2.4 三次样条插值

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 3 月

三次样条函数

- 分段低次插值函数光滑性较差
- 二阶连续导数的需求

(三次）样条曲线在连接点上要求二阶导数连续。

定义 1

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是三次多项式，其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是节点，则称 $S(x)$ 是节点上的三次样条函数。若 $y_j = f(x_j)(j = 0, 1, \cdots, n)$，且

$$\boxed{S(x_j) = y_j,\ j = 0, 1, \cdots, n}$$

称 $S(x)$: 三次样条插值函数.

$S(x)$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上要确定 4 个待定系数，共有 n 个小区间，应确定 $4n$ 个参数.

三次样条函数

$S(x)$ 在节点 $x_j (j = 1, 2, \cdots n-1)$ 有连续性条件

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0),\ S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0),\ S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0).$$

确定 $S(x)$，需 $4n$ 个条件: 已有 $3(n-1) + (n+1) = 4n-2$ 个，还需 2 个。通常加在端点 $a = x_0$ 和 $b = x_n$ 施加两个边界条件。

- 已知两端一阶导数值:

$$S'(x_0) = f'(x_0),\ S'(x_n) = f'(x_n)$$

- 已知两端二阶导数值:

$$S'(x_0) = f'(x_0),\ S'(x_n) = f'(x_n)$$

- 当 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数时，要求 $S(x)$ 也是周期函数，满足

$$S(x_0 + 0) = S(x_n - 0),\ S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0),\ S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$$

(注意 $y_0 = y_n$，正好 $4n$ 个条件)

- 方法一：直接利用分段三次 Hermite 插值
- 方法二：利用 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_j)=M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 表达 $S(x)$

法二: 由于 $S(x)$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 上是三次多项式，故 $S''(x)$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 是线性函数，可表示为

$$S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}. \tag{1}$$

积分两次并利用 $S(x_j)=y_j$ 和 $S(x_{j+1})=y_{j+1}$，可定出积分常数，得三次样条

$$\boxed{\begin{aligned}S(x)=&M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}\\&+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j},\quad j=0,1,\cdots,n-1\end{aligned} \tag{2}}$$

三次样条

对 $S(x)$ 求导得

$$S'(x) = -M_j\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j;$$

进而

$$S'(x_j+0) = -\frac{h_j}{3}M_j - \frac{h_j}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}$$

类似可得 $S(x)$ 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上表达式并得

$$S'(x_j-0) = \frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3}M_j + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

三次样条

利用 $S'(x_j+0)=S'(x_j-0)$ 得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j=1,2,\cdots,n-1$$

其中系数

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}, \quad \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j},$$
$$d_j = 6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{h_{j-1}+h_j} = 6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}], \quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

对第一种边界条件，可导出

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(f[x_0,x_1]-f'_0\right)$$
$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(f'_n - f[x_{n-1},x_n]\right)$$

三弯矩方程

令

$$\lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_0}\left(f[x_0, x_1] - f_0'\right), \mu_n = 1, d_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]\right),$$

则得矩阵形式三对角方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

对第二种边界条件，直接得端点方程

$$M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''$$

也可写成上式。工程上称二阶导数为弯矩，(3) 称为三弯矩方程。

三弯矩方程

对第三种边界条件，可得

$$M_0 = M_n, \quad \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

其中

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1} + h_0}, \quad \mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_0},$$
$$d_n = 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$$

写成矩阵形式（三弯矩方程）

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

求解过程

注意到 $\lambda_j \geqslant 0$，$\mu_j \geqslant 0$，$\lambda_j + \mu_j = 1$。从而系数矩阵严格对角占优，解存在唯一。

步 1 根据插值条件和边界条件给出 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的方程组

步 2 求解该线性方程组

步 3 根据 $M_0, M_1, \cdots, M_n$，写出 $S(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式

- MATLAB 中解线性方程组可用 "右除"：\
- MATLAB 中三次样条插值函数 spline 输出的多项式是按如下格式输出

$$S(x) = a_0 (x - x_j)^3 + a_1 (x - x_j)^2 + a_2 (x - x_j) + a_3$$

即

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_j} (x - x_j)^3 + \frac{M_j}{2} (x - x_j)^2 \\ & + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j (M_{j+1} + 2M_j)}{6} \right) (x - x_j) + y_j \end{aligned}$$

例 函数 $f(x)$ 定义在 [27.7, 30] 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$, 满足边界条件 $S'(27.7)=3.0, S'(30)=-4.0$。

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

解：exp27.m 计算系数矩阵和右端向量得三弯矩方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46.6666 \\ -4.00002 \\ -2.7000 \\ -17.4000 \end{pmatrix}.$$

解得 M_0, M_1, M_2, M_3 得

$$S(x)=\begin{cases} -13.0730(28-x)^3+0.2200(x-27.7)^3+14.8432(28-x) \\ \quad +14.3135(x-27.7), \quad x\in[27.7,28] \\ 0.0660(29-x)^3+0.1383(x-28)^3+4.2340(29-x) \\ \quad +3.9617(x-28), \quad x\in[28,29] \\ 0.1383(30-x)^3-1.5191(x-29)^3+3.9617(30-x) \\ \quad +4.5191(x-29), \quad x\in[29,30] \end{cases}$$

例 给定函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, -5 \leqslant x \leqslant 5$, 节点 $x_k=-5+k(k=0,1,\cdots,10)$，求三次样条插值。

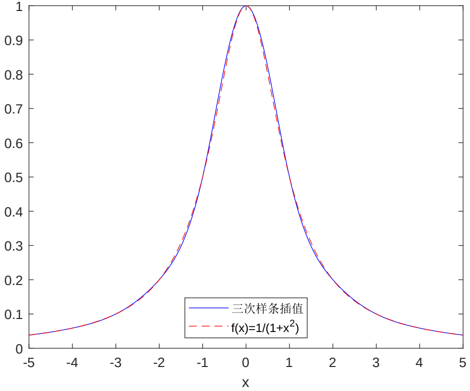

图: 三次样条插值 (exp28.m).

收敛性：误差界

令 $h = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i, h_i = x_{i+1} - x_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$,

定理 2

设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S(x)$ 为满足第一种或第二种边界条件的三次样条插值函数，则有误差估计式

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \leqslant C_k \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f^{(4)}(x) \right| h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2,$$

其中 $C_0 = \frac{5}{384}, C_1 = \frac{1}{24}, C_2 = \frac{3}{8}$。

说明当 $h \to 0$ 时，$S(x)$，$S'(x)$，$S''(x)$ 均分别一致收敛于 $f(x)$，$f'(x)$ 及 $f''(x)$。