3.3 最佳平方逼近

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2026 年 4 月

最佳平方逼近

区间为 $[a,b]$, $f(x)\in C[a,b]$ 权函数 $\rho(x)$ 和子空间

$$\varphi=\text{span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}\subset C[a,b]$$

对 $g(x)\in C[a,b]$，定义

$$\|g(x)\|_2:=\sqrt{\int_a^b\rho(x)g^2(x)\,dx.}$$

设 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 线性无关。若存在 $S^*(x)\in\varphi$，使

$$\boxed{\|f(x)-S^*(x)\|_2^2=\min_{S(x)\in\varphi}\|f(x)-S(x)\|_2^2}$$

称 $S^*(x)$ 为 f(x) 在 φ 上的最佳平方逼近函数。

求 $S^*(x)$ 的该问题等价于

$$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x \to \min$$

$I(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 是关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的多元二次函数。由多元函数求最小值的必要条件得

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0,\ \ k = 0, 1, \cdots, n,$$

即

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的线性方程组

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_k(x), \varphi_j(x))a_j = (f(x), \varphi_k(x)), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

称之为法方程

最佳平方逼近：Gram 矩阵

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Ga = d}$$

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵行列式不为零 $\Leftrightarrow$ 法方程有唯一解 $a_k = a_k^*$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$，令

$$S^*(x) = a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x)$$

$S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的唯一最佳平方逼近函数（证明），令 $\delta(x) = f(x) - S^*(x)$，则最佳平方逼近的误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^* \left(\varphi_k(x), f(x)\right).$$

H_n 中最佳平方逼近

若取 $\varphi_k(x) = x^k, \rho(x) \equiv 1, f(x) \in C[0,1]$，则要在 H_n 中求 n 次最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$$

G 为Hilbert 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n+1) \end{pmatrix}.$$

- 当 n 较大时，Hilbert 矩阵高度病态，选用 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 作基直接求解较困难，通常采用正交基。

例 求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。
解

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

解线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\ d_1\end{bmatrix}$$

解出 $a_0=0.934,\ a_1=0.426$, 故

$$S_1^*(x)=0.934+0.426x$$

最佳平方逼近的误差

$$\begin{aligned}\|\delta(x)\|_2^2&=(f(x),f(x))-(S_1^*(x),f(x))\\&=\int_0^1(1+x^2)\mathrm{d}x-0.426d_1-0.931d_0=0.0026.\end{aligned}$$

和

$$\|\delta(x)\|_\infty=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\sqrt{1+x^2}-S_1^*(x)|\approx 0.066.$$

用正交函数族作最佳平方逼近

若 $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$ 正交函数族, 则 $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0, i \neq j$, 而 $(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) > 0$，此时法方程的系数矩阵 G 为非奇异对角阵，法方程解为

$$a_k^* = \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{(\varphi_k(x), \varphi_k(x))}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

最佳平方逼近函数为

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{\| \varphi_k(x)\|_2^2} \varphi_k(x).$$

最佳平方逼近的误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(\varphi_k, f)^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

Bessel 不等式

$$\sum_{k=0}^n (a_k^* \|\varphi_k(x)\|_2)^2 \leqslant \|f(x)\|_2^2$$

正交多项式族

级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \varphi_k(x)$$

称为广义 Fourier 级数（Fourier 级数的推广），系数 a_k^* 称为广义 Fourier 系数。
特殊情况: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 是正交多项式，由 $1, x, \cdots, x^n$ 正交化得到。

定理 1

设 $f(x) \in C[a, b]$，$S^*(x)$ 是最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{\| \varphi_k(x)|_2^2} \varphi_k(x).$$

其中 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 是正交多项式族，则

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - S_n^*(x)\|_2 = 0.$$

Legendre 多项式族作最佳平方逼近

考虑 $[a,b]=[-1,1]$, 按 Legendre 多项式展开得

$$S_n^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+\cdots+a_n^*P_n(x), \tag{1}$$

其中

$$a_k^*=\frac{(f(x),P_k(x))}{(P_k(x),P_k(x))}=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)\mathrm{d}x.$$

误差

$$\|\,\delta_n(x)\|_2^2=\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}{a_k^*}^2$$

定理 2

设 $f(x)\in C^2[-1,1]$，$S_n^*(x)$ 是最佳平方逼近多项式 *(1)*，则 $\forall\epsilon>0$，当 n 充分大时

$$\|f(x)-S_n^*(x)\|_\infty\leqslant\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

定理 3

在所有最高次项系数为 *1* 的 n 次多项式中，*Legendre* 多项式 $\widetilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 与零的平方逼近误差最小。

证明.

设是任意一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式，可表示为

$$Q_n(x) = \widetilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \widetilde{P}_k(x)$$

$$\begin{aligned}
\|Q_n(x)\|_2^2 = (Q_n(x), Q_n(x)) &= (\widetilde{P}_n(x), \widetilde{P}_n(x)) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 (\widetilde{P}_k(x), \widetilde{P}_k(x)) \\
&\geqslant (\widetilde{P}_n(x), \widetilde{P}_n(x)) = \|\widetilde{P}_n(x)\|_2^2
\end{aligned}$$

当且仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 时等号才成立，即当 $Q_n(x) = \widetilde{P}_n(x)$ 时它与零的平方逼近误差最小。 □

例: 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式, 并估计误差。
解:

$$\begin{aligned}
(f(x),P_0(x)) &= \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\approx 2.3504\\
(f(x),P_1(x)) &= \int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.7358\\
(f(x),P_2(x)) &= \int_{-1}^{1}\left(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-7\mathrm{e}^{-1}\approx 0.1431\\
(f(x),P_3(x)) &= \int_{-1}^{1}\left(\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=37\mathrm{e}^{-1}-5\mathrm{e}\approx 0.02013.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0^* &= (f(x),P_0(x))/2\approx 1.1752\\
a_1^* &= 3\,(f(x),P_1(x))/2\approx 1.1036\\
a_2^* &= 5\,(f(x),P_2(x))/2\approx 0.3578\\
a_3^* &= 7\,(f(x),P_3(x))/2\approx 0.0706
\end{aligned}$$

代入得

$$S_3^*(x)=0.9963+0.9979x+0.5367x^2+0.1761x^3$$

$$\|\delta_n(x)\|_2=\|\mathrm{e}^x-S_3^*(x)\|_2\leqslant 0.0084$$

$$\|\delta_n(x)\|_\infty=\|\mathrm{e}^x-S_3^*(x)\|_\infty\leqslant 0.0112$$

一般区间上的最佳平方逼近多项式

$f(x) \in C[a,b]$，作变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \in [a,b] \leftrightarrow t \in [-1,1]$$

$$f(x) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) \triangleq F(t), \ -1 \leqslant t \leqslant 1$$

$F(t)$ 在 $[-1,1]$ 上最佳平方逼近多项式 $S_n^*(t)$，从而得 $[a,b]$ 上最佳平方逼近多项式

$$S_n^*(t) = S_n^*\left(\frac{1}{b-a}(2x-a-b)\right).$$

通常采用 Legendre 展开得到最佳平方逼近多项式，与直接法得到的多项式一致；不用解线性方程组，计算较方便。

Chebyshev 级数

$f(x) \in C[-1,1]$，按 $\{T_k(x)\}_0^\infty$ 展开成广义 Fourier 级数

$$\frac{C_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* T_k(x),$$

其中系数

$$C_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad k = 0, 1, \cdots$$

和

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad |x| \leqslant 1.$$

该级数称为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 Chebyshev 级数。根据 Fourier 级数理论知，

定理 4

若 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上分段连续，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 *Chebyshev* 级数一致收敛于 $f(x)$，有

$$f(x) = \frac{C_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* T_k(x).$$