

第四周 上机

作业要求:

- 采用北太天元科学计算软件编程
- 将 .m 文件作为附件发送至: 52300155002@stu.ecnu.edu.cn
- 邮件主题为: code01-学号-姓名, 如: code01-12345678-张三
- 在每个 M 文件的第一行添加注释语句: % 学号-姓名

1. (Lagrange插值) 已知下列插值数据

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|
| x_i | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| y_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

作函数 $y = \sqrt{x}$ 的7次Lagrange插值多项式, 画出原函数和插值多项式的图形, 文件命名code01.m

提示:

- 提交作业时, 不需要给出 $L_7(x)$ 的具体表达式
- 画图用函数plot, 取 $[0, 49]$ 上的等距离散点, 步长为 0.2
- 函数prod(x)实现对向量x的所有分量连乘
- 参考程序: exp22.m

2. (分段三次Hermite插值收敛阶验证) 对

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

在 $[0, 1]$ 引入节点 $x_k = kh (k = 0, 1, \dots, N; h = 1/N)$ 分成 N 等分。已知节点上的函数值和导数值, 考虑分段三次Hermite插值 $I_h(x)$, 由收敛性分析得

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - I_h(x)| = O(h^4).$$

取 $N = 2^i (i = 1, 2, \dots, 7)$, 计算各网格下的插值误差, 从数值上画出误差关于 h 的曲线图 (对数图), 验证4阶收敛。

要求与提示:

- (1) 程序文件命名为code02a.m
- (2) 注意到若对分段插值函数 $I_h(x)$ 有

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - I_h(x)| = O(h^\alpha);$$

我们就说 α 阶收敛。记 $e_h = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - I_h(x)|$, 则存在 $C > 0$ (与 h 无关) 使得

$$e_h = O(h^\alpha) = Ch^\alpha.$$

两边取自然对数得

$$\ln e_h = \alpha \ln h + \ln C,$$

即 $\ln e_h$ 关于 $\ln h$ 应是斜率为 α 的线性函数。

- (3) 画“对数图”用命令：`loglog`。
- (4) 对分段三次Hermite插值， $\alpha = 4$ 。所画的误差曲线图应与斜率为4的曲线平行。
- (5) 参考程序为`code02aModel.m`和`exp26.m`。
3. (三次样条插值) 已知下列插值数据

| | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| x_i | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
| y_i | 0.98 | 0.92 | 0.81 | 0.64 | 0.38 |

试用三次样条函数 $S(x)$ (满足自然边界条件 $S''(0.2) = S''(1.0) = 0$) 对数据进行插值, 画出三次样条函数图像, 输出每段上样条函数的系数。

要求与提示:

- (1) 程序文件命名为`code02b.m`
- (2) 要求画图时取 $[0.2, 1.0]$ 上的等距离散点, 每小段分为50等分。
- (3) 按下面的要求输出各区间上的三次多项式的系数。将 $S(x)$ 写成如下形式:

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_j}{h_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

屏幕上输出系数, 每行代表一个三次多项式

- (4) 输出系数参考程序 `exp27.m`; 画图参考程序`exp28.m`