第二章 插值

牛顿 (Newton) 插值

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 3 月

插值比较

Lagrange 插值

- **优点**：容易得到，公式紧凑
- **不足**：当增删节点时，计算需重新进行

解决方案：采用新的基函数，逐次生成多项式。

$$\{1, x-x_0, \cdots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$$

n 次插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

可由插值条件

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

依次确定系数a_i，需引入均差 (差商) 定义。

均差

- 点 x_0，x_1 互异，定义函数 $f(x)$ 的一阶均差

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- 点 x_0，x_1，x_2 互异，定义 $f(x)$ 的二阶均差

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- 点 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ 互异，定义 $f(x)$ 的 n 阶均差定义为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

均差性质

- 由数学归纳法得

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}.$$

即，均差与节点次序无关（对称性）：

$$f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

$(i_0,i_1,\cdots,i_k)$ 为 $(0,1,\cdots,k)$ 的任意一个排列。

- 等价定义

$$\boxed{f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}}$$

- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶导数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

均差表

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
x_0	$\boxed{f(x_0)}$			
x_1	$f(x_1)$	$\boxed{f[x_0, x_1]}$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例 已知 $f(x) = x^3$，$x_k = 1, 2, 3, 4$，$f(x_k) = 1, 8, 27, 64$，计算均差表。

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	1			
2	8	7		
3	27	19	6	
4	64	37	9	1

把 x 看成一个点，由均差定义得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\boxed{f[x, x_0]} \\
\boxed{f[x, x_0]} &= f[x_0, x_1] + (x - x_1)\boxed{f[x, x_0, x_1]}. \\
\boxed{f[x, x_0, x_1]} &= f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2] \\
&\cdots\cdots \\
f[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] &= f[x_0, \ldots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \ldots, x_n]
\end{aligned}
$$

把后一式依次代入前一式得

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \underline{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots} \\
& \underline{+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})} \\
& + \underline{f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x)} = \underline{P_n(x)} + \underline{R_n(x)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中

$$
\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).
$$

Newton 插值

Newton 插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0) \cdots (x - x_n),$$

对基函数

$$\{1, x - x_0, \cdots, (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\}$$

线性组合。系数为

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k], \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

其中 $[f(x_0)] := f(x_0)$。

满足插值条件 (由 (1)):

$$P_n(x_i) = f(x_i), \; i = 0, 1, \cdots, k.$$

Newton 插值

由插值多项式唯一性知

$$P_n(x) \equiv L_n(x).$$

$\Rightarrow$ Newton 插值余项与 Lagrange 插值余项亦等价：

$$f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

$$\Downarrow$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

$$\Downarrow$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

例 给出函数表

0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	1.05
0.41075	0.57815	0.69675	0.88811	1.02652	1.25382

用 4 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.596)$ 的近似值 (exp23.m; exp24.m)。

解 计算均差表

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差
0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43347	0.21295	0.03124	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22867	0.03126	0.00029

例

4 次 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned} P_4(x) =& 0.41075 + 1.116(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55) \\ &+ 0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) \\ &+ 0.03124(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8), \end{aligned}$$

则

$$f(0.596) \approx P_4(0.596) = 0.63192$$

截断误差

$$|R_4(x)| \approx |f[x_0, x_1, \cdots, x_5]\,\omega_5(0.596)| \leqslant 8.76 \times 10^{-9}.$$

另一方法：取 $x = 0.596$，由 $f(0.596) \approx 0.63192$ 求得 $f[x, x_0, \cdots, x_4]$ 的近似值，从而得 $|R_4(x)|$ 的近似。

差分形式的 Newton 插值多项式: 等距节点

节点 $x_k = x_0 + kh(k = 0, 1, \cdots, n)$，称 h 为步长。

记 x_k 函数值 $f_k = f(x_k)(k = 0, 1, \cdots, n)$，

- 一阶（向前）差分Δ
$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$
- 二阶差分Δ^2
$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$
- n 阶差分Δ^n
$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$
- 不变算子I
$$\mathrm{I} f_k = f_k$$
- 位移算子E
$$\mathrm{E} f_k = f_{k+1}$$

差分

- 函数值可表示差分

$$
\begin{aligned}
\Delta f_k &= f_{k+1} - f_k = (\mathrm{E} - \mathrm{I}) f_k \\
\Delta^n f_k &= (\mathrm{E} - \mathrm{I})^n f_k \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \mathrm{E}^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+k-j},
\end{aligned}
$$

$$
\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}
$$

- 差分可表示函数值

$$
f_{n+k} = \mathrm{E}^n f_k = (\mathrm{I} + \Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f_k.
$$

均差与差分关系

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k$$

$$\boxed{f[x_k, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k, \quad m = 1, 2, \cdots, n.}$$

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi), \quad 其中\xi \in (x_k, x_{k+n}).$$

计算各阶差分

f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	
f_2	Δf_2		
f_3			

Newton 前插公式

Newton 插值公式中差分代替均差，令 $x = x_0 + th$，则

$$\boxed{P_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0}$$

余项

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

例：已知 $f(x) = \cos x$ 在等距 ($h = 0.1$) 节点 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值并估计误差 (exp25.m)。

解 先构造差分表，并用 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值

x_k	$f(x_k)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0.00	1.00000	−0.00500	−0.00993	0.00013	0.00012	−0.00002
0.10	0.99500	−0.01493	−0.00980	0.00025	0.00010	
0.20	0.98007	−0.02473	−0.00955	0.00035		
0.30	0.95534	−0.03428	−0.00920			
0.40	0.92106	−0.04348				
0.50	0.87758					

插值点 $x = 0.048$, $t = (x - x_0)/h = 0.48$. $P_4(0.048) = 0.99885$.

$|R_4(0.048)| \leqslant \frac{M_5}{5!}|t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)|h^5 \leqslant 1.3433 \times 10^{-7}$,

其中 $M_5 = |\sin 0.5| \leqslant 0.479$.