2.4 分段低次插值

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 3 月

高次插值的病态性

龙格(Runge,20 世纪初) 现象：n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$。

例 exp22.m

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 等距节点 $x_k = -5 + 10\frac{k}{n}(k = 0, 1, \cdots, n)$ 上的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{1+x_j^2} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\,\omega'_{n+1}(x_j)}$$

在点 $x_{n-1/2} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) = 5 - \frac{5}{n}$ 的函数值比较如下表

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	误差
2	0.137931	0.759615	-0.621684
4	0.066390	-0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	-0.553416
8	0.049651	-0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	-1.531662

随着 n 增加，误差绝对值几乎成倍增加，当 $n \to \infty$，$L_n(x)$ 在 $[-5, 5]$ 上不收敛。

高次插值

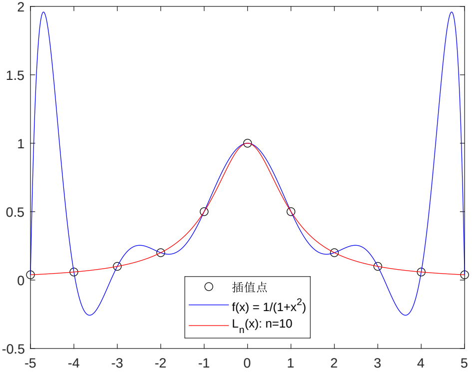

图: 龙格函数的高次插值 (exp22.m).

高次插值 V.S. 分段低次插值

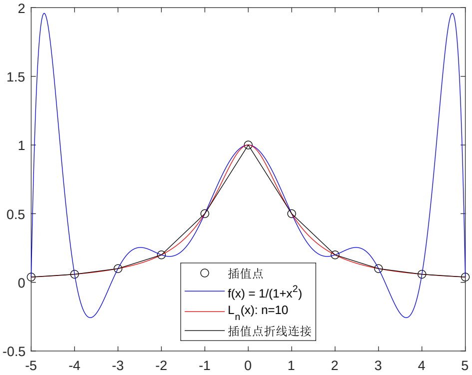

图: 龙格函数的高次插值 V.S. 分段线性插值.

分段线性插值的近似效果更好.

分段插值

- 分段线性插值
- 分段三次 Hermite 插值

已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上函数值 $f_k := f(x_k)(k = 0, 1, \cdots, n)$，记 $h_k = x_{k+1} - x_k$，$h = \max\limits_k h_k$，求 $[a, b]$ 上折线函数 $I_h(x)$ 满足：

$$
\begin{aligned}
&(1) I_h(x) \in C[a, b] \text{ (连续)} \\
&(2) I_h(x_k) = f_k \\
&(3) I_h(x) \text{ 在每一区间} [x_k, x_{k+1}] \text{ 上是线性函数}
\end{aligned}
$$

则 $I_h(x)$ 是分段线性插值函数，在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 可表示为

$$
I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1}, \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1
$$

分段线性插值的误差估计

定理 1

若 $f \in C^2[a,b]$，$I_h(x)$ 为 $f(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上的分段线性插值多项式，则有

$$\boxed{\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - I_h(x)| \leqslant \frac{M_2}{8} h^2 = O(h^2)}$$

其中 $h = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1} - x_k)$ 和 $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''|$。

证明.

对每段小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的插值误差估计进行拼接即得：

$$|f(x) - I_h(x)| \leqslant \frac{1}{8} h_k^4 \max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}} |f''(x)|, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

□

$I_h(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$: $\lim\limits_{h\to 0} I_h(x) = f(x)$.

分段三次 Hermite 插值

分段线性插值函数的导数是间断的。

若给定插值节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上函数值 $f_k := f(x_k)$ 和导数值 $m_k := f'(x_k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$，则可得到导数连续的分段插值函数 $I_h(x)$ 满足：

$$
\begin{aligned}
&(1) I_h(x) \in C[a,b] \text{ (连续)} \\
&(2) I_h(x_k) = f_k,\ \ I_h'(x_k) = m_k \\
&(3) I_h(x) \text{ 在每一区间} [x_k, x_{k+1}] \text{ 上是三次函数}
\end{aligned}
$$

$I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
I_h(x) = &\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 f_k + \left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 f_{k+1} \\
&+ (x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 m_k + (x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 m_{k+1}
\end{aligned}
$$

由三次 Hermite 插值多项式余项，得误差估计

$$|f(x)-I_h(x)| \leqslant \frac{1}{384} h_k^4 \max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} |f^{(4)}(x)|, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

每段拼接后得

定理 2

若 $f \in C^4[a,b]$，$I_h(x)$ 为 $f(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上的分段三次 *Hermite* 插值多项式，则有

$$\boxed{\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)-I_h(x)| \leqslant \frac{M_4}{384} h^4 = O(h^4)}$$

其中 $h := \max_{0 \leqslant k \leqslant n}(x_{k+1}-x_k)$，$M_4 := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(4)}(x)|$。

插值误差收敛阶

- 分段线性插值：二阶收敛（$O(h^2)$）
- 分段三次 Hermite 插值：四阶收敛（$O(h^4)$）

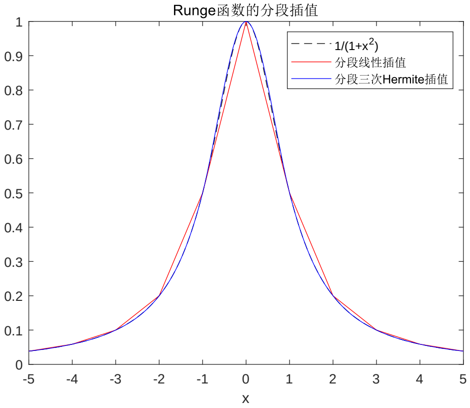

图: 分段插值 (exp26.m).