

## 2.6 三次样条插值

朱升峰

数学科学学院

华东师范大学

2026 年 3 月

# 三次样条函数

- 分段低次插值函数光滑性较差
- 二阶连续导数的需求

(三次) 样条曲线在连接点上要求二阶导数连续。

## 定义 1

若函数  $S(x) \in C^2[a, b]$ , 在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是三次多项式, 其中  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  是节点, 则称  $S(x)$  是节点上的**三次样条函数**。若  $y_j = f(x_j) (j = 0, 1, \dots, n)$ , 且

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

称  $S(x)$  : **三次样条插值函数**。

$S(x)$  在每个小区间  $[x_j, x_{j+1}]$  上要确定 4 个**待定系数**, 共有  $n$  个小区间, 应确定  $4n$  个参数。

# 三次样条函数

$S(x)$  在节点  $x_j (j = 1, 2, \dots, n-1)$  有连续性条件

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0).$$

确定  $S(x)$ , 需  $4n$  个条件: 已有  $3(n-1) + (n+1) = 4n - 2$  个, 还需 2 个。  
通常加在端点  $a = x_0$  和  $b = x_n$  施加两个边界条件。

- 已知两端一阶导数值:

$$S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$$

- 已知两端二阶导数值:

$$S''(x_0) = f''(x_0), S''(x_n) = f''(x_n)$$

- 当  $f(x)$  是以  $x_n - x_0$  为周期的周期函数时, 要求  $S(x)$  也是周期函数, 满足

$$S(x_0 + 0) = S(x_n - 0), S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0), S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$$

(注意  $y_0 = y_n$ , 正好  $4n$  个条件)

# 样条插值函数

- **方法一**：利用分段三次 Hermite 插值表达式（利用节点上函数值和待求的导数值  $m_j$ ），然后用节点上二阶导数连续性得到线性方程组并解出导数值）
- **方法二**：利用  $S(x)$  的二阶导数  $S''(x_j) = M_j (j = 0, 1, \dots, n)$  表达  $S(x)$

**法二**：由于  $S(x)$  在  $[x_j, x_{j+1}]$  上是三次多项式，故  $S''(x)$  在  $[x_j, x_{j+1}]$  是线性函数，可表示为

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}. \quad (1)$$

积分两次并利用  $S(x_j) = y_j$  和  $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ ，可定出  $C_1x + C_2$  的积分常数  $C_1$  和  $C_2$ （采用 Lagrange 插值基函数方法），得三次样条

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left( y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left( y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_j}{h_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

# 三次样条

对  $S(x)$  求导得

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j;$$

进而

$$S'(x_j + 0) = -\frac{h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

类似可得  $S(x)$  在  $[x_{j-1}, x_j]$  上表达式并得

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

# 三次样条

利用  $S'(x_j + 0) = S'(x_j - 0)$  得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

其中系数

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \quad \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j},$$
$$d_j = 6 \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1} + h_j} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

对第一种边界条件, 可导出

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} (f[x_0, x_1] - f'_0)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}} (f'_n - f[x_{n-1}, x_n])$$

# 三弯矩方程

令

$$\lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_0} (f[x_0, x_1] - f'_0), \mu_n = 1, d_n = \frac{6}{h_{n-1}} (f'_n - f[x_{n-1}, x_n]),$$

则得矩阵形式三对角方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & \\ & & & \mu_n & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

对第二种边界条件，直接得端点方程

$$M_0 = f''_0, \quad M_n = f''_n$$

也可写成上式。工程上称二阶导数为**弯矩**，(3) 称为**三弯矩方程**。

# 三弯矩方程

对第三种边界条件, 可得

$$M_0 = M_n, \quad \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

其中

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1} + h_0}, \quad \mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_0},$$
$$d_n = 6 \frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$$

写成矩阵形式 (三弯矩方程)

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

# 求解过程

注意到  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\mu_j \geq 0$ ,  $\lambda_j + \mu_j = 1$ 。从而系数矩阵严格对角占优, 解存在唯一。

**步 1** 根据插值条件和边界条件给出  $M_0, M_1, \dots, M_n$  的方程组

**步 2** 求解该线性方程组

**步 3** 根据  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , 写出  $S(x)$  在整个插值区间上的分段表达式

- 北太天元中解线性方程组可用“右除”： $\backslash$
- 北太天元中三次样条插值函数 `spline` 输出的多项式是按如下格式输出

$$S(x) = a_0(x - x_j)^3 + a_1(x - x_j)^2 + a_2(x - x_j) + a_3$$

即

$$S(x) = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_j}(x - x_j)^3 + \frac{M_j}{2}(x - x_j)^2 + \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j(M_{j+1} + 2M_j)}{6} \right)(x - x_j) + y_j$$

调用 `spline`, 返回结构体, 保存了整条样条函数的分段表达式中系数

**例** 函数  $f(x)$  定义在  $[27.7, 30]$  上, 插值节点及函数值如下, 试求三次样条插值多项式  $S(x)$ , 满足边界条件  $S'(27.7) = 3.0, S'(30) = -4.0$ 。

$x$	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

解: `exp27.m` 计算系数矩阵和右端向量得三弯矩方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \\ & & 1 & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46.6666 \\ -4.00002 \\ -2.7000 \\ -17.4000 \end{pmatrix}.$$

解得  $M_0, M_1, M_2, M_3$  得

$$S(x) = \begin{cases} -13.0730(28-x)^3 + 0.2200(x-27.7)^3 + 14.8432(28-x) \\ \quad + 14.3135(x-27.7), & x \in [27.7, 28] \\ 0.0660(29-x)^3 + 0.1383(x-28)^3 + 4.2340(29-x) \\ \quad + 3.9617(x-28), & x \in [28, 29] \\ 0.1383(30-x)^3 - 1.5191(x-29)^3 + 3.9617(30-x) \\ \quad + 4.5191(x-29), & x \in [29, 30] \end{cases}$$

**例** 给定函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ , 节点  $x_k = -5 + k(k = 0, 1, \dots, 10)$ , 求三次样条插值。

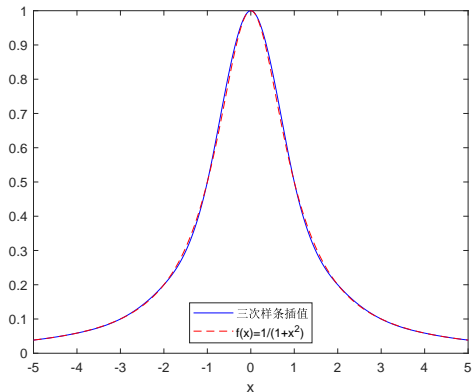


图: 三次样条插值 (exp28.m).

# 收敛性：误差界

令  $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ),

## 定理 2

设  $f(x) \in C^4[a, b]$ ,  $S(x)$  为满足第一种或第二种边界条件的三次样条插值函数, 则有误差估计式

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leq C_k \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2,$$

其中  $C_0 = \frac{5}{384}$ ,  $C_1 = \frac{1}{24}$ ,  $C_2 = \frac{3}{8}$ 。

说明当  $h \rightarrow 0$  时,  $S(x)$ ,  $S'(x)$ ,  $S''(x)$  均分别一致收敛于  $f(x)$ ,  $f'(x)$  及  $f''(x)$ 。