=XY^4+YZ^4+XZ^4$; (2) $F=X^2Y^3+X^2Z^3+Y^2Z^3$

习题 4 证明 C 在点 p 光滑当且仅当 C 上的任何有理函数 φ 都有表示 $\varphi=\frac{H}{G}|_C$, 其中 G 和 H 至少有一个在 p 点不为 0。(提示: 不妨设 $p=[0,0,1]$, 考虑函数 $\varphi=\frac{x}{y}|_C$)

习题 5 计算椭圆曲线 C_λ: $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda\neq 0$, 1 的 J-不变量。并证明 $C_\mu\cong C_\lambda$ 当且仅当 μ 是下述 6 个数之一:

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ 1/\lambda,\ (\lambda-1)/\lambda,\ 1/(1-\lambda),\ \lambda/(\lambda-1).$$

(提示: 判别式可以用根来计算。 $J(\lambda)=J(\mu)$ 是关于 μ 的 6 次多项式方程。)

习题 6 1) 证明 $y^2=x^5(x-1)$ 定义了一条有理曲线。并求有理多项式 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 使得 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是它的有理参数化. (提示: 考虑代换 $y=x^3t$)

2) 求参数化 $x=t^2-1, y=t^3-t$ 定义的有理曲线的方程 $f(x,y)=0$。

习题 7 C 是光滑三次曲线, p 是其上的一个点。问有多少过 p 的直线与 C 在某不同于 p 的点相切? (提示: p 是否为拐点答案不同。利用椭圆曲线上的群结构)

习题 8 * C 是光滑三次曲线, $\mathcal{O}$ 是其上一个拐点。用 $\oplus$ 表示 C 上以 $\mathcal{O}$ 为基点定义的加法。$P_1,\cdots,P_{3m}\in C$ 是 $3m$ 个的点. 证明 $P_1\oplus\cdots\oplus P_{3m}=\mathcal{O}$ 当且仅当存在 m 次曲线 D 使得 $D|_C=P_1+\cdots+P_{3m}$. 这里除子 $D|_C:=\sum_{P\in C}I_P(C,D)P$.

习题 9 ** 设 C_μ 的定义方程为 $X^3+Y^3+Z^3-3\mu XYZ=0$, $\mu^3\neq 1$. 证明 C_μ 光滑, 且它的 J-不变量为 $\dfrac{\mu^3(\mu^3+8)^3}{2^8(\mu^3-1)^3)}$.