

3.2 正交多项式

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 4 月

最佳平方逼近

区间为 $[a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$ 权函数 $\rho(x)$ 和子空间

$$\varphi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} \subset C[a, b]$$

对 $g(x) \in C[a, b]$, 定义

$$\|g(x)\|_2 := \sqrt{\int_a^b \rho(x) g^2(x) dx}.$$

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关。若存在 $S^*(x) \in \varphi$, 使

$$\|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = \min_{S(x) \in \varphi} \|f(x) - S(x)\|_2^2$$

称 $S^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 φ 上的最佳平方逼近函数。

求 $S^*(x)$ 的该问题等价于

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right]^2 dx \rightarrow \min$$

$I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 是关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的多元二次函数。由多元函数求最小值的必要条件得

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

即

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的线性方程组

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_k(x), \varphi_j(x)) a_j = (f(x), \varphi_k(x)), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

称之为**法方程**

Chebyshev 多项式性质

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$Ga = d$$

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关 \Leftrightarrow 系数矩阵行列式不为零 \Leftrightarrow 法方程有唯一解 $a_k = a_k^* (k = 0, 1, \dots, n)$, 令

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \cdots + a_n^* \varphi_n(x)$$

$S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的唯一最佳平方逼近函数, 令 $\delta(x) = f(x) - S^*(x)$, 则最佳平方逼近的误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n a_k^* (\varphi_k(x), f(x)).$$

H_n 中最佳平方逼近

若取 $\varphi_k(x) = x^k$, $\rho(x) \equiv 1$, $f(x) \in C[0, 1]$, 则要在 H_n 中求 n 次最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = a_0^* + a_1^*x + \cdots + a_n^*x^n$$

G 为 Hilbert 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n+1) \end{pmatrix}.$$

- 当 n 较大时, Hilbert 矩阵高度病态, 选用 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 作基直接求解较困难, 通常采用正交基。

例解 求 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

$$d_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.147$$

$$d_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0.609$$

解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

解出 $a_0 = 0.934$, $a_1 = 0.426$, 故

$$S_1^*(x) = 0.934 + 0.426x$$

最佳平方逼近的误差

$$\begin{aligned} \|\delta(x)\|_2^2 &= (f(x), f(x)) - (S_1^*(x), f(x)) \\ &= \int_0^1 (1+x^2) dx - 0.426d_1 - 0.931d_0 = 0.0026. \end{aligned}$$

和

$$\|\delta(x)\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |\sqrt{1+x^2} - S_1^*(x)| \approx 0.066.$$

用正交函数族作最佳平方逼近

若 $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$ 正交函数族, 则 $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0, i \neq j$, 而 $(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) > 0$, 此时法方程的系数矩阵 G 为非奇异对角阵, 法方程解为

$$a_k^* = \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{(\varphi_k(x), \varphi_k(x))}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

最佳平方逼近函数为

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{\|\varphi_k(x)\|_2^2} \varphi_k(x).$$

最佳平方逼近的误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(\varphi_k, f)^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

Bessel 不等式

$$\sum_{k=0}^n (a_k^* \|\varphi_k(x)\|_2)^2 \leq \|f(x)\|_2^2$$

正交多项式族

级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \varphi_k(x)$$

称为**广义 Fourier 级数** (Fourier 级数的推广), 系数 a_k^* 称为**广义 Fourier 系数**.
特殊情况: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ 是正交多项式, 由 $1, x, \dots, x^n$ 正交化得到.

定理 1

设 $f(x) \in C[a, b]$, $S^*(x)$ 是最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f(x), \varphi_k(x))}{\|\varphi_k(x)\|_2^2} \varphi_k(x).$$

其中 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ 是正交多项式族, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n^*(x)\|_2 = 0.$$

Legendre 多项式族作最佳平方逼近

考虑 $[a, b] = [-1, 1]$, 按 Legendre 多项式展开得

$$S_n^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + \cdots + a_n^* P_n(x), \quad (1)$$

其中

$$a_k^* = \frac{(f(x), P_k(x))}{(P_k(x), P_k(x))} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx.$$

误差

$$\| \delta_n(x) \|_2^2 = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^{*2}$$

定理 2

设 $f(x) \in C^2[-1, 1]$, $S_n^*(x)$ 是最佳平方逼近多项式 (1), 则 $\forall \epsilon > 0$, 当 n 充分大时

$$\|f(x) - S_n^*(x)\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

定理 3

在所有最高次项系数为 1 的 n 次多项式中, Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 与零的平方逼近误差最小。

证明.

设是任意一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 可表示为

$$Q_n(x) = \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{P}_k(x)$$

$$\begin{aligned} \|Q_n(x)\|_2^2 &= (Q_n(x), Q_n(x)) = (\tilde{P}_n(x), \tilde{P}_n(x)) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 (\tilde{P}_k(x), \tilde{P}_k(x)) \\ &\geq (\tilde{P}_n(x), \tilde{P}_n(x)) = \|\tilde{P}_n(x)\|_2^2 \end{aligned}$$

当且仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 时等号才成立, 即当 $Q_n(x) = \tilde{P}_n(x)$ 时它与零的平方逼近误差最小。 □

例: 求 $f(x) = e^x$ 在 $[-1, 1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式, 并估计误差。

解:

$$(f(x), P_0(x)) = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} \approx 2.3504$$

$$(f(x), P_1(x)) = \int_{-1}^1 xe^x dx = 2e^{-1} \approx 0.7358$$

$$(f(x), P_2(x)) = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) e^x dx = e - 7e^{-1} \approx 0.1431$$

$$(f(x), P_3(x)) = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) e^x dx = 37e^{-1} - 5e \approx 0.02013.$$

$$a_0^* = (f(x), P_0(x)) / 2 \approx 1.1752$$

$$a_1^* = 3 (f(x), P_1(x)) / 2 \approx 1.1036$$

$$a_2^* = 5 (f(x), P_2(x)) / 2 \approx 0.3578$$

$$a_3^* = 7 (f(x), P_3(x)) / 2 \approx 0.0706$$

代入得

$$S_3^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3$$

$$\|\delta_n(x)\|_2 = \|e^x - S_3^*(x)\|_2 \leq 0.0084$$

$$\|\delta_n(x)\|_\infty = \|e^x - S_3^*(x)\|_\infty \leq 0.0112$$

一般区间上的最佳平方逼近多项式

$f(x) \in C[a, b]$, 作变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \in [a, b] \leftrightarrow t \in [-1, 1]$$

$$f(x) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) \triangleq F(t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

$F(t)$ 在 $[-1, 1]$ 上最佳平方逼近多项式 $S_n^*(t)$, 从而得 $[a, b]$ 上最佳平方逼近多项式

$$S_n^*(t) = S_n^*\left(\frac{1}{b-a}(2x - a - b)\right).$$

通常采用 Legendre 展开得到最佳平方逼近多项式, 与直接法得到的多项式一致; 不用解线性方程组, 计算较方便。

Chebyshev 级数

$f(x) \in C[-1, 1]$, 按 $\{T_k(x)\}_0^\infty$ 展开成广义 Fourier 级数

$$\frac{C_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* T_k(x),$$

其中系数

$$C_k^* = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

和

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad |x| \leq 1.$$

该级数称为 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 Chebyshev 级数。根据 Fourier 级数理论知,

定理 4

若 $f'(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上分段连续, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 Chebyshev 级数一致收敛于 $f(x)$, 有

$$f(x) = \frac{C_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* T_k(x).$$