第二章 插值

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 3 月

目录

插值引言

实际问题中，函数 $y = f(x)$ 表达式未知或虽有表达式但使用计算不便，通常需造一函数表。只给出函数在点 x_i 上函数值 $y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

如何求不在表上的函数值?

通过构造有解析表达式的简单函数（如代数多项式）$P(x)$ 去近似 $f(x)$。

函数在 $[a, b]$ 有定义，已知 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，若存在简单函数 $P(x)$ 使得

$$P(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, \cdots, n \qquad (\text{插值条件}) \tag{1}$$

成立，称 $P(x)$ 为**插值函数**，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为**插值节点**，求插值函数的方法称为**插值法**。

多项式插值

- 若插值函数 $P(x)$ 为次数不超过 n 的代数多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n, \quad \text{其中}a_i\text{为实数}$$

就称 $P(x)$ 为**插值多项式**，相应插值法称为**多项式插值**。

- 若 $P(x)$ 为分段多项式，就称**分段插值**。

由插值条件(1) 得关于系数的 $n+1$ 阶线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

定理 1

满足插值条件的插值多项式存在且唯一。

证明.

注意到方程组 (2) 的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

为范德蒙德矩阵，由于 x_i 互异，故行列式

$$\det A = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

于是，线性方程组的解存在且唯一。 □

拉格朗日插值

直接求解方程组 (2) 构造多项式插值较复杂，一般不用。

常用拉格朗日插值，先考虑 $n=1$: **线性插值**

$[x_k, x_{k+1}]$ 上给定函数值 $y_k = f(x_k)$ 和 $y_{k+1} = f(x_{k+1})$

x	x_k	x_{k+1}
y	y_k	y_{k+1}

求线性插值多项式$L_1(x)$ 满足

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

- 点斜式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

- 两点式 **（基函数方法）**

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$$

几何意义：通过两点的直线

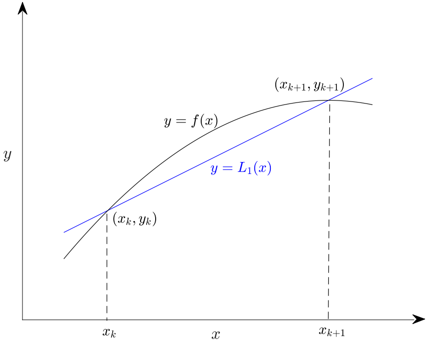


图: 线性插值.

如下线性函数称为插值基函数:

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

线性插值基函数

满足条件

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_{k+1}) = 0;$$
$$l_{k+1}(x_k) = 0, \quad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1$$

线性组合

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

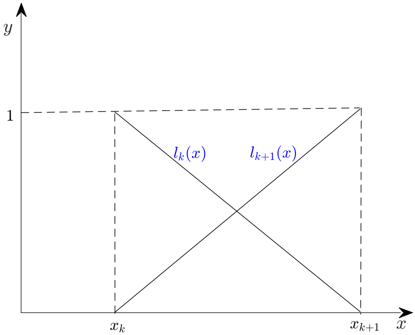
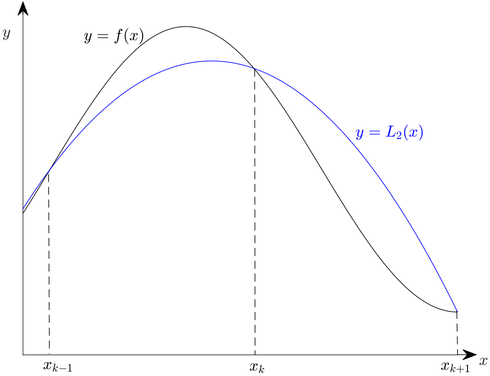


图: 线性插值基函数.

У«ЙСИЅСИфТЈњтђ╝Уіѓуѓ╣ $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$№╝їУдЂТ▒ѓС║їТгАТЈњтђ╝тцџжА╣т╝Ј $L_2(x)$ Т╗АУХ│

$$L_2(x_j) = y_j, \quad j = k-1, k, k+1 \tag{3}$$



тЏЙ: ТіЏуЅЕу║┐ТЈњтђ╝.

基函数方法

基函数是二次函数，在插值节点上满足

$$
\begin{aligned}
{\color{blue}l_{k-1}}(x_{k-1}) = 1, &\quad {\color{blue}l_{k-1}}(x_j) = 0, \quad j = k, k+1; \\
{\color{red}l_k}(x_k) = 1, &\quad {\color{red}l_k}(x_j) = 0, \quad j = k-1, k+1; \\
l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, &\quad l_{k+1}(x_j) = 0, \quad j = k-1, k
\end{aligned}
$$

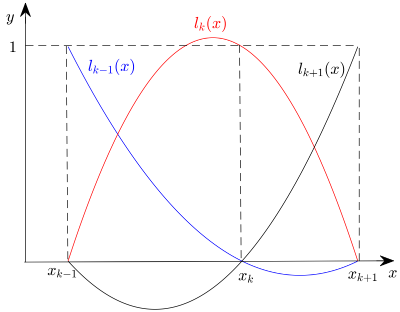


图: 二次插值基函数.

二次插值基函数

求 $l_k(x)$：因其有零点 x_{k-1} 和 x_{k+1}，表示为

$$l_k(x) = A(x - x_{k-1})(x - x_{k+1}),$$

A: 待定系数。条件 $l_k(x_k) = 1$ 得

$$A = \frac{1}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}$$

则

$$l_k(x) = \frac{\left(x - x_{k-1}\right)\left(x - x_{k+1}\right)}{\left(x_k - x_{k-1}\right)\left(x_k - x_{k+1}\right)}.$$

同理

$$l_{k-1}(x) = \frac{\left(x - x_k\right)\left(x - x_{k+1}\right)}{\left(x_{k-1} - x_k\right)\left(x_{k-1} - x_{k+1}\right)}.$$

$$l_{k+1}(x) = \frac{\left(x - x_{k-1}\right)\left(x - x_k\right)}{\left(x_{k+1} - x_{k-1}\right)\left(x_{k+1} - x_k\right)}.$$

二次插值多项式

$$L_2(x) = y_{k-1} l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

即

$$\begin{aligned} L_2(x) = & y_{k-1} \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} \\ & + y_k \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} \\ & + y_{k+1} \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} \end{aligned}$$

例: 取节点 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 和 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$，

对函数 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 分别建立线性插值多项式和二次插值多项式。

解: 一次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -(x-1), \ \ l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x.$$

则

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = -(x-1) + x\mathrm{e}^{-1}.$$

二次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -4x(x-1)$$

则

$$L_2(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-1} - 4x(x-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式

一般情形：构造 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 使满足

$$L_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

定义 2

若节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的 n 次多项式 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 满足

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \cdots, n,$$

就称这 $n+1$ 个多项式为 n 次插值基函数。

与 $n = 1$, $n = 2$ 的推导方法类似，可得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_k)(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

拉格朗日插值多项式

$L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

称之为**拉格朗日插值多项式**。

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

记

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

得 $\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$，则

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\, \omega'_{n+1}(x_k)}}$$

插值余项

定理 3

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 存在，节点 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$，$L_n(x)$ 是满足插值条件的插值多项式，则对任何 $x \in [a, b]$，插值余项

$$\boxed{R_n(x) := f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),}$$

$\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x。

证明：$R_n(x)$ 在节点上为零，$R_n(x_k) = 0\ (k = 0, 1, \cdots, n)$，设

$$R_n(x) = K(x)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_n) \triangleq K(x)\omega_{n+1}(x), \tag{4}$$

其中函数 $K(x)$ 待定。

证明

对于异于节点的 $x \in [a, b]$, 作辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n), \tag{5}$$

$\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a, b]$ 连续，$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 存在。

$$\text{由定义} \Longrightarrow \varphi(t) \text{ 有零点 } x;$$

$$\text{插值条件} \Longrightarrow \varphi(t) \text{ 有零点 } x_0, x_1, \cdots, x_n\text{。}$$

则 $\varphi(t)$ 有 $n + 2$ 个零点，由罗尔定理，$\varphi'(t)$ 在 φ 的相邻两个零点之间至少存在一个零点，即 $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 至少存在 $n + 1$ 个零点，以此类推，用罗尔定理知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 至少存在一个零点，记作 ξ, 使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n + 1)!K(x) = 0.$$

从而

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}.$$

代入 (5)，证毕。

几点注记

- 余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能用。
- ξ 的值通常未知，若可求 $\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$，则截断误差限

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

- $$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,n$$

  特别当 $k=0$ 时有 $\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1$. 事实上，当 $f(x)=x^k(k\leqslant n)$ 时，$f^{(n+1)}(x)=0$，于是

$$R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0.$$

- 当 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，则插值多项式 $L_n(x)=f(x)$。

线性插值余项:

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

抛物线插值余项:

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

例: 证明 $\sum_{i=0}^{5} (x_i - x)^2 l_i(x) = 0$，其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_5$ 的插值基函数。

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{5} (x_i - x)^2 l_i(x) &= \sum_{i=0}^{5} \left(x_i^2 - 2x_i x + x^2\right) l_i(x) \\
&= \sum_{i=3}^{5} x_i^2 l_i(x) - 2x \sum_{i=0}^{5} x_i l_i(x) + x^2 \sum_{i=0}^{5} l_i(x) \\
&= x^2 - 2x^2 + x^2 = 0
\end{aligned}$$

$\square$

例： 已知

x	0.32	0.34	0.36
$\sin(x)$	0.314567	0.333487	0.352274

用线性插值和抛物线插值计算 $\sin 0.3367$ 的值并估计截断误差 (exp21.m)。

解： 线性插值

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = 0.330365.$$

截断误差

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} |(x-x_0)(x-x_1)|,$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |f''(x)|$. 由 $f(x) = \sin x, f''(x) = -\sin x$, 可取 $M_2 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |\sin x| = \sin x_1 \leqslant 0.3335$. 则

$$\begin{aligned} R_1(0.3367) &= |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033 \leqslant 0.92 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

抛物线插值

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367) = 0.330374$$

截断误差限

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{6} |\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,|$$

其中

$$M_3 = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.9493$$

则

$$\begin{aligned} |R_2(0.3367)| &= |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)| \\ &\leqslant \frac{1}{6} \times 0.9493 \times 0.0167 \times 0.033 \times 0.0233 < 2.0136 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

精确值: $\sin 0.3367 = 0.330374\ldots$

注：抛物线插值的误差比线性插值要小。

例： $f \in C^2[a,b]$, 证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-\left[f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M_2$$

其中 $M_2=\max_{\alpha\leq x\leq b}|f''(x)|$； $C^2[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上二阶导数连续的函数空间。

证明.

满足 $L_1(a)=f(a)$ 和 $L_1(b)=f(b)$ 的线性插值为

$$L_1(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则

$$\begin{aligned}
&\max_{u\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \\
&=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-L_1(x)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right| \\
&\leqslant\frac{M_2}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-a)(x-b)|=\frac{1}{8}(b-a)^2M_2
\end{aligned}$$

□