

第四章 数值积分与数值微分

多重积分与数值微分

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 4 月

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA$$

基本思想：先化累次积分，然后数值积分

对于矩形区域 $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 可将它写成累次积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ &\approx \int_c^d \frac{b-a}{2} [f(a, y) + f(b, y)] dy \\ &\approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} [f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)] \end{aligned}$$

Gauss 求积公式

先将区域 Ω 变换为区域 $\bar{\Omega} = \{(u, v) \mid -1 \leq u, v \leq 1\}$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

$$y = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}v$$

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \frac{b-a}{2} \frac{d-c}{2} \iint_{\bar{\Omega}} g(u, v) du dv$$

$$g(u, v) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u, \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}v\right)$$

Gauss 求积公式:

$$I \approx \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n A_i A_j g(u_i, v_j)$$

- Gauss 点: u_i, v_j
- Gauss 系数: A_i, A_j

例：计算二重积分

$$\iint_D e^{-xy} dx dy$$

(1) 若区域 $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 用 Gauss 求积公式 $n = 2$

解：先将区域 $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 变换为区域

$\bar{D} = \{(u, v) \mid -1 \leq u, v \leq 1\}$, 其中 $u = 2x - 1, v = 2y - 1$, 等价于

$$x = \frac{1}{2}(u + 1), y = \frac{1}{2}(v + 1),$$

查表知 Gauss 点和 Gauss 系数：

$$u_0 = v_0 = -0.774595662, \quad u_1 = v_1 = 0, \quad u_2 = v_2 = 0.774596662,$$

$$A_0 = A_2 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9}$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{4}(u+1)(v+1)} du dv \approx \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 A_i A_j e^{-\frac{1}{4}(u_i+1)(v_j+1)}$$

复合求积公式

为提高计算精度，在计算累次积分时，可使用

- 复合梯形公式
- 复合 Simpson 公式
- 复合 Gauss 求积公式

数值微分：插值型求导公式

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n

$y = P_n(x)$: Lagrange 插值多项式; $f(x) \approx P_n(x)$

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

插值型求导公式的余项

$$f'(x) - P'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right)' + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \left(f^{(n+1)}(\xi_x) \right)'$$

节点处的余项

$$f'(x_i) - P'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

以下仅考虑节点处的导数值。

两点公式

设已给出两个节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0), f(x_1)$, 线性插值公式

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

记 $x_1 - x_0 = h$

$$P_1'(x) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)],$$

有下列求导公式:

$$P_1'(x_0) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)];$$

$$P_1'(x_1) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)].$$

由余项公式得

$$f(x_0) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f''(\xi);$$

$$f(x_1) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

三点公式 (等距)

设已给出三个等距节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ 上的函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$, 二次插值公式

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

令 $x = x_0 + th$, 上式可表示为

$$P_2(x(t)) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{dx} &= \frac{dP_2}{dt} \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2h} [(2t-3)f(x_0) - (4t-4)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)] \end{aligned}$$

$$P'_2(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$P'_2(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$P'_2(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)].$$

带余项的三点求导公式

$$\begin{cases} f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0) \\ f'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1); \\ f'(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2) \end{cases}$$

高阶导数的近似

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x), \quad k = 2, 3, \dots$$

$$P_2''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)]$$

二阶导数的近似

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)]$$

三次样条求导

给定节点以及节点函数值, 利用三次样条函数 $S(x)$ 直接得到

$$\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_{\infty} \leq C_k \|f^{(4)}\|_{\infty} h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$f^{(k)}(x) \approx S^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$f'(x_k) \approx S'(x_k) = -\frac{h_k}{3}M_k - \frac{h_k}{6}M_{k+1} + f[x_k, x_{k+1}],$$

$$f''(x_k) = M_k.$$

$$\|f' - S'\|_{\infty} \leq \frac{1}{24} \|f^{(4)}\|_{\infty} h^3,$$

$$\|f'' - S''\|_{\infty} \leq \frac{3}{8} \|f^{(4)}\|_{\infty} \omega h^2.$$

数值微分外推算法

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2f''(x) + \frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x) + \dots \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2f''(x) - \frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x) - \dots \end{cases}$$

中点公式计算

$$G_0(h) \triangleq \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] = f'(x) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \dots$$

$$G_1(h) \triangleq \frac{4G_0(h/2) - G_0(h)}{3} = f'(x) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \beta_3 h^8 + \dots$$

从而

$$G_m(h) = \frac{4^m G_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{m-1}(h)}{4^m - 1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

一般地,

$$f(x) - G_m(h) = O(h^{2(m+1)})$$