

第三章 函数逼近

3.1 基本概念

朱升峰

数学科学学院

华东师范大学

2026 年 4 月

目录

- 基本概念与预备知识
- 正交多项式
- 最佳平方逼近
- 曲线拟合与最小二乘法
- 有理逼近
- 三角逼近与 Fourier 变换

基本概念

函数逼近是数值分析的基础。

插值是一种函数逼近。

本章讨论的函数逼近： $f(x) \in A$ (函数类)，在 B (函数类) 中求 $p(x) \in B(\not\subseteq A)$ ，使 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的误差在某种度量意义下最小。

- 线性相关、线性无关、基、坐标
- 有限维/无限维线性空间
- \mathbb{R}^n : n 维向量空间

$C[a, b]$: $[a, b]$ 上连续函数集合

$C^m[a, b]$: $[a, b]$ 上直到 m 阶导数都连续的函数集合

H_n : 次数不超过 (\leq) n 次的多项式集合

$C[a, b]$ 和 $C^m[a, b]$ 是无限维的.

Weierstrass 定理

若函数 $p(x) \in H_n$,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad \text{其中 } a_i \text{ 为实数}$$

$p(x)$ 由系数唯一确定。 $1, x, \cdots, x^n$ 线性无关, 是 H_n 的一组基,

$H_n = \text{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$ 是 $n+1$ 维的, (a_0, a_1, \cdots, a_n) 为 $p(x)$ 的坐标。

定理 1

设 $f(x) \in C[a, b]$, 则对任何 $\epsilon > 0$, 总存在一个代数多项式 $p(x)$, 使

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致成立。

构造性证明

由于 $[a, b]$ 上函数可变量替换为 $[0, 1]$ 上函数, 不妨考虑 $[0, 1]$ 上的 f .
Bernstein(1912) 给出证明, 可参看《数值逼近》(王仁宏著).

构造多项式

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x),$$

其中 $P_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ 和 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Bernstein 证明了在 $[0, 1]$ 上一致成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x)$$

若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 m 阶导数连续, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(m)}(f, x) = f^{(m)}(x)$$

函数逼近问题

$\varphi(x) \in \Phi = \text{span} \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ 可表示为

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

其中 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n \subset C[a, b]$ 线性无关。

函数逼近问题：对任一 $f \in C[a, b]$ ，在子空间 Φ 中找一个元素（函数） $\varphi^*(x) \in \Phi$ ，使 $f(x) - \varphi^*(x)$ 在某种度量意义下最小。

定义 2

设 S 为线性空间， $x \in S$ ，若存在唯一实数 $\| \cdot \|$ 满足条件：

- **正定性：** $\|x\| \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 时， $\|x\| = 0$ 。
- **齐次性：** $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ， $\alpha \in \mathbb{R}$ 。
- **三角不等式：** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

则称 $\| \cdot \|$ 为线性空间 S 上的**范数**， S 称为**赋范线性空间**。

赋范线性空间

\mathbb{R}^n : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 可定义三种常用范数

- ∞ -范数或最大范数

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- 1-范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- 2-范数

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

赋范线性空间

$C[a, b]$: $f \in C[a, b]$, 可定义三种常用范数

- ∞ -范数或最大范数

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- 1-范数

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

- 2-范数

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

例 3.1 以 1 作为初始值, 用迭代格式 (求 \sqrt{a})

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

同时求 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

解 由于迭代的格式是一样的, 可采用向量的方式同时进行迭代, 即取

$$\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^T,$$

则可得

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.41667 \\ 1.750 \\ 2.33333 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.41422 \\ 1.73214 \\ 2.23810 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.41421 \\ 1.73205 \\ 2.23607 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

易证每个单独的迭代数列都满足

$$\{(\mathbf{x}_{k+1})_i - (\mathbf{x}_k)_i\} \quad (i = 1, 2, 3; k = 0, 1, 2, \dots)$$

趋于 0, 由此可得, 数列

$$\{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_\infty\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

趋向于 0.

向量序列收敛性、向量范数的连续性

定义 3.2 设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 为 \mathbb{R}^n 中一向量序列, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, 记

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T, \quad \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T.$$

如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则称 $\mathbf{x}^{(k)}$ 收敛于向量 \mathbf{x}^* , 记

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*, \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^* \quad (k \rightarrow \infty).$$

定理 3.2 设非负函数

$$N(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$$

为 \mathbb{R}^n 上任一向量范数, 则 $N(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x} 的分量 x_1, x_2, \dots, x_n 的连续函数.

定理 3.3 (向量范数的等价性) 设 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 为 \mathbb{R}^n 上向量的任意两种范数, 则存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得对一切 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 有

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_a.$$

注:

- 定理 3.3 不能推广到无穷维空间。
- 由定理 3.3 可得到结论: 如果在一种范数意义下向量序列收敛时, 则在任何一种范数意义下该向量序列均收敛。

定理 3.4

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为向量的任一种范数。

定义 3

设 X 是数域 $K(\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的线性空间, $\forall u, v \in X$, 有 K 中一个数与之对应, 记为 (u, v) , 满足条件:

- (1) $(u, v) = \overline{(v, u)}, \forall u, v \in X$;
- (2) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v), \alpha \in K, u, v \in X$;
- (3) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \forall u, v, w \in X$
- (4) $(u, u) \geq 0$, 当且仅当 $u = 0$ 时, $(u, u) = 0$.

则称 (u, v) 为 X 上 u 与 v 的**内积**。

内积空间: 定义了内积的线性空间。当 $K = \mathbb{R}$, (1) 即 $(u, v) = (v, u)$
如果 $(u, v) = 0$, 则称 u 与 v **正交**, 这是向量垂直概念的推广。

Cauchy-Schwarz 不等式

定理 4

设 X 为内积空间, 对 $\forall u, v \in X$, 有

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v).$$

证明.

当 $v = 0$ 时, 显然成立。设 $v \neq 0$, 对任何数 λ 有

$0 \leq (u + \lambda v, u + \lambda v) = (u, u) + 2\lambda(u, v) + \lambda^2(v, v)$. 取 $\lambda = -(u, v)/(v, v)$, 代入右端, 得

$$(u, u) - 2\frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} + \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} \geq 0,$$

由此即得 $v \neq 0$ 时

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v).$$



定理 5

设 X 为内积空间, $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$, Gram 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \cdots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_n, u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \cdots & (u_n, u_n) \end{pmatrix}$$

非奇异的充分必要条件是 u_1, u_2, \dots, u_n 线性无关。

证明: G 非奇异等价于行列式 $\det G \neq 0$, 等价于关于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性方程组

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_k \right) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j u_j, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

只有零解。

注意到上式

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_k \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

线性无关意味着上式只有零解 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ ，证毕。
内积空间上可以由内积导出一种范数，即

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u \in X$$

容易验证满足范数定义的三个条件。

例 3.2: \mathbb{R}^n 的内积

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 则其内积定义为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

由此导出向量 2-范数

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

一般地, 若给定实数 $\omega_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 称之为权系数, 则可以定义加权内积

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^2 \right)^{1/2}.$$

定义 6

$[a, b]$ 是有限或无限区间, $[a, b]$ 上的非负函数 $\rho(x)$ 满足条件:

- (1) $\int_a^b x^k \rho(x) dx$ 存在且为有限值 ($k = 0, 1, \dots$);
- (2) 对 $[a, b]$ 上非负连续函数 $g(x)$, 若 $\int_a^b \rho(x) g(x) dx = 0$ 则 $g(x) \equiv 0$, 则称 $\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的**权函数**.

例 3.3: $C[a, b]$ 的内积

设函数 $f, g \in C[a, b]$, 则其内积定义为

$$(f, g) = \int_a^b fg dx.$$

由此导出 2-范数

$$\|f\|_2 = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

带权的内积与范数

设函数 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, $\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数, 则带权 $\rho(x)$ 的内积定义为

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx.$$

由此导出的带权 $\rho(x)$ 的范数

$$\|f\|_2 = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b \rho(x)f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

特别当 $\rho(x) \equiv 1$ 时, 带权内积即为内积, 带权范数即为范数。

Gram-Schmidt 正交化

在内积空间中，可以通过格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法，将一组线性无关的元素转化为一组相互正交的元素。

定理 3.6 设 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 是内积空间 V 中的一组线性无关的元素，若取

$$\begin{cases} v_1 = u_1, \\ v_i = u_i - \sum_{l=1}^{i-1} \frac{(u_i, v_l)}{(v_l, v_l)} v_l, \quad i = 2, 3, \dots, k, \end{cases}$$

则 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 是两两正交的一组元素。

若 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是 V 的一组基，则按格拉姆-施密特正交化方法得到的 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 的一组正交基。

最佳逼近

设 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 线性无关, 记 $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, Gram 矩阵为

$$G = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix}.$$

函数逼近: 对给定 $f \in C[a, b]$, 寻求它的最佳逼近多项式。

- 若 $p^*(x) \in H_n$, 误差范数

$$\|f(x) - p^*(x)\| = \min_{p \in H_n} \|f(x) - p(x)\|,$$

则称 $p^*(x)$ 是 $[a, b]$ 上的**最佳逼近多项式**。

- 如果 $p^*(x) \in \Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 相应的称 $p^*(x)$ 为**最佳逼近函数**。

常用的最佳逼近

- $\|\cdot\|_\infty$

$$\begin{aligned}\|f(x) - p^*(x)\|_\infty &= \min_{p \in H_n} \|f(x) - p(x)\|_\infty \\ &= \min_{p \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|\end{aligned}$$

称 $p^*(x)$ 为最佳一致逼近多项式。

- $\|\cdot\|_2$

$$\begin{aligned}\|f(x) - p^*(x)\|_2^2 &= \min_{p \in H_n} \|f(x) - p(x)\|_2^2 \\ &= \min_{p \in H_n} \int_a^b \rho(x) [f(x) - p(x)]^2 dx\end{aligned}$$

称 $p^*(x)$ 为最佳平方逼近多项式。

最小二乘拟合

已知节点上给出函数值 $y_i := f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$), 数据表

x	x_0	x_1	\dots	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	\dots	y_m

找 $g^*(x) \in \Phi$, 使得

$$\sum_{i=0}^m |y_i - g^*(x_i)|^2 = \min_{g \in \Phi} \sum_{i=0}^m |y_i - g(x_i)|^2$$

称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最小二乘拟合**。

若 $\Phi = H_n$ ($m > n$), 则称 $g^*(x)$ 为 n 次**最小二乘拟合多项式**。

最小二乘是数据/曲线拟合方法中常用的方法。