3.2 正交多项式

朱升峰

数学科学学院

华东师范大学

2026 年 4 月

目录

正交函数族

定义 1

若 $f(x)$，$g(x) \in C[a, b]$，$\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 权函数且满足

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$带权 $\rho(x)$ 正交。若函数族 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族。若 $A_k \equiv 1$，称之为标准正交函数族。

三角函数族和正交多项式

- 三角函数族 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数族。

由于

$$(1,1) = 2\pi, \quad (\sin kx, \sin kx) = (\cos kx, \cos kx) = \pi, \quad k = 1, 2, \cdots$$

与

$$(\cos kx, \sin kx) = (1, \cos kx) = (1, \sin kx) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

而对 $k, j = 1, 2, \cdots$ ，当 $k \neq j$ 时有

$$(\cos kx, \cos jx) = (\sin kx, \sin jx) = (\cos kx, \sin jx) = 0$$

定义 2

$\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上首项系数的 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式，$\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上权函数，如果 $\{\phi_n(x)\}_0^\infty$ 是带权 $\rho(x)$ 的正交函数族，则称之为带权的n 次正交多项式.

正交多项式

- **性质 1**: 设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, H_n 表示所有次数不超过 n 的多项式组成的线性空间, 则

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

构成 H_n 的一组基，即对任何 $p(x) \in H_n$，

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

- **性质 2**：设 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则对 $\forall p(x) \in H_{n-1}$, 有

$$(p(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) p(x) \varphi_n(x) \, dx = 0$$

即 φ_n 与所有次数小于 n 的多项式正交。

正交多项式的性质

- **性质 3** (三项递推关系)：设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 且首项系数均为 1, 则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\,\varphi_n(x) - \beta_n\varphi_{n-1}(x) \quad n = 0,1,2,\ldots$$

其中

$$\varphi_{-1} = 0, \quad \varphi_0 = 1, \quad \alpha_n = \frac{(x\varphi_n,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}, \ n = 0,1,\cdots,$$

$$\beta_n = \frac{(\varphi_n,\varphi_n)}{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}, \ n = 1,2,\cdots,$$

- **性质 4**: 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内有 n 个不同的零点。

Legendre 多项式

当区间为 $[-1,1]$，权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 时，由 $\left\{1,x,\cdots,x^k,\cdots\right\}$ 正交化得到的多项式称为Legendre 多项式：

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

首项系数

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

令

$$\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,$$

则 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Legendre 多项式.

性质

- **性质 1** (正交性)

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

- **性质 2** (奇偶性)

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

- **性质 3** (递推公式)

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

- **性质 4**: $P_n(x)$ 在 (-1,1) 内有 n 个不同的零点。

$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$, 通过递推得

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \left(3x^2 - 1\right)/2 \\
P_3(x) &= \left(5x^3 - 3x\right)/2 \\
P_4(x) &= \left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)/8 \\
P_5(x) &= \left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)/8 \\
P_6(x) &= \left(231x^5 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right)/16 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$