

第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

参考解答及评分标准

一、填空题(每小题6分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \frac{1}{4}.$

解:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) + \sqrt[3]{1 - \cos x}}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} + \frac{1}{4} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x - y) = x^2$ 所确定, 则 $\int \frac{dx}{y^2} = \frac{3y}{x} - 2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| + C.$

解: 令 $y = tx$, 则 $x = \frac{1}{t^2(1-t)}$, $y = \frac{1}{t(1-t)}$, $dx = \frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2} dt$,

这样, $\int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{-2+3t}{t} dt = 3t - 2 \ln |t| + C = \frac{3y}{x} - 2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| + C.$

3. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$

解:
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} de^x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \frac{\sin x e^x}{1 + \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \frac{\sin x e^x}{1 + \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

4. 已知 $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, 则 $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3} \right) + C.$

解:
$$du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} + 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} d \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3} \right).$$

所以, $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3} \right) + C.$

5. 设 $a, b, c, \mu > 0$, 曲面 $xyz = \mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 相切, 则 $\mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

解: 根据题意有: $yz = \frac{2x}{a^2} \lambda$, $xz = \frac{2y}{b^2} \lambda$, $xy = \frac{2z}{c^2} \lambda$, 以及

$$\mu = 2\lambda \frac{x^2}{a^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{y^2}{b^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{从而得: } \mu = \frac{8\lambda^3}{a^2 b^2 c^2}, \quad 3\mu = 2\lambda,$$

联立解得: $\mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、(14分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

解: 采用“球面坐标”计算, 并利用对称性, 得

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \frac{\rho^3 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \quad \text{-----5分}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \rho^3 d\rho$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi \quad \text{-----10分}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d(\sin \varphi)$$

$$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \frac{1}{48} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{72}. \quad \text{-----14分}$$

三、(14分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 且存在常数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 试证明: 在 $(0, +\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

证明: 设 $x_0 \in [0, \frac{1}{2A}]$, 使得 $|f(x_0)| = \max \left\{ |f(x)| \mid x \in [0, \frac{1}{2A}] \right\}$, -----5分

$$|f(x_0)| = |f(0) + f'(\xi)x_0| \leq A|f(x_0)| \frac{1}{2A} = \frac{1}{2}|f(x_0)|, \quad \text{只有 } |f(x_0)| = 0.$$

故当 $x \in [0, \frac{1}{2A}]$ 时, $f(x) \equiv 0$. -----12分

递推可得, 对所有的 $x \in [\frac{k-1}{2A}, \frac{k}{2A}]$, $k = 1, 2, \dots$, 均有 $f(x) \equiv 0$. -----14分

四、(14分) 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{\sin \theta (\cos \phi - \sin \phi)} \sin \theta d\theta$

解: 设球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 由球面参数方程

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta$$

知 $dS = \sin \theta d\theta d\phi$, 所以, 所求积分可化为第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} e^{x-y} dS \quad \text{-----4 分}$$

设平面 $P_t: \frac{x-y}{\sqrt{2}} = t, -1 \leq t \leq 1$, 其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ , 球面在平面 P_t, P_{t+dt} 之间的部分形如圆台外表面状, 记为 $\Sigma_{t,dt}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y} = e^{\sqrt{2}t}$. -----8 分

由于 $\Sigma_{t,dt}$ 半径为 $r_t = \sqrt{1-t^2}$, 半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2} = \frac{-t dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{t,dt}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t , 则由微元法知 $dt^2 + (d\sqrt{1-t^2})^2 = h_t^2$, 得到 $h_t = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{t,dt}$ 的面积为 $dS = 2\pi r_t h_t = 2\pi dt$, -----12 分

$$I = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{2}t} 2\pi dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}). \quad \text{-----14 分}$$

五、(14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. 试证: $c_n > 0$,

($n \geq 0$), 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

证明: 由 $f(x)$ 为仅有正实根的多项式, 不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, 这样,

$$f(x) = A(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_k)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根 a_i 的重数 ($i = 1, \dots, k, r_k \geq 1$). -----2 分

$$f'(x) = Ar_1(x - a_1)^{r_1-1} \dots (x - a_k)^{r_k} + \dots + Ar_k(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_k)^{r_k-1},$$

所以, $f'(x) = f(x) \left(\frac{r_1}{x-a_1} + \dots + \frac{r_k}{x-a_k} \right)$, 从而, $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$.

-----6 分

若 $|x| < a_1$, 则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_1}\right)^n + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_k}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}}\right) x^n.$$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 由幂级数的唯一性知

$$c_n = \frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}} > 0, \quad \text{-----9 分}$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1^{n+2}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+2}}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1} r_k}{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2} r_k}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + 0 + \dots + 0}{r_1 + 0 + \dots + 0} = a_1 > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a_1}, \quad \text{-----12 分}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) = \ln \frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n} = e^{\frac{\ln c_n}{n}} = e^{\frac{\ln c_1 + 1}{n} (\ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n})} \rightarrow e^{\ln \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{a_1}.$$

从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = a_1$, 即 $f(x)$ 的最小正根. -----14 分

六、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3[3 + f^2(x)]f'(x) = 2[1 + f^2(x)]^2 e^{-x^2},$$

且 $f(0) \leq 1$. 证明: 存在常数 $M > 0$, 使得 $x \in [0, +\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$.

证明: 由于 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的严格增函数, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (有限或为 $+\infty$). 下面证明 $L \neq +\infty$. -----2 分

记 $y = f(x)$, 将所给等式分离变量并积分得 $\int \frac{3+y^2}{(1+y^2)^2} dy = \frac{2}{3} \int e^{-x^2} dx$, 即

$$\frac{y}{1+y^2} + 2 \arctan y = \frac{2}{3} \int_0^x e^{-t^2} dt + C, \quad \text{-----6 分}$$

其中 $C = \frac{f(0)}{1+f^2(0)} + 2 \arctan f(0)$. -----8 分

若 $L = +\infty$, 则对上式取极限 $x \rightarrow +\infty$, 并利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 得 $C = \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3}$. -----10 分

另一方面, 令 $g(u) = \frac{u}{1+u^2} + 2 \arctan u$, 则 $g'(u) = \frac{3+u^2}{(1+u^2)^2} > 0$, 所以函数 $g(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 因此, 当 $f(0) \leq 1$ 时, $C = g(f(0)) \leq g(1) = \frac{1+\pi}{2}$, 但 $C > \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{2} > \frac{1+\pi}{2}$, 矛盾, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 为有限数.

最后, 取 $M = \max\{|f(0)|, |L|\}$, 则 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, +\infty)$. -----14 分