

第四章 数值积分与数值微分

复合求积公式与 Romberg 算法

朱升峰

数学科学学院

华东师范大学

2026 年 5 月

目录

- 复合梯形公式
- 复合 Simpson 求积公式
- Romberg 求积公式

复合梯形公式

把区间 $[a, b]$ 等分, 分点 $x_k = a + kh (k = 0, 1, \dots, n-1)$, $h = \frac{b-a}{n}$, 在每个子区间上采用梯形公式则得

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_n(f).$$

记

$$T_n = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right],$$

称为复合梯形公式

定理 1

设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则复合梯形公式余项

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a, b).$$

证明：由梯形公式余项得

$$R_n(f) = I - T_n = \sum_{t=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right], \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$$

由于 $f(x) \in C^2[a, b]$, 且

$$\min_{0 \leq k \leq n-1} f''(\eta_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} f''(\eta_k)$$

由介值定理, $\exists \eta \in (a, b)$ 使

$$f''(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)$$

复合梯形公式余项

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \quad \square$$

复合梯形公式是收敛的:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b f(x) dx.$$

复合 Simpson 公式

把区间 $[a, b]$ 等分, 分点 $x_k = a + kh (k = 0, 1, \dots, n-1)$, $h = \frac{b-a}{n}$, 在每个子区间上采用 Simpson 公式得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &= \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + 4f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})] + R_n(f), \end{aligned}$$

称为复合 Simpson 公式。记

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_k) + 4f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \end{aligned}$$

复合 Simpson 公式的余项

由每段区间上 Simpson 公式的余项得

$$R_n(f) = I - S_n = -\frac{h}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k), \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

从而与复合梯形公式类似, 可证

$$R_n(f) = I - S_n = \frac{b-a}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

复合 Simpson 公式的收敛性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

例：对于函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ，给出 $n = 8$ 时的复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

并估计误差。

解：见exp41.m

x_i	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1.0
$f(x_i)$	1	0.997	0.990	0.977	0.954	0.936	0.909	0.877	0.841

复合梯形公式得

$$T_8 = 0.945691$$

复合 Simpson 公式得

$$S_4 = 0.946083$$

估计余项误差

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xt) dt$$

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} \cos(xt) dt = \int_0^1 t^k \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right) dt$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(k)}(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left| t^k \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right) \right| dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$$

复合梯形公式的误差

$$|R_8(f)| = |I - T_8| \leq \frac{h^2}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{3} = 0.434 \times 10^{-3}$$

复合 Simpson 公式的误差

$$|R_4(f)| = |I - S_4| \leq \frac{1}{2880} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1}{5} = 0.271 \times 10^{-6}$$

例: 计算积分 $\int_0^1 e^x dx$, 若用复合梯形公式, 区间 $[0, 1]$ 应分多少等份才能使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$? 若改用 Simpson 公式, 要达到同样精度, 区间应分多少等份?

解: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{(4)}(x) = e^x$, $b - a = 1$, 对复合梯形公式的余项有

$$|R_n(f)| = \left| -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 e \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}.$$

由此有 $n^2 \geq \frac{e}{6} \times 10^5$, $n \geq 212.85$, 可取 $n = 213$, 即将区间 $[0, 1]$ 分为 213 等份, 则可使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 。

若改用复合 Simpson 公式, 有

$$|R_n(f)| = \frac{b-a}{2880} h^4 \left| f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{2880} \left(\frac{1}{n} \right)^4 e \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5},$$

由此得

$$n \geq 3.707.$$

可取 $n = 4$, 此时实际上区间应分为 8 等份。

Romberg 求积公式

- 梯形公式的递推化
- Richardson 外推
- Romberg 算法

逐次分半法可提高求积精度

设将区间 $[a, b]$ 分为 n 等份, 如果将区间再二分一次, 分点增至 $2n + 1$ 个。每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 经二分增加了一个分点 $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, 用复合梯形公式得该子区间上的积分值为

$$\frac{h}{4} \left[f(x_i) + 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}) \right]$$

$h = \frac{b-a}{n}$ 为二分前的步长, 每个子区间上的积分值相加得

$$T_{2n} = \frac{h}{4} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

梯形法的递推化

递推公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

例：用梯形法的递推公式计算定积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

解：记 $T^{(k)} \equiv T_{2^k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)， $T^{(0)} = T_1 = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 0.920735492$ 。
不断对分，计算结果如表 (见[exp42.m](#))

k	$T^{(k)}$	k	$T^{(k)}$
1	0.939793285	6	0.946076943
2	0.944513522	7	0.946081539
3	0.945690864	8	0.946082687
4	0.945985030	9	0.946082975
5	0.946058561	10	0.946083046

外推技巧

- 复合梯形法递推公式：算法简单，编程方便
- 但收敛速度较慢（上例要达到 7 为有效数字精度，需要二分区间 10 次，即要分点 1025 个，计算量大）
- 梯形法的加速-Romberg (龙贝格) 算法

记 $I = \int_a^b f(x)dx$, $T(h) = T_n$, $T_{2n} = T(\frac{h}{2})$, 有

$$T(h) = I + \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \lim_{h \rightarrow 0} T(h) = T(0) = I$$

定理 2

设 $f(x) \in C^\infty[a, b]$, 记 $T_n = T(h)$, 则有

$$T(h) = I + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_l h^{2l} + \cdots,$$

其中系数 α_l 与 h 无关。

证明：略，可参考蒋尔雄等著《数值逼近》。

Richardson 外推算法

$$T(h) = I + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots = I + O(h^2)$$
$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + \alpha_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots + \alpha_i \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} + \cdots$$

对以上两式相减得

$$4T(h/2) - T(h) = 3I + (-3/4)\alpha_2 h^4 + (-15/16)\alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$\Rightarrow S(h) \equiv \frac{1}{3} \left(4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) \right) = I + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots = I + O(h^4)$$

$$\Rightarrow C(h) \equiv \frac{1}{15} \left(16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h) \right) = I + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots = I + O(h^6)$$

$$\Rightarrow R(h) \equiv \frac{1}{63} \left(64C\left(\frac{h}{2}\right) - C(h) \right) = I + O(h^8)$$

⋮

Romberg 算法

记 $T_0(h) = T(h)$, $T_1(h) = S(h)$, $T_2(h) = C(h)$, $T_3(h) = R(h)$, 以上过程统一写成

$$T_m(h) = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1} \left(\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}(h).$$

经 $m(m = 1, 2, \dots,)$ 次加速后

$$T_m(h) = I + \delta_1 h^{2(m+1)} + \delta_2 h^{2(m+2)} + \dots$$

此为Richardson 外推加速方法

令 $T_0^{(k)}$ 表示二分次后求得的梯形公式值, $T_m^{(k)}$ 表示序列 $\{T_0^{(k)}\}$ 的 m 次加速值

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

此为Romberg 求积算法

Romberg 求积算法

Step 1: 取 $k = 0, h = b - a, T_0^{(0)} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$.

令 $k \leftarrow 1$ (k 为区间 $[a, b]$ 的二分次数)

Step 2: $T_0(\frac{b-a}{2^k})$, 按递推公式计算 $T_0^{(k)}$

Step 3: 求加速值, 按公式逐个算出 T 表的第 k 行其余元素

$T_j^{(k-j)} (j = 1, 2, \dots, k)$

Step 4: 若 $|T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}| < \epsilon$, 则终止计算, 取 $T_k^{(0)} \approx I$; 否则令 $k \leftarrow k + 1$

T 表

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	\dots
0	$b - a$	$T_0^{(0)}$					
1	$\frac{b-a}{2}$	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$				
2	$\frac{b-a}{4}$	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$			
3	$\frac{b-a}{8}$	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$		
4	$\frac{b-a}{16}$	$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots

例

例：用 Romberg 算法计算定积分

$$\int_0^1 x^{3/2} dx$$

解：见exp43.m

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	0.5000000					
1	0.4267767	0.4023689				
2	0.4070181	0.4004319	0.4003027			
3	0.4018124	0.4000772	0.4000536	0.4000496		
4	0.4004634	0.4000137	0.4000094	0.4000087	0.4000086	
5	0.4001176	0.4000024	0.4000016	0.4000015	0.4000015	0.4000015

算到 $k = 5$ 的精度已相当高 (准确值为 0.4).