PÉRIODES ENTIÈRES DE GROUPES p-DIVISIBLES SUR UNE BASE GÉNÉRALE

par

Miaofen CHEN

Résumé. — Faltings a démontré un théorème de comparaison à coefficients entiers entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes p-divisibles sur un anneau de valuation discrète p-adique complet. Dans cet article, nous généralisons son résultat sur une base plus générale, plus précisément, sur une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne, p-adiquement complète, normale, intègre et sans p-torsion.

Abstract. — Faltings has proved a comparaison theorem with integral coefficients between the Tate module and the filtered Dieudonné module of a p-divisible groups over a p-adic complete discrete valuation ring. In this paper, we generalise his resultat over a more general base, namely over a noetherian, normal, integral, p-adically complete, p-torsion free $\mathbb{Z}_p$-algebra.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14L05.
Mots clefs. — groupe p-divisible, théorie de Fontaine, théorème de comparaison.

1. Introduction

Soient $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, et $K_0 := \mathrm{Frac}(W(k))$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Cela correspond à un point géométrique $\bar{\eta}$ de $\mathrm{Spec}(K)$. Soit $\widehat{\overline{K}}$ le complété p-adique de $\overline{K}$. Notons $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ le groupe de Galois. Posons $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, resp. $\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$) l'anneau des entiers de K (resp. $\overline{K}$, resp. $\widehat{\overline{K}}$).

À tout groupe p-divisible X sur $\mathcal{O}_K$ est associé

- le module de Tate $T_p(X_{\bar{\eta}})$ qui est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma_K]$-module ;
- l'isocristal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X) = (D(X), \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet(D(X) \otimes_{K_0} K))$, où $(D(X), \varphi)$ est l'isocristal de Dieudonné covariant de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ et

$$\mathrm{Fil}^n(D(X) \otimes K) = \begin{cases} D(X) \otimes K & n \leq -1 \\ \omega_{X^\vee}[1/p] & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

où $X^\vee$ est le dual de Cartier de X. L'espace cotangent $\omega_{X^\vee}[1/p]$ de $X^\vee$ à valeur dans K peut être considéré comme un sous-K-espace vectoriel de $D(X) \otimes_{K_0} K$ en utilisant l'algèbre de Lie de la suite exacte associé à l'extension universelle vectorielle $E(X)$ de X (cf. [**Mes72**])

$$0 \to \omega_{X^\vee} \to \mathrm{Lie}\, E(X) \to \mathrm{Lie}\, X \to 0$$

et en identifiant $\mathrm{Lie}\, E(X)[1/p]$ avec $D(X) \otimes_{K_0} K$.

Pour lier le module de Tate et l'isocristal de Dieudonné filtré des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$, Fontaine a construit l'anneau $B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une K_0-algèbre munie d'une action de Γ_K, d'un Frobenius φ et d'une $\mathbb{Z}$-filtration. En utilisant cet anneau $B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, le module de Tate rationnel $V_p(X_{\bar{\eta}}) = T_p(X_{\bar{\eta}})[1/p]$ et l'isocristal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X)$ se déterminent l'un et l'autre. Plus précisément, Fontaine a démontré dans [**Fon82**] qu'il existe un isomorphisme de $B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$-modules

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}(X) \otimes_{K_0} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \tag{1}$$

compatible aux filtrations, aux actions de φ et aux morphismes de Frobenius si on munit le membre de gauche du Frobenius $p \otimes \varphi$ et celui de droite de $\varphi \otimes \varphi$.

Faltings a généralisé le théorème de comparaison (1) en un énoncé à coéfficients entiers. On utilise du coup $A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une sous-$\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre de $B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ stable sous Frobenius et l'action de Galois. Il existe une application surjective $\theta : A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$. Posons $\mathbb{E} := \mathrm{Lie}\, E(\tilde{X})$ avec $\tilde{X}$ un relèvement de $X \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$ sur $A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Il s'agit de l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant sur l'epaississement θ. Le $A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$-module $\mathbb{E}$ possède une $\mathbb{N}$-filtration, une action de Frobenius semi-linéaire φ et une action de Galois Γ_K. Faltings a montré dans ([**Fal99**] théorème

5) qu'il existe un isomorphisme de périodes

$$T_p(X_{\bar\eta}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\, \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

compatible à l'action de Γ_K. Le morphisme induit

$$T_p(X_{\bar\eta}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathbb{E}$$

est un homomorphisme de $(A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \varphi)$-modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t, où $t \in A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ tel que $\varphi(t) = pt$ et $t \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \backslash \mathrm{Fil}^2 A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$.

Dans cet article, on généralise le théorème de comparaison de Faltings précédent en diminuant les hypothèses necessaires sur la base. Plus précisément, on remplace la base $\mathcal{O}_K$ par l'anneau R qui est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne, p-adiquement complète, normale, intègre et sans p-torsion. Fixons une clôture algébrique du corps des fractions $\mathrm{Frac}(R)$ de R. Soit $\overline{R}$ la fermeture intégrale de R dans l'extension galoisienne maximale de $\mathrm{Frac}(R)$ étale au-dessus de $R[1/p]$. Alors $\overline{R}$ joue un rôle parallèle à $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Soit $\widehat{\overline{R}}$ le complété p-adique de $\overline{R}$. On peut construire l'anneau de Fontaine $A_{cris}(\overline{R})$ de la même façon. Il est muni d'un Frobenius cristallin φ, d'une filtration et d'une action de

$$\Gamma := \mathrm{Gal}(\widehat{\overline{R}}/R) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[1/p]), \bar\eta)$$

où $\bar\eta$ est le point géométrique au dessus du point générique associé au choix de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. De même, on a une application surjective :

$$\theta : A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}.$$

***Théorème* (4.1).** — *Soit X un groupe p-divisible sur R. Supposons que* $\mathrm{Lie}\, X$ *et* $\mathrm{Lie}(X^\vee)$ *soient libres. Posons* $\mathbb{E} := \mathrm{Lie}\, E(\tilde{X})$ *avec $\tilde{X}$ un relèvement de $X \otimes \overline{R}$ sur* $A_{cris}(\overline{R})$.

1. *Il existe un isomorphisme de périodes*

$$T_p(X_{\bar\eta}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\, \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

   compatible à l'action de Γ.

2. *Le morphisme induit*

$$T_p(X_{\bar\eta}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \to \mathbb{E}$$

   est un homomorphisme de $(A_{cris}(\overline{R}), \varphi)$-modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t. En particulier, il existe un isomorphisme de $(B_{cris}(\overline{R}), \varphi)$-modules filtrés

$$V_p(X_{\bar\eta}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\tfrac{1}{pt}].$$

Pour la preuve de ce théorème, nous suivons la stratégie de la démonstration de Faltings en ajoutant plus de détails. Dans **[Che]**, nous utiliserons ce théorème comme un outil essentiel pour construire un morphisme déterminant d'une tour d'espaces de modules de groupes p-divisibles introduit par Rapoport et Zink ([**RZ96**]) vers une tour d'espaces rigides de dimension 0.

Il faut signaler que Théorème 4.1 (2) a été déjà connu par Chambert-Loir [**CL98**] avec une méthode différente. En effet, il a démontré un théorème de comparaison p-adique cristallin pour les schémas en groupes finis localement libres en utilisant la théorie de Dieudonné cristalline de Berthelot, Breen et Messing, et Théorème 4.1 (2) de ce papier s'est obtenu du [**CL98**] Théorème 3.6 en passant à la limite.

Lorsque R est un anneau noethérien normal local de corps résiduel parfait de caractéristique p et de corps des fractions de caractéristique 0, Lau a aussi obtenu dans [**Lau**] des résultats analogues sur le module de Tate en utilisant la théorie de display de Zink. Ses résultats sont aussi valables pour $p = 2$.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Laurent Fargues, pour m'avoir proposée ce sujet, et m'avoir donnée beaucoup d'aide en preparant cet article. Mes remerciments vont aussi à Antoine Chambert-Loir pour m'avoir signalé son article [**CL98**] qui est étroitement lié à cet article. Je remercie enfin le rapporteur d'avoir lu soigneusement ce papier et de m'avoir donné des commentaires pertinents et enrichissants.

2. Rappels sur les anneaux de périodes de Fontaine

On supposera toujours que p est un nombre premier impair.

2.1. Notations. — Le théorème de comparaison que nous démontrons dans la suite concerne les groupes p-divisibles sur un anneau R. Voici les hypothèses faites et les notations choisies concernant cet anneau :

- R désigne un anneau noethérien, p-adiquement séparé complet, normal, intègre, et dans lequel $p \neq 0$.
- On fixe une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. L'anneau $\overline{R}$ est la fermeture intégrale de R dans l'extension galoisienne maximale de $\mathrm{Frac}(R)$ étale au-dessus de $R[1/p]$.
- $\widehat{\overline{R}}$ est le complété p-adique de $\overline{R}$.
- On note $\Gamma = \mathrm{Aut}(\overline{R}|R) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[1/p], \overline{\eta})$, où $\overline{\eta}$ est un point géométrique au-dessus du point générique de $\mathrm{Spec}(R)$ associé au choix de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$.

Enfin, dans la suite BT_X désigne la catégorie des groupes p-divisibles sur une base X.

2.2. Anneaux de périodes. — Avant de définir les anneaux de périodes de Fontaine que nous utiliserons, commençons par deux lemmes de base concernant l'anneau $\overline{R}$.

Lemme 2.1. — *L'anneau $\overline{R}$ est séparé pour la topologie p-adique : $\overline{R} \hookrightarrow \widehat{\overline{R}}$.*

Démonstration. — Comme R est un anneau noethérien, normal intègre de corps des fractions de caractéristique 0, d'après ([**Gro64**], prop. 23.1.2) R est japonais.

Soit $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n\overline{R}$. Posons R' égal à la clôture intégrale de R dans $\mathrm{Frac}(R[a])$. Alors, R' est une R-algèbre finie car R est noethérien et japonais. En particulier, R' est noethérien. Comme $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n R'$, d'après le théorème d'intersection de Krull ([**Eis95**], coro. 5.4), on a $a = 0$. □

Lemme 2.2 **([Bri04], prop. 2.4 p.23).** — *Le morphisme de Frobenius de $\overline{R}/p\overline{R}$ est surjectif.*

Démonstration. — Soit $a \in \overline{R}$. Considérons le polynôme $P(X) = X^{p^2} - pX - a$. Soit x une racine de $P(X)$, alors x est entier sur R. De plus en remarquant que $P'(x) = -p(1 - px^{p^2-1})$ et px^{p^2-1} sont topologiquement nilpotents, donc $P'(x)$ est inversible dans $R[x, 1/p]$ puisque $R[x]$ est une R-algèbre fini elle est p-adiquement complète car R l'est. Donc $R[x] \subset \overline{R}$ et alors $x^{p^2} \equiv a \mod p$. □

On pose

$$S = (\overline{R}/p\overline{R})^{\mathrm{perf}} := \varprojlim_{\mathbb{N}} \overline{R}/p\overline{R}$$

où les applications de transition sont le Frobenius. Considérons le sous-ensemble de $\widehat{\overline{R}}^{\mathbb{N}}$

$$\{(x^{(n)})_{n\geq 0} \in \widehat{\overline{R}}^{\mathbb{N}} \mid \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\}.$$

On le voit comme un anneau avec les structures d'addition et de multiplication comme suit :

$$(x+y)^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k} \text{ et } (xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}.$$

L'application de réduction modulo p

$$\begin{array}{rcl} \{(x^{(n)})_{n\geq 0} \in \widehat{\overline{R}}^{\mathbb{N}} \mid \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\} & \to & S \\ (x^{(n)})_{n\geq 0} & \mapsto & (x^{(n)} \bmod p)_{n\geq 0} \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux (voir [**FO**], prop. 5.4 p.106). On identifie ces deux anneaux dans la suite.

Suivant Fontaine, on définit une application

$$\begin{array}{rrl} \theta : & W(S) & \longrightarrow \widehat{\overline{R}}, \\ & \sum_{n\geq 0} [a_n] p^n & \longmapsto \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^{(0)} p^n. \end{array}$$

où $[a_n]$ sont les relèvements de Teichmüller. C'est un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres. De plus, le lemme 2.2 implique que θ est surjectif. Puisque $\overline{R} \supset \overline{\mathbb{Z}}_p$, il existe un element $\underline{p} \in S$ tel que $\underline{p}^{(0)} = p$. Fixons un tel élément.

Lemme 2.3. — $\ker\theta = (\xi)$, *où* $\xi = p - [\underline{p}]$.

Démonstration. — Il est clair que $\xi \in \ker\theta$. Pour voir que ξ est un générateur de $\ker\theta$, il suffit de vérifier le critère suivant : un élément $x = \sum_n [a_n]p^n \in \ker\theta$ est un générateur de $\ker\theta$ si $a_0^{(0)} \in p\widehat{\overline{R}}^{\times}$.

Soit x un tel élément, on vérifie aussitôt que $\ker\theta = (x) + p\ker\theta$. Alors le fait que x est un générateur de $\ker\theta$ découle du lemme de Nakayama p-adique puisque $\ker\theta$ est p-adiquement complet. □

Lemme 2.4. — *L'élément* ξ *est régulier dans* $W(S)$.

Démonstration. — Soit $a = \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n \in W(S)$ avec $a_n \in S$ tel que $\xi \cdot a = 0$. Par récurrence, il suffit de montrer que $a_0 = 0$. L'équation $\xi \cdot a = 0$ se réécrit sous la forme suivante

$$\sum_{n\geq 1}([a_{n-1}] - [\underline{p}a_n])p^n + [\underline{p}a_0] = 0,$$

d'où $\underline{p}a_0 = 0$. Comme $\widehat{\overline{R}}$ n'a pas de $\underline{p}$-torsion, on a $a_0 = 0$. □

Définition 2.5. — L'anneau $A_{cris}(\overline{R})$ est le complété de l'enveloppe à puissances divisées de $(W(S), \ker\theta)$ par rapport à sa filtration à puissances divisées. S'il y a confusion avec l'anneau $A_{cris}(\overline{R})$ défini par Fontaine, le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées, on le notera $\hat{A}_{cris}(\overline{R})$.

Comme ξ est régulier (lemme 2.4), on peut donner une description explicite de $A_{cris}(\overline{R})$:

$$A_{cris}(\overline{R}) = \Big\{ \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\xi^n}{n!} \mid a_n \in W(S) \Big\},$$

une telle écriture d'un élément de $A_{cris}(\overline{R})$ n'étant pas unique.

L'anneau $A_{cris}(\overline{R})$ possède des structures additionnelles :

– *Frobenius* : l'homomorphisme $\varphi : A_{cris}(\overline{R}) \to A_{cris}(\overline{R})$ prolonge le Frobenius usuel sur $W(S)$

$$\begin{aligned} \varphi : W(S) &\to W(S) \\ [a] &\mapsto [a^p], \end{aligned}$$

car $\varphi(\ker\theta) \subset \ker\theta + pW(S)$.

– *Filtration* : l'homomorphisme θ s'étend en

$$\theta : A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{Fil}^n A_{cris}(\overline{R}) := \ker(\theta)^{[n]} = \Big\{ \sum_{i\geq n} a_i \frac{\xi^i}{i!} \mid a_i \in W(S) \Big\},$$

où $\ker(\theta)$ désigne le noyau de $\theta : A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}$.
- *Action de* Γ : L'action nature de Γ sur S induit une action de Γ sur $W(S)$ et $A_{cris}(\overline{R})$. De plus le morphisme θ est Γ-équivariant.

S'il n'y a pas de confusion, on abrège $A_{cris}(\overline{R})$ en A_{cris}.

Lemme 2.6. — *Notons* $\widehat{\overline{R}}\{T\} := D_{\widehat{\overline{R}}[T]}((T))$ *l'enveloppe à puissances divisées de* $(\widehat{\overline{R}}[T], (T))$. *Alors, l'homomorphisme de* $\widehat{\overline{R}}$*-algèbres*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\overline{R}}\{T\} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^\bullet A_{cris}(\overline{R}) \\ T^{[n]} & \longmapsto & \textit{classe de } \dfrac{\xi^n}{n!} \textit{ dans } \mathrm{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, ξ *est régulier dans* $A_{cris}(\overline{R})$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, *l'homomorphisme de* $\widehat{\overline{R}}$*-modules*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\overline{R}} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \\ 1 & \longmapsto & \textit{classe de } \dfrac{\xi^n}{n!} \textit{ dans } \mathrm{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme ξ est un élément régulier dans $W(S)$ (lemme 2.4), d'après ([**Ber74**] chap I, prop. 3.4.4), il y a un isomorphisme naturel

$$\alpha_1 : D_{\mathrm{gr}^\bullet W(S)}(\mathrm{gr}^+ W(S)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^\bullet D_{W(S)}(\ker\theta) = \mathrm{gr}^\bullet A_{cris}(\overline{R})$$

où $\mathrm{gr}^\bullet W(S)$ est le gradué associé à la filtration $\ker\theta$-adique de $W(S)$, $\mathrm{gr}^+ W(S)$ l'idéal des éléments de degré strictement positif de $\mathrm{gr}^\bullet W(S)$, $\mathrm{gr}^\bullet D_{W(S)}(\ker\theta)$ le gradué associé à la filtration $\ker\theta$-PD-adique de $D_{W(S)}(\ker\theta)$. D'autre part, le morphisme θ induit un isomorphisme naturel

$$\mathrm{gr}^\bullet W(S) \xrightarrow{\sim} \widehat{\overline{R}}[T]$$

qui nous donne un isomorphisme

$$\alpha_2 : D_{gr^\bullet}(\mathrm{gr}^+ W(S)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\overline{R}}\{T\}.$$

Le composé $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$ est l'isomorphisme désiré. □

Remarque 2.7. —

1. Le noyau de $\theta : A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}$ n'est pas un idéal principal de $A_{cris}(\overline{R})$.
2. On adopte ici la définition de $\hat{A}_{cris}(\overline{R})$ utilisée dans [**Fal99**] qui est differente de celle de Fontaine. Rappelons que $A_{cris}(\overline{R})$ tel défini par Fontaine est le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(S)$ par rapport à $\ker(\theta)$. Il existe un homomorphisme naturel injectif $A_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow \hat{A}_{cris}(\overline{R})$. Cependant, ces deux anneaux possèdent des propriétés identiques.

3. Soit l'anneau de Fontaine

$$B^+_{dR}(\overline{R}) = \varprojlim_{n\geq 0} W(S)\left[\tfrac{1}{p}\right]/(\ker(\theta))^n,$$

le complété de $W(S)\left[\frac{1}{p}\right]$ pour la topologie $\ker(\theta)$-adique. L'homorphisme θ s'étend en $\theta : B^+_{dR}(\overline{R}) \to \widehat{\overline{R}}[1/p]$. La filtration de $B^+_{dR}(\overline{R})$ est définie par $\mathrm{Fil}^n\, B^+_{dR}(\overline{R}) = \ker(\theta)^n = \xi^n B^+_{dR}(\overline{R})$. On dispose alors de plongements naturels

$$A_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow \hat{A}_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow B^+_{dR}(\overline{R}),$$

où la deuxième injection est due à l'injectivité des gradués : $\mathrm{gr}^\bullet A_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow \mathrm{gr}^\bullet B^+_{dR}(\overline{R})$.

Voici maintenant une propriété fondamentale des anneaux de périodes entiers.

Lemme 2.8. — *Pour tout entier i tel que $0 \leq i < p$, la restriction de φ à $\mathrm{Fil}^i\, A_{cris}$ est divisible par p^i. De plus, $\frac{\varphi}{p^i}(\mathrm{Fil}^i\, A_{cris})$ engendre A_{cris}, plus précisément $\frac{\varphi(\xi^i)}{p^i} \in A^\times_{cris}$.*

Démonstration. — Pour la première assertion, il suffit de montrer que $\varphi(\xi)$ est divisible par p. Cela revient au même de dire que $\varphi(\xi) \equiv 0 \mod p$. Comme φ est un relèvement de Frobenius, on a

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^p \equiv p \cdot \frac{\xi^p}{p} \equiv 0 \mod pA_{cris},$$

d'où le résultat.

Pour la seconde assertion, il suffit de montrer que $\frac{\varphi(\xi)}{p} \in A^\times_{cris}$. On a les égalités suivantes

$$\frac{\varphi(\xi)}{p} = \frac{p - [\underline{p}^p]}{p} = \frac{(p - [\underline{p}])^p}{p} + 1 - \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} p^{i-1}(-[\underline{p}])^{p-i}.$$

On pose $u = 1 - \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} p^{i-1}(-[\underline{p}])^{p-i}$. Comme $1 - u \in pW(S)$, u est inversible dans $W(S)$. Alors,

$$\left(\frac{\varphi(\xi)}{p}\right)^{-1} = u^{-1}\sum_{n\geq 0}(-u)^{-n}\left(\frac{\xi^p}{p}\right)^n = u^{-1}\sum_{n\geq 0}(-u)^{-n}\frac{(pn)!}{p^n}\frac{\xi^{pn}}{(pn)!} \in A_{cris}(\overline{R})$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.9. — Le fait que $\varphi_{|\,\mathrm{Fil}^i}$ soit divisible par p^i n'est pas particulier à $A_{cris}(\overline{R})$. Si $\tilde{\varphi}$ est un relèvement de Frobenius sur un anneau sans torsion et si I est un idéal ayant des puissances divisées dans cet anneau, alors $\tilde{\varphi}$ restreint à $I^{[i]}$ est divisible par p^i lorsque $i < p$. Ce qui est remarquable ici c'est la seconde partie du lemme qui dit que φ est un "bon relèvement de Frobenius".

Définition 2.10. — On notera pour $0 \leq i < p$ les Frobenius divisés par

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{| \operatorname{Fil}^i A_{cris}}}{p^i}.$$

Posons

$$\mathbb{Z}_p(1) = \{(\epsilon_n)_{n \geq 0} \mid \epsilon_0 = 1, \epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n, \epsilon_n \in \mu_{p^n}(\overline{\mathbb{Z}}_p)\} \subset S^\times.$$

Pour $\epsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$, $1 - [\epsilon] \in \ker \theta$ et donc la série

$$\log[\epsilon] = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n}$$

converge et définit un élément dans $\operatorname{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R})$, d'où un homomorphisme

$$\alpha : \mathbb{Z}_p(1) \to \operatorname{Fil}^1 A_{cris}(\overline{\mathbb{Z}}_p) \subset \operatorname{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R}).$$

Considérons le composé

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_p(1) & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Fil}^1 A_{cris}(\overline{\mathbb{Z}}_p) & \longrightarrow & \operatorname{gr}^1 A_{cris}(\overline{\mathbb{Z}}_p) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_p \\ & & & & x \bmod \operatorname{Fil}^2 A_{cris}(\mathbb{Z}_p) & \longmapsto & \theta(\frac{x}{\xi}). \end{array}$$

L'image de ϵ par ce composé est $\theta(\frac{[\epsilon]-1}{\xi})$.

Si $\epsilon \neq 1$, on vérifie aussitôt que $v_p((\epsilon - 1)^{(0)}) = \frac{p}{p-1}$. Alors $\theta(\frac{[\epsilon]-1}{\xi}) \neq 0$. On en déduit que α est une injection. Posons $t = \alpha(\epsilon)$, où ϵ est un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Alors

$$\mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p t \text{ et } \varphi(t) = pt.$$

Remarque 2.11. — Le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\mathbb{Z}_p(1)$ via le caractère cyclotomique, et l'inclusion $\mathbb{Z}_p(1) \hookrightarrow A_{cris}(\overline{R})$ est Γ-équivariante via

$$\Gamma = \pi_1(\operatorname{Spec}(R[1/p], \overline{\eta}) \twoheadrightarrow \pi_1(\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}_p), \overline{\eta}) = \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p).$$

Lemme 2.12. — *L'élément t est régulier dans $B_{dR}^+(\overline{R})$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la multiplication scalaire

$$\times \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{([\epsilon] - 1)^i}{i} : W(S)[1/p]/\xi^n \longrightarrow W(S)[1/p]/\xi^{n+1}$$

est injective. Cela découle du fait que $\theta(\frac{t}{\xi}) \neq 0$ et que ξ est régulier dans $W(S)[1/p]$. □

Dans la suite on pose

$$\begin{aligned} B_{cris}^+(\overline{R}) &:= A_{cris}(\overline{R})[1/p], \\ B_{cris}(\overline{R}) &:= B_{cris}^+(\overline{R})[1/t] = A_{cris}(\overline{R})[1/t],. \\ B_{dR}(\overline{R}) &:= B_{dR}^+(\overline{R})[1/t] \end{aligned}$$

L'anneau $B^+_{cris}(\overline{R})$, resp. $B_{cris}(\overline{R})$, resp. $B_{dR}(\overline{R})$, possède naturellement une $\mathbb{N}$-filtration, resp. $\mathbb{Z}$-filtration, resp. $\mathbb{Z}$-filtration, qui étend la $\mathbb{N}$-filtration sur $A_{cris}(\overline{R})$, resp. $A_{cris}(\overline{R})$, resp. $B^+_{dR}(\overline{R})$. De plus, les filtraions sur $B^+_{cris}(\overline{R})$ et $B_{cris}(\overline{R})$ coïncident avec la restriction de la $\mathbb{Z}$-filtration sur $B_{dR}(\overline{R})$ via les inclusions naturelles

$$B^+_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow B_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow B_{dR}(\overline{R}),$$

où la deuxième injection est due à l'injection $B^+_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow B^+_{dR}(\overline{R})$ et le fait que t est un élément régulier dans $B^+_{dR}(\overline{R})$ (Lemme 2.12).

3. F-cristaux filtrés associés aux groupes p-divisibles

3.1. Site cristallin PD-nilpotent NCRIS(S/Σ) **et Frobenius.** — Dans cette section, notons $S = \mathrm{Spf}(R)$ comme schéma formel p-adique, $S_0 = \mathrm{Spec}(R/pR)$, $\Sigma = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ et $\Sigma_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Définition 3.1. —
On désigne par NCRIS(S/Σ) le gros site Zariski-cristallin PD-nilpotent de S sur Σ. Il s'agit du site suivant :

(a) Un objet est la donnée :

– d'un S-schéma formel U qui est p-adique, c'est à dire dont un idéal de définition est $p\mathcal{O}_U$

– d'une Σ-immersion fermée i de U dans un Σ-schéma formel T définie par un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_T$ et d'une PD-structure δ sur $\mathcal{I}$, compatible à celle sur (p) de $\mathbb{Z}_p$, telle que $(\mathcal{I}^{[n]} + p^m\mathcal{O}_T)_{n,m\in\mathbb{N}}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{O}_T$ i.e. T est la limite inductive de schémas $\varinjlim_{n,m\geq 0} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T/\mathcal{I}^{[n]} + p^m\mathcal{O}_T)$.

Un tel objet est appelé épaississement à puissances divisées de U. Notons-le (U, T, i, δ), ou $(U \hookrightarrow T)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

(b) Un morphisme $(U', T', i', \delta') \to (U, T, i, \delta)$ est un couple de morphismes

$$v : U' \to U, \ u : T' \to T,$$

tels que v soit un S-morphisme, u soit un Σ-morphisme commutant aux puissances divisées, et $u \circ i' = i \circ v$.

(c) Un recouvrement d'un objet (U, T, i, δ) est donné par une famille de morphismes

$$\big((U_j, T_j, i_j, \delta_j) \to (U, T, i, \delta)\big)_j$$

où $(T_j \to T)_j$ est un recouvrement Zariski de T et pour tout j, $U_j = T_j \cap U$.

On définit un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ sur NCRIS(S/Σ) en posant pour tout objet $(U \hookrightarrow T)$

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma}(U \hookrightarrow T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T).$$

Un *cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules localements libres de rang fini* sur NCRIS(S/Σ) est une section cartésienne du champ au-dessus de NCRIS(S/Σ) dont la fibre au-dessus d'un objet $(U \hookrightarrow T)$ de NCRIS(S/Σ) est la catégorie des $\mathcal{O}_T$-modules localements libres de rang fini. On note cette catégorie $\underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$. Similairement, pour S_0, on peut définir les catégories NCRIS(S_0/Σ), $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma}$ et $\underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$.

Le Frobenius absolu sur S_0

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "\mathrm{Frob}"] \arrow[d] & S_0 \arrow[d] \\ \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

définit un foncteur $\mathrm{Frob}^* : \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma) \to \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$. Or, le foncteur naturel $\underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma) \to \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$ est une équivalence de catégories ([**BO78**] chap.VI, 6.7). En prenant un quasi-inverse, on obtient un foncteur

$$\mathrm{Frob}^* : \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma) \to \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma).$$

Pour X un S-schéma formel notons X_0 sa réduction modulo p. Si $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$ et $(U \hookrightarrow T) \in$ NCRIS(S/Σ) il définit par composition $U_0 \hookrightarrow U \hookrightarrow T$ un objet $(U_0 \hookrightarrow T) \in$ NCRIS(S/Σ). On a alors

$$(\mathrm{Frob}^* \mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)} = (\mathrm{Frob}^* \mathcal{E})_{(U_0 \hookrightarrow T)} = \mathcal{E}_{(U_0^{[p]} \hookrightarrow T)}$$

où $U_0^{[p]}$ est le S-schéma formel de schéma formel sous-jacent U_0 et de morphisme structural

$$U_0 \longrightarrow S_0 \xrightarrow{\mathrm{Frob}_{S_0}} S_0 \longrightarrow S,$$

la première flêche étant le morphisme structural de U_0/S_0. Si T possède un relèvement de Frobenius $\sigma : T \to T$, un tel relèvement définit un morphisme dans NCRIS(S/Σ)

$$\begin{tikzcd} U_0^{[p]} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{Frob}_{U_0}"'] & T \arrow[d, "\sigma"] \\ U_0 \arrow[r, hook] & T. \end{tikzcd}$$

La propriété de cristal induit donc un isomorphisme

$$(\mathrm{Frob}^* \mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)} \xrightarrow{\sim} \sigma^* \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}.$$

Ainsi, si $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$ est muni d'un morphisme $\Phi : \mathrm{Frob}^* \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, pour un tel $(U \hookrightarrow T)$ muni d'un relèvement de Frobenius $\sigma : T \to T$, l'opérateur Φ s'incarne en un morphisme $\sigma^{\#}$-linéaire de $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$ dans lui-même, où $\sigma^{\#} : \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_T$.

3.2. La categorie $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. —

3.2.1. Definition de la catégorie. — On définit dans cette section une catégorie de F-cristaux filtrés particulièrement adaptée aux modules de Dieudonné des groupes p-divisibles. Si $\mathcal{E} \in \underline{Mod}(S/\Sigma)$ on note $\mathcal{E}_S$ l'évaluation du cristal $\mathcal{E}$ sur l'épaississement tautologique $S \xrightarrow{\text{Id}} S$. C'est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini. On note $\mathcal{E}_{S_0}$ la réduction modulo p de $\mathcal{E}_S$, c'est à dire l'évaluation de $\mathcal{E}$ sur l'épaississement $S_0 \xrightarrow{\text{Id}} S_0$. On note $\mathcal{E}_0$ la restriction de $\mathcal{E}$ à $\text{NCRIS}(S_0/\Sigma_0)$ c'est à dire aux épaississements annulés par p.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-module il définit un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module $i_{S/\Sigma *}\mathcal{F}$ en posant $(i_{S/\Sigma *}\mathcal{F})_{(U \hookrightarrow T)} = i_* a^* \mathcal{F}$ si $a : U \to S$ est le morphisme structural et $i : U \hookrightarrow T$. Si $J_{S/\Sigma} \subset \mathcal{O}_{S/\Sigma}$ désigne l'idéal à puissances divisées on a

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma}/J_{S/\Sigma} = i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S$$

et en fait $i_{S/\Sigma *}\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}/J_{S/\Sigma}$-module. De même si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{S_0}$-module il définit un $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$-module $i_{S_0/\Sigma_0 *}\mathcal{F}$ sur $\text{NCRIS}(S_0/\Sigma_0)$.

Définition 3.2. — La catégorie $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ consiste en les triplets $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil}\,\mathcal{E}_S)$ où

1. $\mathcal{E}$ est un élément de $\underline{Mod}(S/\Sigma)$.
2. $\Phi : \text{Frob}^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\Psi : \mathcal{E} \to \text{Frob}^*\mathcal{E}$ sont des morphismes vérifiant
$$\Phi \circ \Psi = p\,\text{Id} \quad \text{et} \quad \Psi \circ \Phi = p\,\text{Id}\,.$$
3. $\text{Fil}\,\mathcal{E}_S \subset \mathcal{E}_S$ est un sous-$\mathcal{O}_S$-module localement libre localement facteur direct.
4. Notons $\text{Fil}\,\mathcal{E}_{S_0} \subset \mathcal{E}_{S_0} = \mathcal{E}_S/p\mathcal{E}_S$ la réduction modulo p de $\text{Fil}\,\mathcal{E}_S$. Soit $\text{Fil}\,\mathcal{E}_0$ le sous $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$-module de $\mathcal{E}_0$ qui est l'image réciproque de $i_{S_0/\Sigma_0 *}\,\text{Fil}\,\mathcal{E}_{S_0}$ via le morphisme
$$\mathcal{E}_0 \twoheadrightarrow i_{S_0/\Sigma_0 *}\mathcal{E}_{S_0}$$
de réduction modulo J_{S_0/Σ_0}. On demande alors que les morphismes composés de $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$-modules
$$\text{Frob}^*\,\text{Fil}\,\mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^*\,\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E}_0$$
et
$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Psi} \text{Frob}^*\,\mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^*(\mathcal{E}_0/\,\text{Fil}\,\mathcal{E}_0)$$
soient nuls.

Définition 3.3. — Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil}\,\mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. On définit une filtration décroissante $\text{Fil}^\bullet\,\mathcal{E}_S$ de $\mathcal{E}_S$ en posant

$$\begin{cases} \text{Fil}^{-1}\,\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_S \\ \text{Fil}^{0}\,\mathcal{E}_S = \text{Fil}\,\mathcal{E}_S \\ \text{Fil}^{1}\,\mathcal{E}_S = 0. \end{cases}$$

Notons
$$\alpha : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}/J_{S/\Sigma}\mathcal{E} = i_{S/\Sigma *}\mathcal{E}_S.$$
On pose alors
$$\operatorname{Fil}\mathcal{E} = \alpha^{-1}(i_{S/\Sigma *}\operatorname{Fil}\mathcal{E}_S).$$
On définit la filtration décroissante $\operatorname{Fil}^\bullet \mathcal{E}$ du $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module $\mathcal{E}$ comme étant
$$\begin{cases} \operatorname{Fil}^{-1}\mathcal{E} = \mathcal{E} \\ \operatorname{Fil}^0 \mathcal{E} = \operatorname{Fil}\mathcal{E} \\ \operatorname{Fil}^k \mathcal{E} = J_{S/\Sigma}^{[k+1]}\mathcal{E} + J_{S/\Sigma}^{[k]}\operatorname{Fil}\mathcal{E} \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Le faisceau $\operatorname{Fil}\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module contenant $J_{S/\Sigma}\mathcal{E}$ tel que
$$\operatorname{Fil}\mathcal{E}/J_{S/\Sigma}\mathcal{E} = i_{S/\Sigma *}\operatorname{Fil}\mathcal{E}_S.$$
On a bien sûr
$$(\operatorname{Fil}^\bullet \mathcal{E})_S = \operatorname{Fil}^\bullet \mathcal{E}_S.$$

3.2.2. Lorsque Frobenius se relève en caractéristique 0. — Le point (3) de la proposition suivante joue un rôle important dans la suite.

Proposition 3.4. — *Soient* $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ *et* $(U \hookrightarrow T) \in \mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$ *avec* T *sans* p*-torsion muni d'un relèvement de Frobenius* $\sigma : T \to T$. *Notons*
$$\mathcal{D} = \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Fil}\mathcal{D} = \operatorname{Fil}\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}.$$
Soit $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *le morphisme* $\sigma^{\#}$*-linéaire déduit de* Φ *et de* σ.

1. *Il y a une inclusion* $\varphi(\operatorname{Fil}\mathcal{D}) \subset p\mathcal{D}$.
2. *Le faisceau*
$$\frac{\varphi}{p}\big(\operatorname{Fil}\mathcal{D}\big) + \varphi(\mathcal{D})$$
engendre le $\mathcal{O}_T$*-module* $\mathcal{D}$.
3. *Soit* $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_T$ *l'idéal de* U *dans* T. *Supposons de plus que le relèvement de Frobenius* σ *soit tel que* $\frac{\sigma^{\#}(\mathcal{I})}{p} \subset \mathcal{O}_T$ *engendre* $\mathcal{O}_T$ *comme* $\mathcal{O}_T$*-module. Alors,* $\frac{\varphi}{p}\big(\operatorname{Fil}\mathcal{D}\big)$ *engendre* $\mathcal{D}$ *comme* $\mathcal{O}_T$*-module.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}/p\mathcal{D} = (\mathcal{E}_0)_{(U_0 \hookrightarrow T_0)}$. Le point (1) est alors une conséquence immédiate de ce que le composé
$$\operatorname{Frob}^* \operatorname{Fil}\mathcal{E}_0 \longrightarrow \operatorname{Frob}^* \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_0$$
est nul (cf. point (4) de la définition 3.2).

La nullité du morphisme composé
$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Psi} \operatorname{Frob}^* \mathcal{E}_0 \longrightarrow \operatorname{Frob}^*(\mathcal{E}_0/\operatorname{Fil}\mathcal{E}_0)$$
entraine que l'image de
$$\Psi_{U_0 \hookrightarrow T_0} : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}, \operatorname{Frob}} \mathcal{O}_{T_0}$$

est contenue dans l'image de

$$\mathrm{Fil}\,\mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0},\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{T_0} \longrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0},\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{T_0}.$$

Localement sur T, soit $x \in \mathcal{D}$. On peut donc écrire

$$\Psi_{U\hookrightarrow T}(x) = \sum_i y_i \otimes \lambda_i + p \sum_j z_j \otimes \mu_j$$

où pour tout i, $y_i \in \mathrm{Fil}\,\mathcal{D}$ et pour tout j, $z_j \in \mathcal{D}$. Puisque $\Phi \circ \Psi = p$ on a alors

$$x = \frac{\varphi}{p} \circ \Psi_{U\hookrightarrow T}(x) = \sum_i \lambda_i \frac{\varphi(y_i)}{p} + \sum_j \mu_j \varphi(z_j).$$

Le point (2) s'en déduit.

Sous l'hypothèse du point (3), localement sur T on peut écrire

$$1 = \sum_k \nu_k \frac{\varphi(w_k)}{p}$$

où pour tout k, $w_k \in \mathcal{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a

$$\varphi(x) = \sum_k \nu_k \frac{\varphi(w_k x)}{p}$$

où pour tout k, $w_k x \in \mathcal{I}\mathcal{D} \subset \mathrm{Fil}\,\mathcal{D}$. Le point (3) se déduit alors du point (2). □

La remarque suivante est signalée par le rapporteur.

Remarque 3.5. — Dans la preuve de la proposition précédente, on a montré que

$$\Psi_{U_0\hookrightarrow T_0}(\mathcal{D}_0) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0},\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{T_0} \longrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0},\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{T_0}).$$

En fait, ces deux sous-modules de $\mathrm{Frob}^*\mathcal{D}_0$ sont égaux. On peut voir l'inclusion de l'autre direction comme suit. Comme $\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi = p$ et T est supposé sans p-torsion, les morphismes $\Psi_{U\hookrightarrow T}$ et $\Phi_{U\hookrightarrow T}$ sont tous injectifs. De plus, on en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Frob}^*\mathcal{D}/\Psi_{U\hookrightarrow T}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\Phi_{U\hookrightarrow T}} \mathcal{D}/p\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathrm{Im}(\Phi_{U\hookrightarrow T}) \to 0$$

qui s'identifie à la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathrm{Frob}^*\mathcal{D}_0/\Psi_{U_0\hookrightarrow T_0}(\mathcal{D}_0) \to \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0/\mathrm{Im}(\Phi_{U_0\hookrightarrow T_0}) \to 0.$$

En particulier $\Psi_{U_0\hookrightarrow T_0}(\mathcal{D}_0) = \mathrm{Ker}(\Phi_{U_0\hookrightarrow T_0})$. Comme le morphisme composé $\mathrm{Frob}^*\mathrm{Fil}\mathcal{D}_0 \to \mathrm{Frob}^*\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\Phi_{U_0\hookrightarrow T_0}} \mathcal{D}_0$ est nul, l'image de $\mathrm{Frob}^*\mathrm{Fil}\mathcal{D}_0$ dans $\mathrm{Frob}^*\mathcal{D}_0$ est contenue dans $\Psi_{U_0\hookrightarrow T_0}(\mathcal{D}_0)$.

3.2.3. Le F-module filtré associé à un groupe p-divisible. — Soit G un groupe p-divisible sur S. On note $\mathbb{D}(G_{S_0})$ son module de Dieudonné covariant vu comme un cristal sur $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$. Comme l'indique la notation il ne dépend que de la réduction modulo p de G. Il y a une identification

$$\mathbb{D}\big(G_{S_0}^{(p)}\big) = \mathrm{Frob}^* \, \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Le morphisme de Frobenius $F : G_{S_0} \to G_{S_0}^{(p)}$ induit alors

$$\Psi : \mathbb{D}(G_{S_0}) \longrightarrow \mathrm{Frob}^* \, \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Le Verschiebung $V : G_{S_0}^{(p)} \to G_{S_0}$ induit

$$\Phi : \mathrm{Frob}^* \, \mathbb{D}(G_{S_0}) \longrightarrow \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Si $E(G)$ désigne l'extension vectorielle universelle de G ([**Mes72**]) on a

$$\mathbb{D}(G_{S_0})_S = \mathrm{Lie}\, E(G).$$

Posons

$$\mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(G_{S_0})_S = \mathrm{Lie}(G^\vee)^*,$$

où $G^\vee$ désigne le dual de Cartier de G. Il s'agit de la partie vectorielle de l'extension vectorielle universelle de G. On a

$$\mathbb{D}(G_{S_0})_S / \mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(G_{S_0})_S = \mathrm{Lie}(G).$$

Proposition 3.6. — *Pour un groupe p-divisible G sur S on a* $(\mathbb{D}(G_{S_0}), \Phi, \Psi, \mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(G_{S_0})_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$.

Démonstration. — Seul le point (4) de la définition 3.2 demande vérification. Soit $(U \hookrightarrow T)$ avec T affine annulé par p. Soit $\widetilde{G}_U$ un relèvement à T du groupe p-divisible G_U. Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_T$ l'idéal de U dans T. Notons $\mathcal{D} = \mathbb{D}(G_{S_0})_{(U \hookrightarrow T)}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}\, \mathcal{D} &= \mathrm{Lie}(\widetilde{G}_U^\vee)^* + \mathcal{I}.\mathcal{D} \\ \mathcal{D}/\mathrm{Fil}\, \mathcal{D} &= \mathrm{Lie}\, G_U. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{I}$ est muni de puissances divisées, pour tout $x \in \mathcal{I}$ on a $x^p = 0$. Pour vérifier que le composé

$$\mathrm{Fil}\, \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$$

est nul il suffit de vérifier que le composé

$$\mathrm{Lie}(\widetilde{G}_U^\vee)^* \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$$

l'est. Mais ce morphisme n'est rien d'autre que le morphisme induit au niveau des algèbres de Lie par $F : \widetilde{G}_U^\vee \to \big(\widetilde{G}_U^\vee\big)^{(p)}$. Il est donc nul.

Le morphisme composé

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow (\mathcal{D}/\mathrm{Fil}\, \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{O}_T, \mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T$$

s'écrit comme le composé

$$\mathcal{D} \twoheadrightarrow \operatorname{Lie} \widetilde{G}_U \xrightarrow{\operatorname{Lie}(F)} \operatorname{Lie} \widetilde{G}_U \otimes_{\mathcal{O}_T,\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow \operatorname{Lie} G_U \otimes_{\mathcal{O}_T,\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_T.$$

Où $\operatorname{Lie}(F)$ est le morphisme induit au niveau des algèbres de Lie par $F : \widetilde{G}_U \to \widetilde{G}_U^{(p)}$. Il est donc nul.

□

On a donc défini un foncteur $\mathbb{Z}_p$-linéaire module de Dieudonné filtré

$$\mathbb{D}\mathrm{F} : \mathrm{BT}_S \longrightarrow \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R).$$

Exemple 3.7. —

1. $\mathbb{D}\mathrm{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est donné par
   - $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
   - $\Phi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\times p} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$ et $\Psi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
   - $\operatorname{Fil} \mathcal{E}_S = \mathcal{O}_S$.
2. $\mathbb{D}\mathrm{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)$ est donné par
   - $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
   - $\Phi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$ et $\Psi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\times p} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
   - $\operatorname{Fil} \mathcal{E}_S = 0$.

3.2.4. Dual de Cartier. — Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil} \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. On définit son dual de Cartier comme étant

$$\big(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\operatorname{Fil} \mathcal{E}_S)^\perp\big).$$

On vérifie que c'est encore un objet de $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. On vérifie de plus en utilisant les résultats du chapitre 5 de [**BBM82**] que si $G \in \mathrm{BT}_S$ alors le dual de Cartier de $\mathbb{D}\mathrm{F}(G)$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{D}\mathrm{F}(G^\vee)$.

3.3. Représentation galoisienne associée à un objet de $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. — Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil} \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. Posons

$$E = \Gamma\big(A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}},\ \mathcal{E}\big)$$

muni de la filtration

$$\operatorname{Fil}^\bullet E = \Gamma\big(A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}},\ \operatorname{Fil}^\bullet \mathcal{E}\big).$$

C'est un $A_{cris}(\overline{R})$-module localement libre de rang fini sur $\operatorname{Spf}(A_{cris}(\overline{R}))$ muni d'un endomorphisme φ-semi-linéaire $\varphi : E \to E$ déduit de Φ, et d'une action semi-linéaire de Γ, i.e. pour $\tau \in \Gamma$, le morphisme $\tau : E \to E$ est associé au morphisme dans $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$:

$$(A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}) \overset{(\tau,\tau)}{\to} (A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}).$$

Cette action commute à φ en vertu de la fonctorialité de φ et $\operatorname{Fil}^\bullet E$ est stable sous Γ. On note $\operatorname{Fil} E := \operatorname{Fil}^0 E$ qui détermine complètement $\operatorname{Fil}^\bullet E$. Si $M = \Gamma(S,\ \mathcal{E}_S)$ et $\operatorname{Fil} M = \Gamma(S, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S)$ on a

$$E/\operatorname{Fil}^1 A_{cris}E = M \otimes_R \widehat{\widehat{R}} \ \text{ et } \ \operatorname{Fil} E/\operatorname{Fil}^1 A_{cris}E = \operatorname{Fil} M \otimes_R \widehat{\widehat{R}}.$$

Exemple 3.8. —

(1) Si $\mathcal{E} = \mathbb{D}\mathrm{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, on a $E = A_{cris}(\overline{R}) \cdot e$ où :
- Le Frobenius est $\varphi e = pe$;
- L'action de Γ est $\sigma e = e$, pour $\sigma \in \Gamma$;
- La filtration est $\operatorname{Fil}^n E = \operatorname{Fil}^n A_{cris}(\overline{R}) \cdot e$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(2) Si $\mathcal{E} = \mathbb{D}\mathrm{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)$, on a $E = A_{cris}(\overline{R}) \cdot e$ où :
- Le Frobenius est $\varphi e = e$;
- L'action de Γ est $\sigma e = e$, pour $\sigma \in \Gamma$;
- La Filtration est $\operatorname{Fil}^n E = \operatorname{Fil}^{n+1} A_{cris}(\overline{R}) \cdot e$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.9. — On définit deux foncteurs

$$\begin{array}{rcl} T_p : \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[\Gamma] - \text{modules} \\ (\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S) & \longmapsto & (\operatorname{Fil} E)^{\varphi = p} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} V_p : \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R) \longrightarrow & \mathbb{Q}_p[\Gamma] - \text{modules} \\ (\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S) \longmapsto & T_p(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S)[1/p]. \end{array}$$

Dans la suite on abrége $T_p(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S)$ en $T_p(\mathcal{E})$. On peut réécrire le foncteur T_p sous la forme

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\varphi,\mathrm{Fil}}\left(\mathbb{D}\mathrm{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{cris}\twoheadrightarrow\widehat{\widehat{R}}},\ E\right) & \xrightarrow{\sim} & T_p(\mathcal{E}) \\ f & \longmapsto & f(e) \end{array}$$

où $\mathbb{D}\mathrm{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{cris}\twoheadrightarrow\widehat{\widehat{R}}} = A_{cris} \cdot e$ (cf. exemple 3.8).

Remarque 3.10. — Supposons que $\Gamma(S, \operatorname{Fil}\mathcal{E}_S)$ et $\Gamma(S,\ \mathcal{E}_S/\operatorname{Fil}\mathcal{E}_S)$ soient des R-modules libres de rang $n-r$ et r respectivement. Alors, E est un $A_{cris}(\overline{R})$-module libre de rang n. On peut de plus trouver une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que

$$\operatorname{Fil} E = \operatorname{Fil}^1 A_{cris}e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Fil}^1 A_{cris}e_r \oplus A_{cris}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus A_{cris}e_n.$$

La filtration $\operatorname{Fil}^\bullet E$ est alors donnée par

$\forall i < 0 \ \operatorname{Fil}^i E = E$

$i = 0 \ \operatorname{Fil}^0 E = \operatorname{Fil} E$

$\forall i > 0 \ \operatorname{Fil}^i E = \operatorname{Fil}^{i+1} A_{cris}e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Fil}^{i+1} A_{cris}e_r \oplus \operatorname{Fil}^i A_{cris}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Fil}^i A_{cris}e_n.$

4. Théorème de comparaison

4.1. L'énconcé du théorème. — On généralise un théorème de comparaison de Faltings ([**Fal99**] théorème 5) en remplacant par l'anneau R l'anneau de valuation discrète complet qu'il utilise.

Théorème 4.1. — *Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne, p-adiquement complète, normale, intègre et sans p-torsion. Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \operatorname{Fil} \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. On suppose de plus que $\Gamma(S, \operatorname{Fil} \mathcal{E}_S)$ et $\Gamma(S,\ \mathcal{E}_S/ \operatorname{Fil} \mathcal{E}_S)$ sont des R-modules libres. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées.*

1. *Le $\mathbb{Z}_p$-module $T_p(\mathcal{E})$ est libre de même rang que celui de $\mathcal{E}$.*
2. *Si $E = \mathcal{E}_{A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}}$, le morphisme naturel de $A_{cris}(\overline{R})$-modules filtrés*
$$T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \longrightarrow E$$
est injectif strictement compatible aux filtrations et de conoyau annulé par t.

Remarque 4.2. — Théorème 4.1 (2) est déjà connu par Chambert-Loir [**CL98**]. Il a démontré un théorème de comparaison p-adique cristallin pour les schémas en groupes finis localement libres en utilisant la théorie de Dieudonné cristalline de Berthelot, Breen et Messing. Théorème 4.1 (2) de ce papier s'est obtenu du [**CL98**] Théorème 3.6 en passant à la limite.

Lorsque R est un anneau noethérien normal local de corps résiduel parfait de caractéristique p et de corps des fractions de caractéristique 0, Lau a aussi obtenu dans [**Lau**] des résultats analogues sur le module de Tate en utilisant la théorie de display de Zink. Ses résultats sont aussi valables pour $p = 2$.

On détaillera la démonstration de ce théorème plus loin, démonstration qui est essentiellement celle de l'article de Faltings. Notons d'abord le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 4.3. — *Avec les même hypothèses que celles du Théorème 4.1, on a un isomorphisme*
$$V_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} E \otimes_{A_{cris}(\overline{R})} B_{cris}(\overline{R})$$
qui est compatible aux filtrationx, aux actions de Γ et aux morphismes de Frobenius si on munit le membre de gauche du Frobenius $p \otimes \varphi$ et celui de droite de $\varphi \otimes \varphi$.

Soit H un groupe p-divisible sur R. Notons $T_p(H)$ le module de Tate associé à H et $V_p(H) := T_p(H)[1/p]$. Ces modules de Tate sont associés au choix fait au tout début d'une clôture algébrique de $\operatorname{Frac}(R)$ (cf. section 2.1). On a
$$T_p(H) = \operatorname{Hom}\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\widehat{\overline{R}}}\right).$$

L'application
$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\widehat{\overline{R}}}) \to \operatorname{Hom}_{\varphi,\operatorname{Fil}}\left(\mathbb{D}\mathrm{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{cris} \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}},\ \mathbb{D}\mathrm{F}(H)_{A_{cris} \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}}\right) = T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H))$$

induit un morphisme de $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-modules

$$\beta_H : T_p(H) \to T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H)).$$

Corollaire 4.4. — *Supposons que* $\mathrm{Lie}\, H$ *et* $\mathrm{Lie}(H^\vee)$ *soient des R-modules libres. Le morphisme de périodes*

$$\beta_H : T_p(H) \to T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H))$$

est alors un isomorphisme.

On reporte la preuve de ce corollaire à la fin de cet article.

4.2. Préparatifs à la preuve. — Sous les hypothèses du théorème 4.1, posons

$$E = \mathcal{E}_{A_{cris}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}}.$$

C'est un A_{cris}-module libre. Il possède de plus une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que

$$\mathrm{Fil}\, E = \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_r \oplus A_{cris} e_{r+1} \oplus \cdots \oplus A_{cris} e_n.$$

D'après le point (1) de la proposition 3.4 $\varphi(\mathrm{Fil}\, E) \subset pE$. On note

$$\varphi_1 = \tfrac{\varphi}{p} : \mathrm{Fil}\, E \longrightarrow E.$$

Le point (3) de la proposition 3.4 et le lemme 2.8 entrainent la proposition suivante.

Proposition 4.5. — *La collection* $(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_r), \varphi_1(e_{r+1}), \cdots, \varphi_1(e_n))$ *est une base de E.*

On note dans la suite $\delta_i = 1$ si $1 \leq i \leq r$, et $\delta_i = 0$, si $r+1 \leq i \leq n$. Pour

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{Fil}\, E$$

on a la formule

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\delta_i}(x_i)\varphi_{1-\delta_i}(e_i).$$

Pour $r \in \mathbb{N}$ on définit $\mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)$ comme étant l'image de $\mathrm{Fil}\, E$ dans $E/p^{r+1}E$ c'est à dire

$$E/p^{r+1}E = \mathcal{E}_{A_{cris}/p^{r+1}A_{cris} \twoheadrightarrow \overline{R}/p^{r+1}\overline{R}}$$

et

$$\mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E) = (\mathrm{Fil}\, \mathcal{E})_{A_{cris}/p^{r+1}A_{cris} \twoheadrightarrow \overline{R}/p^{r+1}\overline{R}}.$$

Puisque $E/\mathrm{Fil}\, E$ est sans p-torsion on a $\mathrm{Fil}\, E \cap p^{r+1}E = p^{r+1}\,\mathrm{Fil}\, E$. L'opérateur semi-linéaire $\varphi_1 : \mathrm{Fil}\, E \to E$ fournit donc par réduction modulo p^{r+1} un opérateur semi-linéaire

$$\varphi_1 : \mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E) \longrightarrow E/p^{r+1}E.$$

On vérifie facilement le lemme qui suit.

Lemme 4.6. — *Pour* $0 \leq i < p-1$ *on a* $\varphi_i(\mathrm{Fil}^p A_{cris}) \subset pA_{cris}$.

Notons $\mathrm{Fil}\big(E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\big)$ pour l'image de $\mathrm{Fil}\, E$ dans $E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)$. Les modules $E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)$ et $\mathrm{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E))$ sont les évaluations des modules $\mathcal{E}$ et $\mathrm{Fil}\,\mathcal{E}$ sur l'épaississement

$$\theta : A_{cris}/(p^{r+1}A_{cris} + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}) \twoheadrightarrow \overline{R}/p^{r+1}R.$$

Comme précédemment, puisque $E/\mathrm{Fil}\, E$ est sans p-torsion, on a

$$\mathrm{Fil}\, E \cap (p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E) = p^{r+1}\mathrm{Fil}\, E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E.$$

On déduit donc du lemme précédent que $\varphi_1 : \mathrm{Fil}\, E \to E$ induit un opérateur semi-linéaire

$$\varphi_1 : \mathrm{Fil}\big(E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\big) \longrightarrow E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E).$$

4.3. Démonstration du point (1) du Théorème 4.1. — On montre dans cette sous-section que $\dim_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} = n$. La preuve se divise en trois étapes.

1. On montre dans le lemme 4.7 que
$$\mathrm{Fil}(E/pE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}(E/pE + \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}.$$
2. On montre dans le lemme 4.9 que $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Fil}(E/pE + \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} = n$.
3. On montre dans le lemme 4.12 que $(\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \to \mathrm{Fil}(E/pE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ est surjectif.

Cela nous permettra de conclure car $(\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module p-adiquement complet sans p-torsion et $\ker((\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \to \mathrm{Fil}(E/pE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}) = p(\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$.

Commençons par la première étape.

Lemme 4.7. —

(1) L'application de réduction modulo $\mathrm{Fil}^p A_{cris}$ *induit un isomorphisme*
$$\mathrm{Fil}(E/pE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}\big(E/(pE + \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\big)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}.$$

(2) Similairement, pour $r \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}\big(E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\big)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}.$$

Démonstration. — Utilisant le lemme 4.6 il est aisé de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}\big(E/(p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\big)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \\ x & \longmapsto & \varphi_1(\widetilde{x}), \end{array}$$

où $\widetilde{x} \in \mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)$ est un relèvement quelconque de x, est bien définie indépendamment du choix d'un tel relèvement et est un inverse à l'application de réduction modulo $\mathrm{Fil}^p A_{cris}$. $\square$

On vérifie que pour $0 \leq i < p$, $\varphi_i : \mathrm{Fil}^i A_{cris} \to A_{cris}$ passe au quotient en une application de $\mathrm{Fil}^i A_{cris} + pA_{cris}/pA_{cris} + \mathrm{Fil}^p A_{cris}$ dans lui-même.

Lemme 4.8. — *Munissons $\overline{R}/p\overline{R}$ de la filtration suivante : pour $i \geq 0$*

$$\mathrm{Fil}^i\, \overline{R}/p\overline{R} = p^{i/p}\overline{R}/p\overline{R}.$$

Munissons le également des Frobenius divisés : pour $0 \leq i < p$

$$\forall \overline{x} \in \mathrm{Fil}^i\, \overline{R}/p\overline{R},\ \varphi_i(\overline{x}) = \frac{x^p}{(-p)^i} \bmod p.$$

Il existe alors un isomorphisme d'anneaux

$$\gamma : A_{cris}(\overline{R})/(pA_{cris}(\overline{R}) + \mathrm{Fil}^p\, A_{cris}(\overline{R})) \xrightarrow{\sim} \overline{R}/p\overline{R}$$

compatible à la filtration image de celle de A_{cris} et aux Frobenius divisés $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq p-1}$.

Démonstration. — On a un homomorphisme naturel surjectif :

$$\alpha : W(S) \longrightarrow A_{cris}/\,\mathrm{Fil}^p\, A_{cris}$$

de noyau $\ker(\alpha) = W(S) \cap \mathrm{Fil}^p\, A_{cris} = \xi^p W(S)$. En effet, soit

$$x = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^n}{n!} \in W(S) \cap \mathrm{Fil}^p\, A_{cris}.$$

Alors $\theta(x) = 0$ et donc $x = \xi \cdot b$, où $b \in W(S)$. Puisque l'élément ξ est régulier dans $B^+_{dR}(\overline{R})$, on a dans $B^+_{dR}(\overline{R})$

$$b = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^{n-1}}{n!}.$$

La formule précédente implique que $\theta(b) = 0$. Par récurrence sur j, $0 \leq j \leq p$, on montre ainsi que $x = \xi^j b_j$ où $b_j \in W(S)$ s'écrit dans $B^+_{dR}(\overline{R})$

$$b_j = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^{n-j}}{n!}.$$

On conclut que $x \in \xi^p W(S)$.

L'homomorphisme α induit modulo p un isomorphisme qu'on note encore α :

$$\alpha : S/\underline{p}^p = W(S)/(p, \xi^p) \xrightarrow{\sim} A_{cris}(\overline{R})/(p, \mathrm{Fil}^p\, A_{cris}(\overline{R})).$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{array}{rcl} \beta : S/\underline{p}^p S & \longrightarrow & \overline{R}/p\overline{R} \\ x \bmod \underline{p}^p & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

On affirme que β est un isomorphisme d'anneaux. D'après la définition de S, on voit aussitôt que β est un homomorphisme d'anneaux. La surjectivité de β est due à la surjectivité du Frobenius sur $\overline{R}/p\overline{R}$. Concernant l'injectivité, il suffit d'utiliser l'argument suivant. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x \in \widehat{\overline{R}}$,

$$x^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}} \Longrightarrow x \in p^{1/p^i}\widehat{\overline{R}}.$$

Soit en effet un tel x. Écrivons $x = a + pb$ avec $a \in \overline{R}$ et $b \in \widehat{\overline{R}}$. L'hypothèse $x^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}}$ implique que $a^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}} \cap \overline{R} = p\overline{R}$. Puisque $\overline{R}$ est intégralement clos, $a \in p^{1/p^i}\overline{R}$, d'où le résultat pour x.

En composant β avec α^{-1}, on obtient l'isomorphisme $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$ désiré. Il reste à vérifier les compatibilités aux filtrations et aux Frobenius divisés. La compatibilité aux filtrations est évidente puisque $\gamma(\xi^i) = (-p^{1/p})^i$. Pour la compatibilité aux Frobenius divisées φ_i, il suffit de vérifier que $\varphi_i \circ \gamma(\xi^i) = \gamma \circ \varphi_i(\xi^i)$ pour $0 \leq i \leq p-1$, car les Frobenius φ_i sur $A_{cris}(\overline{R})/(p, \mathrm{Fil}^p A_{cris}(\overline{R}))$ et $\overline{R}/p\overline{R}$ sont tous des homomorphismes semi-linéaires. Cela ne pose pas de problème. $\square$

Ainsi l'épaississement de NCRIS(S/Σ) donné par

$$\theta : A_{cris}/(pA_{cris} + \mathrm{Fil}^p A_{cris}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}/p\widehat{\overline{R}}$$

s'identifie à l'épaississement

$$\overline{R}/p\overline{R} \xrightarrow{\text{Frob}} \overline{R}/p\overline{R}.$$

On note désormais

$$\widetilde{\gamma} : A_{cris} \longrightarrow A_{cris}/(pA_{cris} + \mathrm{Fil}^p A_{cris}) \xrightarrow{\gamma} \overline{R}/p\overline{R}.$$

Lemme 4.9. — *On a l'égalité*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Fil}\left(E/(pE + \mathrm{Fil}^p A_{cris}E)\right)^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} = n.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathrm{Fil}(E \otimes_{A_{cris},\tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ est de cardinal p^n. Soit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i e_i \in \mathrm{Fil}(E \otimes_{A_{cris},\tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$$

où $x_1, \dots, x_r \in p^{1/p}\overline{R}$ et $x_{r+1}, \dots, x_n \in \overline{R}$. Soit

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R}/p\overline{R})$$

la matrice de passage de la base $(\varphi_{1-\delta_i}(e_i))_i$ à la base $(e_i)_i$ de $E \otimes_{A_{cris},\tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R}$, i.e.

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}\varphi_{1-\delta_i}(e_i)$$

pour $1 \leq j \leq n$, avec $a_{ij} \in \overline{R}$. Alors la matrice relevée $(a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$.

L'équation $\varphi_1(x) = x$ s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\delta_i}(\bar{x}_i)\varphi_{1-\delta_i}(e_i) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \bar{a}_{ij}\bar{x}_j\varphi_{1-\delta_i}(e_i).$$

Cela est équivalent au système d'équations

$$\forall i \leq r,\ x_i^p \equiv -p \sum_j a_{ij} x_j \mod p^2,$$
$$\forall i > r,\ x_i^p \equiv \sum_j a_{ij} x_j \mod p.$$

On montre dans le lemme 4.10 qu'il y a un unique relèvement $(y_i)_i \in \overline{R}^n$ des $(\bar{x}_i)_i \in (\overline{R}/p\overline{R})^n$ tel que $y_i^p = (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{i,j} y_j$ pour $1 \leq i \leq n$. Posons

$$B = \overline{R}[U_1, \cdots, U_n]/(U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i$$

qui est une R-algèbre finie et plate sur $\overline{R}$ d'après le lemme 4.11 qui suit. On en déduit une bijection

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}(E \otimes_{A_{cris}(\overline{R})} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(B, \overline{R}) \\ (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) &\mapsto [U_i \mapsto y_i] \end{aligned}$$

On montre maintenant que $B[1/p] \simeq \overline{R}[1/p]^{p^n}$. On peut choisir une extension finie $R' \subset \overline{R}$ de R, telle que B provient du changement de base de R', i.e. $B = B' \otimes_{R'} \overline{R}$, où

$$B' = R'[U_1, \cdots, U_n]/(U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i.$$

D'après la définition de $\overline{R}$, il suffit alors de montrer que $B'[1/p]$ est étale sur $R'[1/p]$.

La matrice jacobienne associée à la présentation de B' écrite ci-dessus est

$$\triangle = \mathrm{diag}(pU_i^{p-1})_{1 \leq i \leq n} - \mathrm{diag}((-p)^{\delta_i})_{1 \leq i \leq n} \cdot A$$

Alors,

$$\mathrm{diag}((-p)^{-\delta_i})_{1 \leq i \leq n} \cdot \Delta = \mathrm{diag}\left((-1)^{-\delta_i} p^{1-\delta_i} U_i^{p-1}\right)_{1 \leq i \leq n} - A$$

Si $1 \leq i \leq r$, $U_i^p \in pB'$ et donc $p^{1-\delta_i} U_i^{p-1}$ est p-adiquement topologiquement nilpotent. Si $r < i \leq n$, $p^{1-\delta_i} U_i^{p-1} = pU_i^{p-1}$ qui l'est donc également. Comme A est inversible et la matrice diagonale du terme à droite de l'équation précédente est p-adiquement topologiquement nilpotente dans l'anneau B' qui est p-adiquement complet car fini sur R', la matrice $\triangle$ est inversible dans $B'[1/p]$. D'où le résultat.

Le normalisé $\tilde{B}$ de B est donc isomorphe à $\overline{R}^{p^n}$ ce qui implique que

$$\mathrm{Fil}(E \otimes_{A_{cris}(\overline{R}), \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} = \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\tilde{B}, \overline{R})$$

est de cardinal p^n. □

Lemme 4.10. — *Soit* $(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$. *Soit* $(x_i)_{1\le i\le n} \in \overline{R}^n$ *vérifiant les congruences*

$$\forall i \le r,\ x_i^p \equiv -p \sum_j a_{ij}x_j \mod p^2,$$
$$\forall i > r,\ x_i^p \equiv \sum_j a_{ij}x_j \mod p.$$

Il existe alors une unique collection $(y_i)_{1\le i\le n} \in \overline{R}^n$ *congruente à* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *modulo* p *telle que*

$$\forall i \le r,\ y_i^p = -p \sum_j a_{ij}y_j,$$
$$\forall i > r,\ y_i^p = \sum_j a_{ij}y_j.$$

Démonstration. — Il s'agit d'une variante de la méthode de Newton faisant intervenir des congruences modulo p et p^2 simultanément. Pour $\epsilon \ge 1$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, et $(y_i)_{1\le i\le n} \in \overline{R}^n$ vérifiant $y_i \in p^{\delta_i/p}\overline{R}$, remarquons que les quantités

$$y_i^p \bmod p^{\epsilon+\delta_i} \quad \text{et} \quad (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij}y_i \bmod p^{\epsilon+\delta_i}$$

ne dépendent que de la classe de congruence modulo p^ϵ de $(y_i)_i$. Pour un tel ϵ, on dit alors que

$$(\bar{y}_i)_{1\le i\le n} \in \prod_{1\le i\le n} p^{\delta_i/p}\overline{R}/p^\epsilon\overline{R}$$

est une solution du système d'équations (E_ϵ) si

$$\forall i, \quad y_i^p \equiv (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij}y_j \bmod p^{\epsilon+\delta_i}.$$

Soit $(\bar{y}_i)_i$ une solution de (E_ϵ). Montrons que pour $\epsilon' \in]\epsilon, \epsilon + \frac{p-1}{p}[$, il existe une unique solution

$$(\bar{y}'_i)_i \in \prod_{1\le i\le n} p^{\delta_i/p}\overline{R}/p^{\epsilon'}\overline{R}$$

de $(E_{\epsilon'})$ qui relève $(\bar{y}_i)_i$.

Pour $1 \le i \le n$, on cherche y'_i sous la forme $y'_i = y_i + p^\epsilon b_i$. On vérifie que l'hypothèse $\epsilon' \in]\epsilon, \epsilon + \frac{p-1}{p}[$ implique que

$$y_i'^p \equiv y_i^p \bmod p^{\epsilon'+\delta_i}.$$

Pour tout i, notons $z_i \in \overline{R}$ tel que

$$y_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij}y_j = p^{\epsilon+\delta_i} z_i.$$

Dire que $(\bar{y}'_i)_i$ est solution de $(E_{\epsilon'})$ est alors équivalent à ce que pour tout i on ait

$$z_i \equiv (-1)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} b_j \bmod p^{\epsilon'-\epsilon}.$$

Si $A = ((-1)^{\delta_i} a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$, Z est le vecteur colonne $(z_i)_i$ et W le vecteur colonne $(b_i)_i$, cela est encore équivalent à ce que

$$Z \equiv A.W \bmod p^{\epsilon'-\epsilon}$$

soit encore

$$W \equiv A^{-1}.Z \bmod p^{\epsilon'-\epsilon}.$$

Le résultat s'en déduit. □

Lemme 4.11. — *Soit A un anneau, $n \geq 1$ et $d \geq 2$ deux entiers et $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$. Posons pour $1 \leq i \leq n$,*

$$f_i = U_i^d - \sum_{j=1}^n a_{ij} U_j \in A[U_1, \ldots, U_n].$$

Alors, la A-algèbre

$$B = A[U_1, \ldots, U_n]/(f_i)_{1 \leq i \leq n}$$

est un A-module libre de base les images des $\{U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n} | 0 \leq i_k < d, k = 1, \cdots, n\}$.

Démonstration. — Le fait que les éléments annoncés engendrent le A-module B ne pose pas de problème. Il reste à vérifier qu'ils sont linéairement indépendants. Soit $C = A[U_1, \cdots, U_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. Soient $(g_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^n$ tels que $\sum_{i=1}^n g_i f_i$ soit une combinaison linéaire de $(U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n})_{0 \leq i_k < d}$. On veut montrer que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 0$.

Posons $m = \max_{1 \leq i \leq n}(\deg g_i)$. Soit $g_{i,m}$ la partie homogène de degré m de g_i. En considérant la partie homogène de degré $m+d$ de $\sum_{i=1}^n f_i g_i$, on a $\sum_{i=1}^n g_{i,m} U_i^d = 0$. On peut donc écrire $g_{i,m}$ sous la forme $g_{i,m} = \sum_{j=1, j \neq i}^n h_{ij} U_j^d$, où $h_{ij} \in C$ est homogène tel que $h_{ij} + h_{ji} = 0$ pour $i \neq j$. Posons $\psi_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n h_{ij} f_j$, $1 \leq i \leq n$, on a

$$\sum_i \psi_i f_i = \sum_{i \neq j} h_{ij} f_j f_i = \sum_{i<j} (h_{ij} + h_{ji}) f_i f_j = 0.$$

Posons $g'_i = g_i - \psi_i$. On obtient $\sum_{i=1}^n g'_i f_i = \sum_{i=1}^n g_i f_i$ et $\max_i \deg g'_i < m$. Alors par récurrence sur m, on peut supposer $m = 0$. Cela implique que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 0$. □

Lemme 4.12. — *Le morphisme*

$$(\mathrm{Fil}\, E)^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} \to \mathrm{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \mathrm{Id}}$$

est surjectif.

Démonstration. — Pour $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on montre que
$$\mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}} \to \mathrm{Fil}(E/p^rE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$$
est surjectif. Pour $i \geq 0$ notons
$$\mathrm{Fil}^i(A_{cris}/p^rA_{cris})$$
l'image de $\mathrm{Fil}^i A_{cris}$ dans A_{cris}/p^rA_{cris}. L'anneau $A_{cris}/\mathrm{Fil}^i A_{cris}$ est sans p-torsion car le gradué de sa PD-filtration l'est (cf. lemme 2.6). On a donc $\mathrm{Fil}^i A_{cris} \cap p^rA_{cris} = p^r \mathrm{Fil}^i A_{cris}$ et
$$\mathrm{Fil}^i(A_{cris}/p^rA_{cris}) = \mathrm{Fil}^i A_{cris}/p^r \mathrm{Fil}^i A_{cris}.$$
Soit maintenant
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i \in \mathrm{Fil}(E/p^rE)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$$
où $x_i \in \mathrm{Fil}^{\delta_i} A_{cris}$ et $\bar{x}_i \in \mathrm{Fil}^{\delta_i}(A_{cris}/p^rA_{cris})$. On cherche
$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^n \bar{x}'_i e_i \in \mathrm{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$$
où $\bar{x}'_i \in \mathrm{Fil}^{\delta_i}(A_{cris}/p^{r+1}A_{cris})$ est tel que $x'_i \equiv x_i \mod p^r$. On cherche alors $(x'_i)_i$ sous la forme
$$x'_i = x_i + p^r b_i$$
où $b_i \in \mathrm{Fil}^{\delta_i} A_{cris}$.

D'après le lemme 4.7, il suffit de trouver de tels $(b_i)_i$ de telle manière que
$$\varphi_1(x') \equiv x' \mod p^{r+1}E + p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris}E.$$

Cette équation s'écrit
$$\forall i, \quad \varphi_{\delta_i}(x_i + p^r b_i) \equiv \sum_j a_{ij}(x_j + p^r b_j) \mod (p^{r+1},\ p^r \mathrm{Fil}^p A_{cris})$$
où $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A_{cris})$ est la matrice de passage de la base $(\varphi_{1-\delta_i}(e_i))_i$ à la base $(e_i)_i$. Cela s'écrit encore pour tout i,
$$\frac{\varphi_{\delta_i}(x_i) - \sum_j a_{ij}x_j}{p^r} + \varphi_{\delta_i}(b_i) \equiv \sum_j a_{ij}b_j \mod (p, \mathrm{Fil}^p A_{cris})$$

On utilise maintenant l'isomorphisme $\gamma : A_{cris}/(p, \mathrm{Fil}^p A_{cris}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}/p\overline{R}$. Rappelons qu'on note $\tilde{\gamma} : A_{cris} \to \overline{R}/p\overline{R}$ le morphisme composé. Écrivons dans $\overline{R}/p\overline{R}$,
$$\tilde{\gamma}(b_i) \equiv p^{\delta_i/p} c_i \mod p$$
où $c_i \in \overline{R}$. Les équations déduites dans $\overline{R}/p\overline{R}$ sont alors
$$(-1)^{\delta_i} c_i^p - \sum_j \bar{d}_{ij} p^{\delta_j/p} c_j + \bar{s}_i \equiv 0 \mod p$$

où

$$\bar{d}_{ij} = \tilde{\gamma}(a_{ij}) \in \overline{R}/p\overline{R} \quad \text{et} \quad \bar{s}_i = \tilde{\gamma}\Big(\frac{\varphi_{\delta_i}(x_i) - \sum_j a_{ij}x_j}{p^r}\Big) \in \overline{R}/p\overline{R}.$$

Choisissons des relèvements $(d_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$, $(s_i)_i \in \overline{R}$ de $(\bar{d}_{ij})_{i,j}$ et $(\bar{s}_i)_i$. On se ramène à resoudre les équations suivantes dans $\overline{R}$:

$$(-1)^{\delta_i} Y_i^p - \sum_j d_{ij} p^{\delta_j/p} Y_j + s_i = 0.$$

En appliquant la méthode utilisée dans la preuve du lemme 4.9 on montre que l'algèbre

$$\overline{R}[1/p][Y_i]_{1 \le i \le n} / \big((-1)^{\delta_i} Y_i^p - \sum_j d_{ij} p^{\delta_j/p} Y_j + s_i\big)_i$$

est étale sur $\overline{R}[1/p]$. Le résultat en découle.

$\square$

5. Accouplement de Weil

On commence par un lemme qui servira à la définition de l'accouplement de Weil.

Lemme 5.1. — *$T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)) = (\mathrm{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R}))^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} = \mathbb{Z}_p \cdot t.$*

Démonstration. — D'après la sous-section 4.3, le $\mathbb{Z}_p$-module $(\mathrm{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ est libre de rang 1. D'autre part, $\mathbb{Z}_p \cdot t \subset (\mathrm{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$. Pour montrer l'égalité, il suffit donc de montrer que l'image de t dans $A_{cris}/(p, \mathrm{Fil}^p A_{cris})$ est non-nulle. En utilisant la déscription explicite de l'isomorphisme

$$\gamma : A_{cris}(\overline{R})/(p, \mathrm{Fil}^p A_{cris}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}/p\overline{R},$$

on calcule directement $\gamma(\bar{t}) = \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n-1} \frac{(\epsilon_1 - 1)^n}{n} \neq 0$, où ϵ_1 est une racine primitive p-ième de l'unité. $\square$

Reprenons les hypothèses et notations de la section 4.2. Soit $\big(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\mathrm{Fil}\,\mathcal{E}_S)^\perp\big)$ le dual de Cartier de $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \mathrm{Fil}\,\mathcal{E}_S)$ (cf. section 3.2.4). Posons

$$E^\vee = \mathcal{E}^\vee_{A_{cris} \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}}.$$

D'après la définition du dual de Cartier, on vérifie aussitôt les propriétés suivantes de $E^\vee$.

- En tant que $A_{cris}(\overline{R})$-module : $E^\vee = \mathrm{Hom}_{A_{cris}(\overline{R})}(E, A_{cris}(\overline{R}))$. On désigne par $(e_i^\vee)_i$ la base duale de $(e_i)_i$.
- Structure de φ : pour $f \in E^\vee$, $\varphi(f) = \varphi \circ (f \otimes 1) \circ \Psi$ au sens suivant

  $$\varphi(f) : E \xrightarrow{\Psi} E \otimes_{A_{cris}, \varphi} A_{cris} \xrightarrow{f \otimes 1} A_{cris} \xrightarrow{\varphi} A_{cris}$$

  où Ψ désigne encore l'opérateur associé à $\Psi : \mathcal{E} \to \mathrm{Frob}^* \mathcal{E}$ par évaluation du cristal.

– Structure de filtration :

$$\begin{aligned}\operatorname{Fil} E^\vee &= \{f \in E^\vee \mid f(\operatorname{Fil} E) \subset \operatorname{Fil}^1 A_{cris}\}\\ &= A_{cris} e_1^\vee \oplus \cdots \oplus A_{cris} e_r^\vee \oplus \operatorname{Fil}^1 A_{cris} e_{r+1}^\vee \oplus \cdots \oplus \operatorname{Fil}^1 e_n^\vee.\end{aligned}$$

Les éléments $(\varphi_{\delta_i}(e_i^\vee))_i$ forment aussi une base de $E^\vee$ (cf. prop. 4.5). De plus, si $A' = (a'_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A_{cris})$, resp. $B' = (b'_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A_{cris})$, est la matrice de passage telle que pour tout i,

$$e_i = \sum_j a'_{ij} \varphi_{1-\delta_j}(e_j), \quad \text{resp. } e_i^\vee = \sum_j b'_{ij} \varphi_{\delta_j}(e_j^\vee),$$

on vérifie aussitôt que $B' = {}^t A'^{-1}$.

Les résultats dans la sous-section 4.3 s'appliquent à $(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\operatorname{Fil} \mathcal{E}_S)^\perp)$. On en déduit que $T_p(\mathcal{E}^\vee)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n. L'application naturelle $E \times E^\vee \to A_{cris}(\overline{R})$ induit un *accouplement de Weil* :

$$T_p(\mathcal{E}) \times T_p(\mathcal{E}^\vee) \to (\operatorname{Fil}^1 A_{cris}(\overline{R}))^{\varphi_1 = \mathrm{Id}} = \mathbb{Z}_p \cdot t \cong \mathbb{Z}_p(1).$$

Proposition 5.2. — *L'accouplement de Weil est parfait au sens où il induit un isomorphisme $T_p(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\sim} T_p(\mathcal{E})^*(1)$.*

Démonstration. — Comme $T_p(\mathcal{E})$ et $T_p(\mathcal{E}^\vee)$ sont libres de même rang, il suffit de montrer que modulo p, l'accouplement de Weil est non dégénéré au sens où pour $f \in T_p(\mathcal{E}^\vee)/pT_p(\mathcal{E}^\vee)$, si pour tout $x \in T_p(\mathcal{E})/pT_p(\mathcal{E})$, $< f, x >= 0 \in \mathbb{F}_p(1)$, alors $f = 0$. D'après les résultats de la section précédente, on se ramène à travailler modulo l'idéal $(p, \operatorname{Fil}^p A_{cris})$. Soit donc

$$f = \sum_i \overline{\lambda}_i e_i^\vee \in \operatorname{Fil}(E^\vee \otimes_{A_{cris}, \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \mathrm{Id}},$$

où $\overline{\lambda}_i \in p^{\frac{1-\delta_i}{p}} \overline{R}/p\overline{R}$, tel que pour tout

$$x = \sum_i \overline{x}_i e_i \in \operatorname{Fil}(E \otimes_{A_{cris}, \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \mathrm{Id}},$$

où $\overline{x}_i \in p^{\delta_i/p} \overline{R}/p\overline{R}$, on ait $< f, x >= 0 \in \overline{R}/p\overline{R}$.

Rappelons que dans la démonstration du lemme 4.9, on a obtenu une bijection

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(B, \overline{R}) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Fil}(E \otimes_{A_{cris}, \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \mathrm{Id}}\\ [U_i \mapsto x_i] &\mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x}_i e_i\end{aligned}$$

où

$$B = \overline{R}[U_1, \cdots, U_n]/(U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i$$

et $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$ est telle que $A \equiv \left(\tilde{\gamma}(a'_{ij})\right)_{i,j} \bmod p$ dans $\mathrm{GL}_n(\overline{R}/p\overline{R})$.

Soit $\widetilde{B}$ le normalisé de B. On a d'après la preuve du lemme 4.9

$$\widetilde{B} \simeq \overline{R}^{p^n}.$$

Soit $C = B\big[p^{-\frac{\delta_i}{p}} U_i\big]_{1\leq i\leq n} \subset \widetilde{B}$. Posons maintenant

$$b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \in C.$$

Puisque $\lambda_i \in p^{\frac{1-\delta_i}{p}} \overline{R}$ et $U_i \in p^{\frac{\delta_i}{p}} C$ on a

$$\begin{aligned} b^p &\equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p U_i^p \bmod p^2 \\ &\equiv \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(-p)^{\delta_i} \lambda_i^p U_j \bmod p^2. \end{aligned}$$

Soit $(b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R})$ dont la réduction modulo p est la matrice $(\tilde{\gamma}(b'_{ij}))_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\overline{R}/p\overline{R})$. L'équation $\varphi_1(f) = f$ se traduit en

$$\forall i, \quad \lambda_i^p \equiv (-p)^{1-\delta_i} \sum_j b_{ij}\lambda_j \bmod p^{2-\delta_i}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} b^p &\equiv -p \sum_{j,k=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ik}\big) \lambda_k U_j \bmod p^2 \\ &\equiv -pb \bmod p^2 \end{aligned}$$

car $B' = {}^t A'^{-1}$. D'après le lemme 4.10 (qui s'applique de façon identique à l'anneau C à la place de $\overline{R}$) il existe un unique $b' \in C$ congruent à b modulo pC et vérifiant $b'^p = -pb'$. L'hypothèse affirmant que pour tout $x \in \mathrm{Fil}(E \otimes_{A_{cris},\tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ on a $< f, x >= 0$ se traduit en en disant que pour tout morphisme de $\overline{R}$-algèbres $\chi : \widetilde{B} \longrightarrow \overline{R}$, on a

$$\chi(b') \equiv 0 \bmod p.$$

Pour un tel χ, l'équation $\chi(b')^p = -p\chi(b')$ implique que $\chi(b') \in p^{1/(p-1)}\overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ ou bien $\chi(b') = 0$. Mais,

$$p^{1/(p-1)}\overline{\mathbb{Z}}_p^\times \cap p\overline{R} = \emptyset.$$

On en déduit que $b' = 0$ et donc $b \in pC$. Utilisant le lemme 4.11 on vérifie que C est un $\overline{R}$-module libre de base

$$\big(p^{-i_1\frac{\delta_1}{p}} U_1^{i_1} \dots p^{-i_n\frac{\delta_n}{p}} U_n^{i_n}\big)_{0\leq i_1,\dots,i_n<p}.$$

La congruence précédente $b \in pC$ se traduit donc en

$$\forall i, \quad \lambda_i \in p^{1-\frac{\delta_i}{p}} \overline{R}.$$

On a donc $\bar{\lambda}_i = 0$ si $\delta_i = 0$. Cependant, l'équation $\varphi_1(f) = f$ fournit l'égalité

$$f = \sum_i \varphi_{1-\delta_i}(\bar{\lambda}_i)\varphi_{\delta_i}(e_i^\vee).$$

Or, si $\delta_i = 1$, la relation $\lambda_i \in p^{1-1/p}\overline{R}$ implique que $\varphi_0(\bar{\lambda}_i) = 0$. On a donc $f = 0$. $\square$

Démonstration du Théorème 4.1. — L'accouplement parfait $T_p(\mathcal{E}) \times T_p(\mathcal{E}^\vee) \to \mathbb{Z}_p(1)$ induit un isomorphisme $\delta : T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \xrightarrow{\sim} T_p(\mathcal{E})(-1)$. Considérons les deux applications naturelles compatibles aux filtrations :

$$\omega : T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \to E,$$
$$\omega^\vee : T_p(\mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \to E^\vee.$$

et le morphisme transposé :

$${}^t\omega^\vee : E \xrightarrow{\sim} (E^\vee)^* \to T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R})$$

est compatible aux filtrations avec décalage de degré 1, i.e.,

$${}^t\omega^\vee(\mathrm{Fil}^i\, E) \subset T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris}(\overline{R}), \text{ pour } i \in \mathbb{Z}.$$

On considère le composé α :

$$E \xrightarrow{{}^t\omega^\vee} T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \xrightarrow{\delta\otimes\mathrm{Id}} T_p(\mathcal{E})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \xrightarrow{\times(t\otimes 1)} T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}.$$

Nous vérifions aussitôt que

$$\alpha \circ \omega = 1 \otimes t : T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \to T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}.$$

Comme $T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}$ et E sont des A_{cris}-modules libres de rang n, on peut donc calculer les déterminants pour les morphismes α, ω et $\alpha \circ \omega$:

$$t^n = \det \alpha \cdot \det \omega.$$

Puisque t est régulier dans A_{cris}, $\det \alpha$ et $\det \omega$ ne sont pas des zéro-diviseurs. On en déduit que ω et α sont injectifs. De plus α induit une injection

$$\alpha : E/\mathrm{Im}\omega \hookrightarrow T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}/\mathrm{Im}(\alpha \circ \omega) = T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}/1 \otimes t$$

qui implique que le conoyau de ω est annulé par t.

D'autre part, puisque ${}^t\omega^\vee$ est compatible aux filtrations avec décalage de degré 1, les autres composants dans le composé α sont compatibles aux filtrations. Alors $\alpha \circ \omega$ induit un morphisme entre les gradués :

$$\alpha \circ \omega = 1 \otimes t : T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{gr}^i A_{cris} \xrightarrow{\omega} \mathrm{gr}^i E \to T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{gr}^{i+1} A_{cris}, \forall i \in \mathbb{N}$$

qui est injectif, car $t : \mathrm{gr}^i A_{cris}(\overline{R}) \to \mathrm{gr}^{i+1} A_{cris}(\overline{R})$ l'est. Cela implique que ω est strictement compatible aux filtrations. $\square$

Démonstration du corollaire 4.4. — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_p(H) & \times & T_p(H^\vee) & \xrightarrow{<\cdot,\cdot>} & T_p(\widehat{\mathbb{G}}_m) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_H} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{H^\vee}} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H)) & \times & T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H)^\vee) & \xrightarrow{<\cdot,\cdot>} & T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)) = \mathbb{Z}_p \cdot t \end{array}$$

où les lignes sont toutes des accouplements parfaits d'après la proposition 5.2. Il est commutatif. En effet, si $(x, y) \in T_p(H) \times T_p(H^\vee)$,

$$x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H, \quad y : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H^\vee$$

alors

$$< x, y >= y^\vee \circ x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m$$

où $y^\vee : H = (H^\vee)^\vee \to \widehat{\mathbb{G}}_m$. On a alors

$$\mathbb{D}\mathrm{F}(y^\vee \circ x) = \mathbb{D}\mathrm{F}(y^\vee) \circ \mathbb{D}\mathrm{F}(x) = \mathbb{D}\mathrm{F}(y)^\vee \circ \mathbb{D}\mathrm{F}(x)$$

via l'isomorphisme de foncteurs $\mathbb{D}\mathrm{F}\big((-)^\vee\big) \simeq \mathbb{D}\mathrm{F}(-)^\vee : \mathrm{BT}_R \to \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$. On en déduit la commutativité.

Le morphisme composé

$$T_p(H) \xrightarrow{\beta_H} T_p(\mathbb{D}\mathrm{F}(H)) \xrightarrow{\sim} T_p\big(\mathbb{D}\mathrm{F}(H^\vee)\big)^\vee(1) \xrightarrow{\beta_{H^\vee}^\vee(1)} T_p(H^\vee)^\vee(1)$$

est un isomorphisme. On en déduit que $\beta_{H^\vee}^\vee(1)$ est surjectif. C'est donc un isomorphisme puisque $T_p\big(\mathbb{D}\mathrm{F}(H^\vee)\big)^\vee(1)$ et $T_p(H^\vee)^\vee(1)$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de même rang d'après le théorème 4.1. Le morphisme β_H est donc un isomorphisme.

$\square$

Références

[BBM82] P. Berthelot, L. Breen & W. Messing – *Théorie de dieudonné cristalline. ii*, vol. 930, Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.

[Ber74] P. Berthelot – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[BO78] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[Bri04] O. Brinon – *Représentation galoisiennes p-adiques dans le cas relatif*, 2004, Thèse de l'université Paris-Sud Orsay.

[Che] M. Chen – « Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes p-divisibles », *to appear in Int. Math. Res. Not., doi :10.1093/imrn/rns094*.

[CL98] A. Chambert-Loir – « Théorie de Dieudonné cristalline et périodes p-adiques », *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), no. 4, p. 545–562.

[Eis95] D. Eisenbud – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[Fal99] G. Faltings – « Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 1, p. 117–144.

[FO] J.-M. Fontaine & Y. Ouyang – *Theory of p-adic galois representations*, En préparation, http ://www.math.u-psud.fr/∼fontaine/recherche.html.

[Fon82] J.-M. Fontaine – « Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 3, p. 529–577.

[Gro64] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1964), no. 20, p. 259.

[Lau] E. Lau – « Displayed equations for galois representations », *arXiv :1012.4436*.

[Mes72] W. Messing – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[RZ96] M. Rapoport & T. Zink – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

, Department of Mathematics, East China Normal University, No. 500 Dong Chuan Road, Shanghai, 200241, P.R.China • *E-mail :* `mfchen@math.ecnu.edu.cn`