6.3 超松弛迭代法

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2022 年 12 月

逐次超松弛迭代法

选取分裂矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为带参数的下三角矩阵

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})$$

其中 $\omega > 0$ 为可选择的参数因子. 构造迭代矩阵为

$$\boldsymbol{L}_\omega \equiv \boldsymbol{I} - \omega(\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{U})$$

从而得到解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的逐次超松弛迭代法(successive over relaxation method, 简称 SOR)
解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 SOR 方法为

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{初始向量}, \\ x^{(k+1)} = \boldsymbol{L}_\omega x^{(k)} + \boldsymbol{f}, & k = 0, 1 \cdots \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{U}), \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1} b.$

下面给出解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 SOR 迭代法的分量计算公式. 记

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\cdots,x_i^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$$

由(1)可得

$$(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}$$

或

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\left(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

由此得到解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 SOR 方法的计算公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}},\\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega\left(b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/ a_{ii},\\ \quad i=1,2,\cdots,n,k=0,1,\\ \omega\ \text{为松弛因子},\end{cases}$$

或

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}, \\
x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, \\
\Delta x_i = \omega\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}, \\
\quad i = 1, 2, \cdots, n, k = 0, 1, \cdots, \\
\omega \text{ 为松弛因子.}
\end{cases}
$$

注

(1) 显然, 当 $\omega = 1$ 时，SOR 方法即为高斯-赛德尔迭代法.
(2) SOR 方法每迭代一次主要运算量是计算一次矩阵与向量的乘法.
(3) 当 $\omega > 1$ 时，称为超松弛法; 当 $\omega < 1$ 称为低松弛法.
(4) 在计算机实现时可用

$$
\max_{1\le i\le n} |\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \epsilon
$$

控制迭代终止, 或用 $\|\boldsymbol{r}^{(k)}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < \epsilon$

SOR 迭代法是高斯-赛德尔迭代法的一种修正，可由下述思想得到：

设已知 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 及计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的分量 $x_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,i-1)$

(1) 首先用高斯-赛德尔迭代法定义辅助量 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$,

$$\tilde{x}_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii} \tag{2}$$

(2) 再由 $x_i^{(k)}$ 与 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 加权平均定义 $x_i^{(k+1)}$, 即

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega\tilde{x}_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega\left(\tilde{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right) \tag{3}$$

将(2)代入(3)得到解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 SOR 的迭代(1)式.

例

例 用 SOR 方法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它的精确解为 $\boldsymbol{x}^* = (-1, -1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$.

解 取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, 迭代公式为

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \omega \left(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)} \right) /4 \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \omega \left(1 - x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)} \right) /4 \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} - \omega \left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)} \right) /4 \\ x_4^{(k+1)} &= x_4^{(k)} - \omega \left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)} \right) /4. \end{aligned} \right.$$

取 $\omega = 1.3$, 第 11 次迭代结果为

$$\boldsymbol{x}^{(11)} = (-0.99999646, -1.00000310, -0.99999953, -0.99999912)^{\mathrm{T}},$$
$$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(11)}\right\|_2 \leqslant 0.46 \times 10^{-5}.$$

对 ω 取其他值, 迭代次数如下表. 从此例看到, 松弛因子选择得好, 会使 SOR 迭代法的收敛大大加速. 本例中 $\omega = 1.3$ 是最佳松弛因子.

松弛因子 ω	满足误差 $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_2 < 10^{-5}$ 的迭代次数	松弛因子 ω	满足误差 $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_2 < 10^{-5}$ 的迭代次数
1.0	22	1.5	17
1.1	17	1.6	23
1.2	12	1.7	33
1.3	11	1.8	53
1.4	14	1.9	109

SOR 迭代法的收敛性

根据一阶定常迭代法收敛的充分必要条件可知，SOR 迭代法收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$, 而 $\rho(\boldsymbol{L}_\omega)$ 与松弛因子 ω 有关, 下面先研究 ω 在什么范围内，SOR 迭代法才可能收敛.

定理 1 (SOR 迭代法收敛的必要条件)

设解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 *SOR* 迭代法收敛, 则 $0 < \omega < 2$.

定理 2

设 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 如果

(1) $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$

(2) $0 < \omega < 2$

则解 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 *SOR* 迭代法收敛.

定理 3

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 如果

(1) $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵 *(*或 $\boldsymbol{A}$ 弱对角占优不可约矩阵*)*

(2) $0<\omega\leq 1$

则解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 *SOR* 迭代法收敛.

块迭代法

块迭代法用于大型稀疏线性方程组求解

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为大型稀疏矩阵且将 $\boldsymbol{A}$ 分块为三部分

$\boldsymbol{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{q1} & \boldsymbol{A}_{q2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{qq} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{qq} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ -\boldsymbol{A}_{21} & \mathbf{0} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\boldsymbol{A}_{q1} & -\boldsymbol{A}_{q2} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & -\boldsymbol{A}_{1q} \\ & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{A}_{2q} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ii}(i=1,2,\cdots,q)$ 为 $n_i \times n_i$ 非奇异矩阵, $\sum\limits_{i=1}^{q} n_i = n$. 对 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 同样分块

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_q \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_q \end{pmatrix}$$

其中, $\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{b}_i \in \mathrm{R}^{n_i}$.
选取分裂阵 $\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角块部分, 即选

$$\begin{cases} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} \text{ (块对角矩阵)}, \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

于是得到块雅可比迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

其中迭代矩阵

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) \equiv \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

或

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}.$$

由分块矩阵乘法, 得到块雅可比迭代法的具体形式

$$\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} = \boldsymbol{b}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \cdots, q,$$

其中

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{x}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_q^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_i^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

这说明, 块雅可比迭代法, 每迭代一步, 从 $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}^{(k+1)}$, 需要求解 q 个低阶线性方程组

$$\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} = \boldsymbol{g}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, q,$$

选取分裂矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为带松弛因子的 $\boldsymbol{A}$ 块下三角部分, 即

$$\begin{cases} \boldsymbol{M} = \frac{1}{\omega}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L}) \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \mathbf{N} \end{cases}$$

得到块 SOR 迭代法 (BSOR 法)

其中迭代矩阵

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}_\omega \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f},$$

$$\boldsymbol{L}_\omega = \boldsymbol{I} - \omega(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\boldsymbol{U}),$$

$$\boldsymbol{f} = \omega(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

由分块矩阵乘法得到块 SOR 迭代法的具体形式:

$$\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} = \boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{x}_i^{(k)} + \omega\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{q}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j^{(k)}\right),$$

$$i = 1, 2, \cdots, q, k = 0, 1, \cdots,$$

其中, ω 为松弛因子.

于是, 当 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 及 $\boldsymbol{x}_j^{(k+1)}(j = 1, 2, \cdots, i-1)$ 已计算时, 解低阶线性方程组可计算小块 $\boldsymbol{x}_i^{(k+1)}$. 从 $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 共需要解 q 个低阶线性方程组, 当 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 为三对角矩阵或带状矩阵时, 可用直接法求解.

定理 4

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ *(分块形式).*
(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵,
(2) $0 < \omega < 2.$
则解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *BSOR* 迭代法收敛.

记 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_q\right)$, 块雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$. 设块 SOR(BSOR) 方法的迭代矩阵为 $\boldsymbol{L}_\omega$, 则有以下结论.

定理 5

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的块三对角矩阵, 且 $\boldsymbol{D}$ 非奇异. $\boldsymbol{J}=\mathbf{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则当 $\rho(J)<1$ 时, 对 $0<\omega<2$ 有 $\rho\left(\boldsymbol{L}_\omega\right)<1$ 及最优松弛因子

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(J)]^2}}, \quad \rho\left(\boldsymbol{L}_{opt}\right)=\omega_{opt}-1,$$

$$\rho\left(\boldsymbol{L}_\omega\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left[\omega\mu+\sqrt{\omega^2\mu^2-4(\omega-1)}\right]^2, & 0<\omega<\omega_{opl}, \\ \omega-1, & \omega_{opt}\leqslant\omega<2,\end{cases}$$

其中 $\mu=\rho(\boldsymbol{J})$.