

# 第二章 插值

## 牛顿 (Newton) 插值

朱升峰

数学科学学院  
华东师范大学

2026 年 3 月

# 插值比较

## Lagrange 插值

- **优点**: 容易得到, 公式紧凑
- **不足**: 当增删节点时, 计算需重新进行

解决方案: 采用新的基函数, 逐次生成多项式。

$$\{1, x - x_0, \dots, (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\}$$

$n$  次插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

可由插值条件

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

依次确定系数  $a_i$ , 需引入均差 (差商) 定义。

# 均差

- 点  $x_0, x_1$  互异, 定义函数  $f(x)$  的一阶均差

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- 点  $x_0, x_1, x_2$  互异, 定义  $f(x)$  的二阶均差

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- 点  $x_0, x_1, \dots, x_k$  互异, 定义  $f(x)$  的  $n$  阶均差定义为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

# 均差性质

- 由数学归纳法得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}.$$

即, 均差与节点次序无关 (对称性) :

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$(i_0, i_1, \dots, i_k)$  为  $(0, 1, \dots, k)$  的任意一个排列。

- 等价定义

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

- 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有  $n$  阶导数, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

# 均差表

$x_k$	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
$x_0$	$f(x_0)$			
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**例** 已知  $f(x) = x^3$ ,  $x_k = 1, 2, 3, 4$ ,  $f(x_k) = 1, 8, 27, 64$ , 计算均差表。

$x_k$	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	1			
2	8	7		
3	27	19	6	
4	64	37	9	1

# Newton 插值多项式

把  $x$  看成是一个点, 由均差定义得

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1].$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2]$$

.....

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \dots, x_n]$$

把后一式依次代入前一式得

$$\begin{aligned} f(x) = & \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots}_{\text{---}} \\ & \underbrace{+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}_{\text{---}} \\ & + \underbrace{f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x)}_{\text{---}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{---}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{---}} \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

# Newton 插值

## Newton 插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

## 对基函数

$$\{1, x - x_0, \cdots, (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\}$$

## 线性组合。系数为

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k], \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

其中  $[f(x_0)] := f(x_0)$ 。

满足插值条件 (由 (1)):

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

# Newton 插值

由插值多项式唯一性知

$$P_n(x) \equiv L_n(x).$$

⇒ Newton 插值余项与 Lagrange 插值余项亦等价:

$$f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x).$$

⇓

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

⇓

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

# Newton 插值

例 给出函数表

0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	1.05
0.41075	0.57815	0.69675	0.88811	1.02652	1.25382

用 4 次 Newton 插值多项式计算  $f(0.596)$  的近似值 (exp23.m; exp24.m)。

解 计算均差表

$x_k$	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差
0.40	<u>0.41075</u>					
0.55	0.57815	<u>1.11600</u>				
0.65	0.69675	1.18600	<u>0.28000</u>			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	<u>0.19733</u>		
0.90	1.02652	1.38410	0.43347	0.21295	<u>0.03124</u>	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22867	0.03126	<u>0.00029</u>

## 4 次 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned}
 P_4(x) = & 0.41075 + 1.116(x - 0.4) + 0.28(x - 0.4)(x - 0.55) \\
 & + 0.19733(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65) \\
 & + 0.03124(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65)(x - 0.8),
 \end{aligned}$$

则

$$f(0.596) \approx P_4(0.596) = 0.63192$$

截断误差

$$|R_4(x)| \approx |f[x_0, x_1, \dots, x_5] \omega_5(0.596)| \leq 8.76 \times 10^{-9}.$$

**另一方法:** 取  $x = 0.596$ , 由  $f(0.596) \approx 0.63192$  求得  $f[x, x_0, \dots, x_4]$  的近似值, 从而得  $|R_4(x)|$  的近似。

# 差分形式的 Newton 插值多项式: 等距节点

节点  $x_k = x_0 + kh(k = 0, 1, \dots, n)$ , 称  $h$  为步长。

记  $x_k$  函数值  $f_k = f(x_k)(k = 0, 1, \dots, n)$ ,

- 一阶 (向前) 差分  $\Delta$

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

- 二阶差分  $\Delta^2$

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

- $n$  阶差分  $\Delta^n$

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

- 不变算子  $I$

$$I f_k = f_k$$

- 位移算子  $E$

$$E f_k = f_{k+1}$$

- 函数值可表示差分

$$\begin{aligned}\Delta f_k &= f_{k+1} - f_k = (\mathbf{E} - \mathbf{I})f_k \\ \Delta^n f_k &= (\mathbf{E} - \mathbf{I})^n f_k \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mathbf{E}^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+k-j}, \\ \binom{n}{j} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}\end{aligned}$$

- 差分可表示函数值

$$f_{n+k} = \mathbf{E}^n f_k = (\mathbf{I} + \Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j f_k.$$

# 均差与差分关系

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f_k$$

$$f[x_k, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi), \quad \text{其中 } \xi \in (x_k, x_{k+n}).$$

## 计算各阶差分

$f_0$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	
$f_2$	$\Delta f_2$		
$f_3$			

# Newton 前插公式

Newton 插值公式中差分代替均差, 令  $x = x_0 + th$ , 则

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

余项

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

**例:** 已知  $f(x) = \cos x$  在等距 ( $h = 0.1$ ) 节点  $0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  处的函数值, 试用 4 次 Newton 前插公式计算  $f(0.048)$  的近似值并估计误差 (exp25.m)。

**解** 先构造差分表, 并用 Newton 前插公式计算  $f(0.048)$  的近似值

$x_k$	$f(x_k)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0.00	1.00000	-0.00500	-0.00993	0.00013	0.00012	-0.00002
0.10	0.99500	-0.01493	-0.00980	0.00025	0.00010	
0.20	0.98007	-0.02473	-0.00955	0.00035		
0.30	0.95534	-0.03428	-0.00920			
0.40	0.92106	-0.04348				
0.50	0.87758					

插值点  $x = 0.048$ ,  $t = (x - x_0)/h = 0.48$ .  $P_4(0.048) = 0.99885$ .

$$|R_4(0.048)| \leq \frac{M_5}{5!} |t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)| h^5 \leq 1.3433 \times 10^{-7},$$

其中  $M_5 = |\sin 0.5| \leq 0.479$ .