第五章 解线性方程组的直接解法

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2022 年 11 月

目录

- 高斯消去法
- 矩阵三角分解法

高斯消去法

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

或写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

简记为

$$Ax = b.$$

高斯消去法

通过简单的例子说明高斯消去法的基本思想

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

解：第 1 步，将第一个方程乘 (-2) 加到第三个方程，消去未知数 x_1，得到

$$-4x_2 - x_3 = -11$$

第 2 步，将第二个方程加到上式，消去 x_2，得到与原方程组等价的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_3 = -6. \end{cases}$$

则解得线性方程组的解为 $x^* = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$.

上述过程相当于对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

这里 $(-2)\times r_1+r_3, r_2+r_3\to r_3$， r_i 表示矩阵的第 i 行.

由此可以看出，用消去法解线性方程组的基本思想是用逐次消去未知数的方法把原方程组 $Ax=b$ 化为与其等价的三角形线性方程组 (对系数矩阵实行初等行变换约化为上三角矩阵)，再用回代的方法求解三角形线性方程组。

高斯消去法

讨论求解一般线性方程组的高斯消去法
将方程组 $Ax = b$ 记为 $A^{(1)}x = b^{(1)}$，其中

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = a_{ij}, b^{(1)} = b.$$

(1) 第 1 步 ($k = 1$)，消元
设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，首先计算乘数

$$m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}, i = 2, 3 \cdots, n$$

用 $-m_{i1}$ 乘第 1 个方程，加到第 i 个 ($i = 2, 3 \cdots, n$) 方程上，消去从第 2 个方程到第 n 个方程中的未知数 x_1，得

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

简记为

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

其中， $A^{(2)}, b^{(2)}$ 的计算公式为

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(1)}, & i, j = 2, 3, \cdots, n, \\ b_{i}^{(2)} = b_{i}^{(1)} - m_{i1}\, b_{1}^{(1)}, & i = 2, 3, \cdots, n. \end{cases}$$

(2) 第 k 次消元 $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

设第 1 步，$\cdots$，第 $k-1$ 步消元过程已完成，得到与原方程组等价的线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

记为

$$A^{(k)} x = b^{(k)}$$

设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算乘数

$$m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, i = k+1 \cdots, n$$

用 $-m_{ik}$ 乘第 k 个方程，加到第 i 个 $(i = k+1 \cdots, n)$ 方程上，消去从第 $(k+1)$ 个方程到第 n 个方程中的未知数 x_k，得到等价的线性方程组

$$A^{(k+1)} x = b^{(k+1)}$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, & i, j = k+1, \cdots, n, \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}, & i = k+1, \cdots, n. \end{cases}$$

高斯消去法

(3) 继续上述过程，且设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n-1)$

直到完成第 $n-1$ 步消元计算，最后得到与原方程组等价的简单方程组

$$A^{(n)} x = b^{(n)}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

由方程组 $Ax = b$ 约化为方程组 (*) 的过程称为消元过程.

若 A 非奇异，且 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 解 (*) 得到求解公式

高斯消去法

$$
\begin{cases}
x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\
x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) / a_{kk}^{(k)}, \quad k = n-1, n-2 \cdots, 1.
\end{cases}
$$

注

若 $a_{11} = 0$，由于 A 为非奇异矩阵，所以 A 的第 1 列一定有元素不为零，例如 $a_{i_1 1} \neq 0$, 此时可交换两行元素 $(r_1 \leftrightarrow r_{i_1})$, 则第 1 行第 1 列的位置元素非零，消元过程可进行. 这时 $A^{(2)}$ 右下角矩阵为 $n-1$ 阶非奇异矩阵，高斯消去可继续.

总结上述讨论有如下定理

定理 1

设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$
(1) 如果 $a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots n)$, 则可通过高斯消去法将 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 约化为等价的三角形线性方程组 $(*)$, 且计算公式为:
① 消元计算 $(k=1,2,\cdots,n-1)$

$$\begin{cases} m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, & i=k+1,\cdots,n, \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)}, & i,j=k+1,\cdots,n, \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)}, & i=k+1,\cdots,n. \end{cases}$$

②回代计算

$$\begin{cases} x_n=b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}, \\ x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)/a_{ii}^{(i)}, \quad i=n-1,\cdots,2,1. \end{cases}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，则可通过高斯消去法 (及交换两行的初等变换) 将方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 约化为方程组 $(*)$.

高斯消去法

高斯消去法的运算量

计算量	消元	回代	总次数
乘除法	$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$	$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$	$\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n$
加减法	$\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$	$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$	$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$

高斯消去法

高斯消去法对于某些简单的矩阵可能会失败，例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此，需要对前述的算法进行修改，首先研究原来矩阵 A 在什么条件下才能保证 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1, 2, \cdots n)$. 下面定理给出这个条件

定理 2

约化的主元素 $a_{ii}^{(i)} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots k)$ 的充要条件是矩阵 A 的顺序主子式 $D_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots k)$，即

$$D_1 = a_{11} \neq 0, \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

推论 3

如果 A 的顺序主子式 $D_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots n-1)$, 则

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} = D_1, \\ a_{kk}^{(k)} = D_k / D_{k-1}, \quad i = 2, 3 \cdots, n. \end{cases}$$