

第四章 数值积分与数值微分

朱升峰

数学科学学院
华东师范大学

2026 年 5 月

目录

- 数值积分概论
- Newton-Cotes 公式
- 复合求积公式
- Romberg 求积公式
- Gauss 求积公式
- 多重积分
- 数值微分

数值积分概论

- 数值积分的基本思想
- 代数精度
- 插值型求积公式
- 求积公式的余项
- 收敛性
- 稳定性

数值积分的基本思想

目标：计算定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

若找到原函数 $F(x)$, 则 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- 实际中有些被积函数的原函数不能用初等函数表示, 如

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, e^{-x^2}, \dots,$$

- 即使能求原函数, 有时计算困难, 如 $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$
- $f(x)$ 表达式未知, 只有观测或数值计算给出的数据表

数值积分的应用非常广泛: 科学与工程, 如解微分方程

积分中值定理：在积分区间 $[a, b]$ 内存在一点 ξ ，使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

点 ξ 未知，估算平均高度 $f(\xi)$ ，获得数值求积方法：
左矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(a)$$

右矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(b)$$

(中) 矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

$L_1(x)$: 线性插值

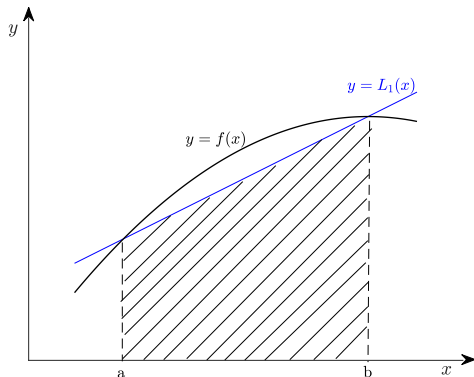


图: 梯形公式.

Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$L_2(x)$: 二次插值

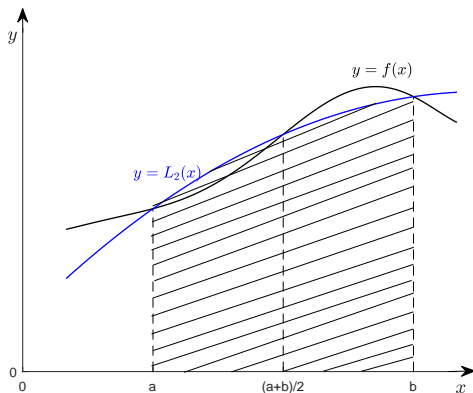


图: Simpson 公式.

机械求积公式

利用 $f(x)$ 的尽可能多的信息, 来获得尽可能好的 $f(\xi)$ 的近似值

将积分求值问题归结为被积函数值计算的数值积分方法称为 (机械) 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- x_k : 求积节点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

- A_k : 求积系数, 亦称 “权”

注

- 无需求原函数, 易于计算机实现
- 有些求积公式可能会包含导数等信息

定义 1

如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能精确地成立, 但对于 $m + 1$ 次多项式就不准确成立, 则称该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度的验证方法

- 1 把 $f(x) = 1, x, \dots, x^m$ 都代入求积公式, 依次精确成立;
- 2 把 $f(x) = x^{m+1}$ 代入, 求积公式不精确成立。

梯形公式, 左矩形公式, 右矩形公式, (中) 矩形公式的数值积分精度

- 左/右矩形公式: 0 次代数精度
- 梯形公式和中矩形公式: 1 次代数精度

代数精度

例：试确定 A_k ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度

$$I(f) \triangleq \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \triangleq I_n(x)$$

解：欲使求积公式具有 m 次代数精度，依次将 $f(x) = 1, x, \dots, x^m$ 代入求积公式，使其精确成立：

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k = b - a \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k = \frac{1}{2} (b^2 - a^2), \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^m = \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}) \end{cases}$$

这是确定参数 x_k 和 A_k 的代数问题。

代数精度

- 如果 x_k 和 A_k 都不确定, 则方程组是非线性的, 求解困难 ($n > 1$).
- 如果事先选定求积节点 x_k , 取 $m = n$, 求解线性方程组即可确定求积系数 (思考: 为什么存在唯一解)

对 $n = 0$

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0)$$

把 $f(x) = 1, x$ 代入使精确成立知

$$\begin{cases} A_0 = b - a \\ A_0 x_0 = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{2}(a + b)$, 得中矩形公式。把 $f(x) = x^2$ 代入有

$$A_0 x_0^2 = (b - a) \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \neq \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3),$$

说明中矩形公式对 $f(x) = x^2$ 不精确成立, 故代数精度为 1。

代数精度举例-机械求积公式

例：试确定系数 A_k ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0f(-1) + A_1f(0) + A_2f(1)$$

解：将 $f(x) = 1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = (b - a)/1 = 2 \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = (b^3 - a^3) / 3 = 2/3 \end{cases}$$

解得 $A_0 = 1/3, A_1 = 4/3, A_2 = 1/3$ 。所以求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

将 $f(x) = x^3$ 代入可得公式左边 = 右边 = 0，公式精确成立。将 $f(x) = x^4$ 代入可得：公式左边 \neq 右边，公式不精确成立。所以此求积公式具有 3 次代数精度。

代数精度举例-非机械求积公式

例：形如

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0f(0) + A_1f(1) + B_0f'(0)$$

的求积公式, 试确定系数 A_0, A_1, B_0 , 使公式具有尽可能高的代数精确度。

解：当 $f(x) = 1$ 时, 得

$$A_0 + A_1 = \int_0^1 1 dx = 1$$

当 $f(x) = x$ 时, 得

$$A_1 + B_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

当 $f(x) = x^2$ 时, 得

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

解得 $A_1 = \frac{1}{3}, A_0 = \frac{2}{3}, B_0 = \frac{1}{6}$, 于是有

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

插值型求积公式

性质: 任意具有 $m(\geq 0)$ 次代数精度的机械求积公式一定满足

$$\sum_{i=0}^n A_i = A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a$$

将 $f(x) = 1$ 代入求积公式, 使其精确成立即言。

用插值多项式代替 $f(x)$, 得到的求积公式就是**插值型求积公式**

设求积节点为 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, 若 $f(x_i)$ 已知, 则可构造 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x)f(x_k),$$

其中 $l_k(x)$ 是 x_k 的插值基函数。

插值型求积公式

$L_n(x)$ 的原函数容易求出, 取

$$I_n = \int_a^b L_n(x) dx$$

作为

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

的近似值, 这样的求积公式

$$I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

称为插值型的, 求积系数

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx,$$

$k = 0, 1, \dots, n.$

余项

求积公式余项

$$R[f] := \int_a^b [f(x) - L_n(x)] dx = \int_a^b R_n(x) dx,$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

性质: 插值型求积公式具有至少 n 次代数精度。

定理 2

下面的求积公式具有至少 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

求积公式的收敛性

定义 3

如果求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

其中 $h = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, 则称该求积公式是**收敛**的。

定义 4

对任意的 $\epsilon > 0$, 若 $\exists \delta > 0$, 只要 $|f(x_k) - \tilde{f}_k| \leq \delta$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 就有

$$|I_n(f) - I_n(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=0}^n A_k [f(x_k) - \tilde{f}_k] \right| < \epsilon,$$

成立, 则称求积公式是**稳定**的。

Newton-Cotes 公式

把区间 $[a, b]$ n 等分, 步长 $h = (b - a)/n$, 取等距节点 $x_k = a + kh$ 构造插值型求积公式

$$I_n = (b - a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k),$$

称为Newton-Cotes (牛顿-科特斯) 公式, $C_k^{(n)}$ 称为Cotes 系数。

引进变换 $x = a + th$, 则

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{b - a} \int_a^b l_k(x) dx = \frac{h}{b - a} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - j}{k - j} dt = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (t - j) dt$$

定理 5

n 阶 $N-C$ 公式至少有 n 次代数精度

定理 6

当 n 为偶数时, N-C 公式至少有 $n + 1$ 次代数精度

证明: 只要验证当 n 为偶数时, N-C 公式对 $f(x) = x^{n+1}$ 的余项为 0. 由 $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, 按余项公式从而

$$R[f] = \int_a^b \prod_{j=0}^n (x - x_j) dx$$

做变换 $x = a + th$, 有

$$R[f] = h^{n+2} \int_0^n \prod_{j=0}^n (t - j) dt$$

若 n 为偶数, 则 $\frac{n}{2}$ 为整数, 再令 $t = u - \frac{n}{2}$, 进一步有

$$R[f] = h^{n+2} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \prod_{j=0}^n \left(u + \frac{n}{2} - j\right) du = h^{n+2} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \prod_{j=-n/2}^{n/2} (u - j) du$$

因被积函数是奇函数, $R[f] = 0$, 证毕。

N-C 公式

- 梯形公式 $n = 1$

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$$

- Simpson 公式 $n = 2$, 也称抛物线公式

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{6}, C_1^{(2)} = \frac{4}{6}, C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$$

$n = 2$ 为偶数, 代数精度至少为 3, 事实上, 取 $f(x) = x^4$,

$$\int_a^b x^4 dx = \frac{1}{5}(b^5 - a^5) \neq \frac{b-a}{6} \left(b^4 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 + a^4 \right)$$

- Cotes 公式 $n = 4$

$$C = \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

- Cotes 系数可以查表获得
- Cotes 系数与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 无关
- 当 n 较大时, Runge 现象存在, 求积公式不收敛
- 当 $n \geq 8$ 时, Cotes 系数出现负值, 公式不稳定

定理 7

若 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则梯形公式的余项有误差估计

$$R[f] = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

证明:

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b), \quad a < \xi < b$$

其中 ξ 是依赖于 x 的函数, 两边积分得

$$R(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) dx$$

因 $f''(\xi)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $(x-a)(x-b)$ 在 $[a, b]$ 上非正, 由积分中值定理

$$\begin{aligned}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx &= f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b)dx, \quad \eta \in (a, b) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{6} f''(\eta), \quad a < \eta < b\end{aligned}$$

因此,

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad a < \eta < b. \quad \square$$

定理 8

若 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则抛物线公式的余项有误差估计

$$\begin{aligned}R[f] &= \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)\end{aligned}$$

证明: 已知抛物线求积公式的代数精确度是 3, 构造三次插值多项式 $P_3(x)$ 满足

$$P_3(a) = f(a), P_3(b) = f(b), P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

由插值误差

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b), \quad a < \xi < b$$

两边从 a 到 b 积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_3(x) dx = \frac{1}{4!} \int_a^b f^{(4)}(\xi) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx$$

$P_3(x)$ 是三次多项式, 故对抛物线求积公式是精确成立的, 即

$$\begin{aligned} \int_a^b P_3(x) dx &= \frac{b-a}{6} \left(P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b) \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \end{aligned}$$

$$R[f] = \frac{1}{4!} \int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx$$

根据假设, $f^{(4)}(\xi)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 而且当 $x \in [a, b]$ 时,
 $(x-a)(x - \frac{a+b}{2})^2(x-b) \leq 0$, 利用积分中值定理, 总存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx \\ &= f^{(4)}(\eta) \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx \\ &= -\frac{(b-a)^5}{120} f^{(4)}(\eta), \quad a < \eta < b \end{aligned}$$

因此抛物线求积公式的截断误差是

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad a < \eta < b \quad \square$$