3.2 正交多项式

朱升峰

华东师范大学 数学科学学院

2021 年 4 月

Chebyshev 多项式

区间为 [-1,1], 权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leqslant 1}$$

若令 $x = \cos\theta$, 则 $T_n(x) = \cos n\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. 由三角恒等式

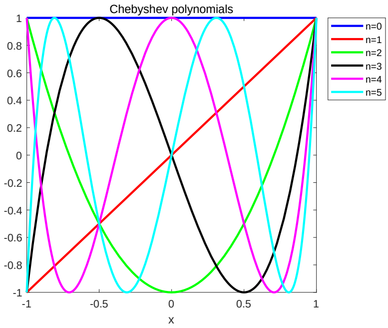
$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

- 性质（递推关系）

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{array}\right\}}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 18x^4 + 18x^2 - 1$$
$$\vdots$$

exp30.m



Chebyshev 多项式性质

- $\{T_k(x)\}$ 满足

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \frac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

- 奇偶性

$$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$$

- $T_n(x)$ 的最高项系数 $a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots,)$

  令 $\widetilde{T}_0(x)=1, \widetilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x), n=1,2,\cdots$

  则 $\widetilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式。

-

$$\frac{1}{2^{n-1}}=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\widetilde{T}_n(x)\right|\leqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|,\quad\forall P(x)\in\widetilde{H}_n,$$

  其中 $\widetilde{H}_n$ 是 [-1,1] 上次数 $\leqslant n$ 的首项系数为 1 的多项式全体。

最佳一致逼近

等价于

$$\boxed{\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\widetilde{T}_n(x)| = \min_{P\in\widetilde{H}_n}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

即

$$\|\widetilde{T}_n(x)\|_\infty = \min_{P\in\widetilde{H}_n}\|P(x)\|_\infty$$

该结论

1. 说明 $\widetilde{H}_n$ 中，$\widetilde{T}_n(x)$ 的无穷范数最小
2. 用于计算 n 次多项式在 [-1,1] 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式

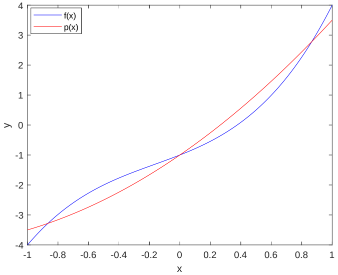
- 设 $f(x)\in H_n$，且首项系数为 $a_n\neq 0$，则 $f(x)$ 在 [-1,1] 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式为

$$\boxed{f(x) - a_n\widetilde{T}_n(x)}$$

例 求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式。

解:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) - a_3\widetilde{T}_3(x) \\ &= 2x^3+x^2+2x-1-2\left(x^3-\frac{3}{4}x\right) \\ &= x^2+\frac{7}{2}x-1 \end{aligned}$$



注: 计算 n 次多项式在 $[a,b]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式需先作变量替换

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

Chebyshev 多项式零点插值

$T_n(x)$ 在 [-1,1] 上有

- n 个零点

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

- $n+1$ 个极值点

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

共有 $2n+1$ 个Chebyshev 点

$f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [-1,1]$

$L_n(x)$: n 次 Lagrange 插值多项式，余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

其中

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}(x)\|_\infty := \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)|$$

插值误差估计

若插值节点选 $T_{n+1}(x)$ 的零点

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega_{n+1}(x)| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|\widetilde{T}_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n}$$

定理 1

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}(x)\right\|_\infty$$

$x \in [a, b] \leftrightarrow t \in [-1, 1]$:

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

例 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 [0,1] 上的四次 Lagrange 插值多项式 $L_4(x)$，插值节点用 $T_5(x)$ 的零点，并估计误差 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x-L_4(x)|$。

解 利用 $T_5(x)$ 的零点知

$$x_k=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k+1}{10}\pi\right),\quad k=0,1,2,3,4,$$

即

$$\begin{aligned}&x_0=0.97553,\quad x_1=0.79390,\quad x_2=0.5\\&x_3=0.20611,\quad x_4=0.02447.\end{aligned}$$

Lagrange 插值多项式

$$\begin{aligned}L_4(x)=&1.00002271+0.99886233x+0.50902251x^2\\&+0.11184105x^3+0.05849435x^4\end{aligned}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x - L_4(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad n=4$$

而

$$M_{n+1} = \left\|f^{(5)}(x)\right\|_\infty = \|\mathrm{e}^x\|_\infty \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2.72$$

于是有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x - L_4(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{5!}\frac{1}{2^9} < \frac{2.72}{6}\frac{1}{10240} < 4.4\times 10^{-5}$$

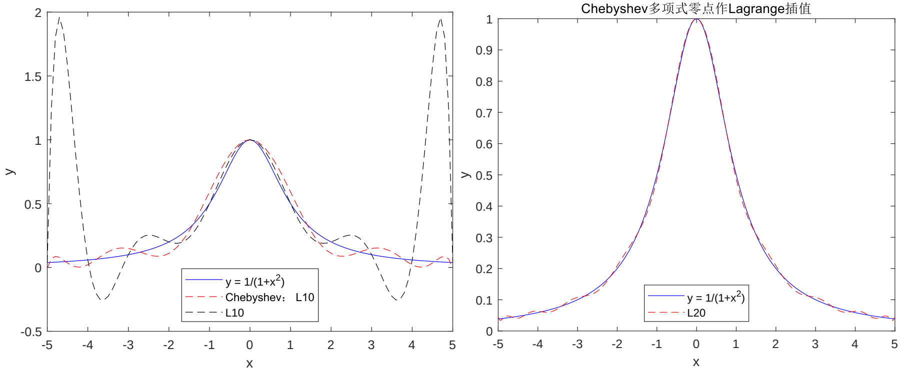
- 一般 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的 n 次 Lagrange 插值函数误差估计

$$\boxed{\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}(x)\right\|_\infty}$$

例 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，在 $[-5, 5]$ 上利用 $T_{11}(x)$ 的零点作插值点，构造 10 次 Lagrange 插值多项式 $\bar{L}_{10}(x)$。与等距节点造出的 $L_{10}(x)$ 作比较 (exp31.m)。

解 在 [-1,1] 上的 11 次 Chebyshev 多项式 $T_{11}(x)$ 的零点 t_k 做变换后得

$$x_k = 5t_k = 5\cos\frac{2k+1}{22}\pi, \quad k = 0, 1, \cdots, 10$$



第二类 Chebyshev 多项式

- $\{U_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 正交:

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 令 $x=\cos\theta$ 得正交性质

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)\,U_m(x)\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\begin{cases} 0, & m\neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m=n \end{cases}$$

- 递推关系

$$U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x$$
$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots$$

Laguerre 多项式

- $\{L_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上带权 $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 正交:

$$L_n(x)=\mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right)$$

- 正交性质

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ (n!)^2, & m=n\end{cases}$$

- 递推关系

$$\begin{aligned}&L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x\\&L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

Hermite 多项式

- $\{H_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上带权 $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 正交:

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

- 正交性质

$$\int_{-\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n,\end{cases}$$

- 递推关系

$$\begin{aligned}&H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x\\&H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$