

第二章 插值

朱升峰

数学科学学院
华东师范大学

2026 年 3 月

目录

- 插值引言
- 拉格朗日插值
- 均差与牛顿插值
- 埃尔米特插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

插值引言

实际问题中, 函数 $y = f(x)$ 表达式未知或虽有表达式但使用计算不便, 通常需造一函数表。只给出函数在点 x_i 上函数值 $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n

如何求不在表上的函数值?

通过构造有解析表达式的简单函数 (如代数多项式) $p(x)$ 去近似 $f(x)$ 。

函数在 $[a, b]$ 有定义, 已知 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的函数值 y_0, y_1, \dots, y_n , 若存在简单函数 $p(x)$ 使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{插值条件}) \quad (1)$$

成立, 称 $p(x)$ 为**插值函数**, x_0, x_1, \dots, x_n 为**插值节点**, $[a, b]$ 为**插值区间**, 求插值函数的方法称为**插值法**。

多项式插值

- 若插值函数 $p(x)$ 为次数不超过 n 的代数多项式

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad \text{其中 } a_i \text{ 为实数}$$

就称 $p(x)$ 为**插值多项式**，相应插值法称为**多项式插值**。

- 若 $p(x)$ 为三角多项式，就称**三角插值**。
- 若 $p(x)$ 为分段多项式，就称**分段插值**。

由**插值条件**(1) 得关于系数的 $n + 1$ 阶线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

定理 1

满足插值条件的插值多项式存在且唯一。

证明.

注意到方程组 (2) 的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

为范德蒙德矩阵, 由于 x_i 互异, 故行列式

$$\det A = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j) \neq 0$$

于是, 线性方程组的解存在且唯一。 □

拉格朗日插值

直接求解方程组 (2) 构造多项式插值较复杂, 一般不用。

常用拉格朗日插值, 先考虑 $n = 1$: **线性插值**

$[x_k, x_{k+1}]$ 上给定函数值 $y_k = f(x_k)$ 和 $y_{k+1} = f(x_{k+1})$

x	x_k	x_{k+1}
y	y_k	y_{k+1}

求线性插值多项式 $L_1(x)$ 满足

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

- 点斜式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

- 两点式 (基函数方法)

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$$

线性 (一次) 插值: $n = 1$

几何意义: 通过两点的直线

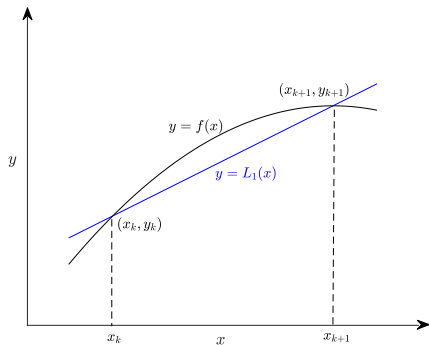


图: 线性插值.

如下线性函数称为**插值基函数**:

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

线性插值基函数

满足条件

$$\begin{aligned}l_k(x_k) &= 1, & l_k(x_{k+1}) &= 0; \\l_{k+1}(x_k) &= 0, & l_{k+1}(x_{k+1}) &= 1\end{aligned}$$

线性组合

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

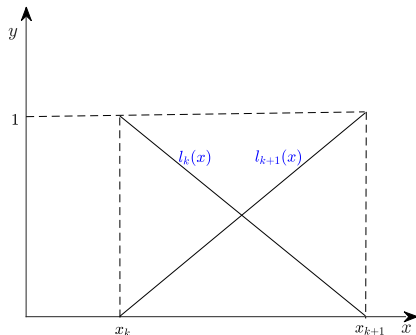


图: 线性插值基函数.

抛物线 (二次) 插值: $n = 2$

设三个插值节点 $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$, 要求二次插值多项式 $L_2(x)$ 满足

$$L_2(x_j) = y_j, \quad j = k-1, k, k+1 \quad (3)$$

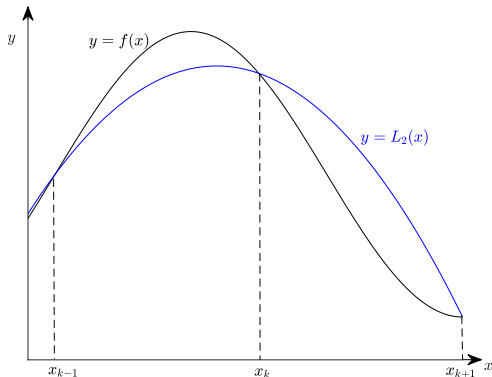


图: 抛物线插值.

基函数方法

基函数是二次函数，在插值节点上满足

$$l_{k-1}(x_{k-1}) = 1, \quad l_{k-1}(x_j) = 0, \quad j = k, k+1;$$

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_j) = 0, \quad j = k-1, k+1;$$

$$l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, \quad l_{k+1}(x_j) = 0, \quad j = k-1, k$$

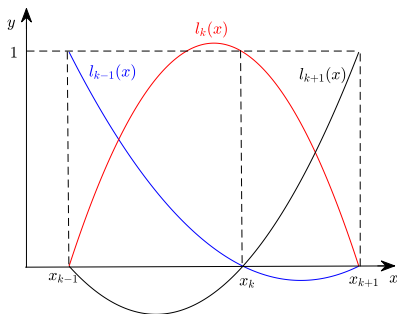


图: 二次插值基函数.

二次插值基函数

求 $l_k(x)$: 因其有零点 x_{k-1} 和 x_{k+1} , 表示为

$$l_k(x) = A(x - x_{k-1})(x - x_{k+1}),$$

A : 待定系数。条件 $l_k(x_k) = 1$ 得

$$A = \frac{1}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}$$

则

$$l_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}.$$

同理

$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}.$$

$$l_{k+1}(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}.$$

二次插值多项式

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

即

$$\begin{aligned}L_2(x) &= y_{k-1} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})} \\ &\quad + y_k \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} \\ &\quad + y_{k+1} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}\end{aligned}$$

例: 取节点 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 和 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$,

对函数 $y = e^{-x}$ 分别建立线性插值多项式和二次插值多项式。

解: 一次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -(x - 1), \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x.$$

则

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = -(x - 1) + x e^{-1}.$$

二次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 2x \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = -4x(x - 1)$$

则

$$L_2(x) = 2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right) + 2x \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{-1} - 4x(x - 1) e^{-\frac{1}{2}}.$$

拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式

一般情形: 构造 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 使满足

$$L_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

定义 2

若节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 上的 n 次多项式 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 满足

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots, n,$$

就称这 $n + 1$ 个多项式为 n 次插值基函数。

与 $n = 1, n = 2$ 的推导方法类似, 可得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

拉格朗日插值多项式

$L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

称之为**拉格朗日插值多项式**。

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

记

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

得 $\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$, 则

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}$$

定理 3

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 存在, 节点

$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, $L_n(x)$ 是满足插值条件的插值多项式, 则对任何 $x \in [a, b]$, 插值余项

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

$\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x .

证明: $R_n(x)$ 在节点上为零, $R_n(x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \cdots, n$), 设

$$R_n(x) = K(x) (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_n) \triangleq K(x) \omega_{n+1}(x), \quad (4)$$

其中函数 $K(x)$ 待定.

证明

对于异于节点的 $x \in [a, b]$, 作辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n), \quad (5)$$

$\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a, b]$ 连续, $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 存在。

由定义 $\implies \varphi(t)$ 有零点 x ;

插值条件 $\implies \varphi(t)$ 有零点 x_0, x_1, \dots, x_n 。

则 $\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个零点, 由罗尔定理, $\varphi'(t)$ 在 φ 的相邻两个零点之间至少存在一个零点, 即 $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 至少存在 $n+1$ 个零点, 以此类推, 用罗尔定理知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 至少存在一个零点, 记作 ξ , 使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0.$$

从而

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

代入 (4), 证毕。

几点注记

- 余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能用。
- ξ 的值通常未知, 若可求 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 则截断误差限

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

•

$$\sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

特别当 $k = 0$ 时有 $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$. 事实上, 当 $f(x) = x^k (k \leq n)$ 时, $f^{(n+1)}(x) = 0$, 于是

$$R_n(x) = x^k - \sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) = 0.$$

- 当 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 则插值多项式 $L_n(x) = f(x)$ 。

线性插值余项:

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

抛物线插值余项:

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

例: 证明 $\sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) = 0$, 其中 $l_i(x)$ 是关于点 x_0, x_1, \dots, x_5 的插值基函数。

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) &= \sum_{i=0}^5 (x_i^2 - 2x_i x + x^2) l_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^5 x_i^2 l_i(x) - 2x \sum_{i=0}^5 x_i l_i(x) + x^2 \sum_{i=0}^5 l_i(x) \\ &= x^2 - 2x^2 + x^2 = 0 \end{aligned}$$

□

例：已知

x	0.32	0.34	0.36
$\sin(x)$	0.314567	0.333487	0.352274

用线性插值和抛物线插值计算 $\sin 0.3367$ 的值并估计截断误差 (exp21.m)。

解：线性插值

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = 0.330365.$$

截断误差

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|,$$

其中 $M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)|$. 由 $f(x) = \sin x, f''(x) = -\sin x$, 可取

$M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |\sin x| = \sin x_1 \leq 0.3335$. 则

$$\begin{aligned} R_1(0.3367) &= |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)| \\ &\leq \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033 \leq 0.92 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

抛物线插值

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367) = 0.330374$$

截断误差限

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{6} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中

$$M_3 = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.9493$$

则

$$\begin{aligned} |R_2(0.3367)| &= |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)| \\ &\leq \frac{1}{6} \times 0.9493 \times 0.0167 \times 0.033 \times 0.0233 < 2.0136 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

精确值: $\sin 0.3367 = 0.330374\dots$

注: 抛物线插值的误差比线性插值要小。

例: $f \in C^2[a, b]$, 证明

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \right| \leq \frac{1}{8}(b - a)^2 M_2$$

其中 $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$; $C^2[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上二阶导数连续的函数空间。

证明.

满足 $L_1(a) = f(a)$ 和 $L_1(b) = f(b)$ 的线性插值为

$$L_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

则

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - L_1(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b) \right| \\ &\leq \frac{M_2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |(x - a)(x - b)| = \frac{1}{8}(b - a)^2 M_2 \end{aligned}$$

□