第十届全国大学生数学竞赛（非数学类）预赛试题及答案

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分)

（1）设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=$__0____________.

解　由于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)<n^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$，

于是 $0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}<\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$，应用两边夹法则，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=0$.

（2）若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为

$\underline{y-0=-(x-1)}$

解：当 $t=0$ 时，$x=1,y=0$，对 $x=t+\cos t$ 两边关于 t 求导：$\dfrac{dx}{dt}=1-\sin t$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$，

对 $e^{y}+ty+\sin t=1$ 两边关于 t 求导：$e^{y}\dfrac{dy}{dt}+y+t\dfrac{dy}{dt}+\cos t=0$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=-1$， 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$.

所以，切线方程为 $y-0=-(x-1)$.

（3）$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx=\underline{\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})+C}$

解 1：$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\ln(\tan t+\sec t)}{\sec t}dt=\int\ln(\tan t+\sec t)d\sin t$

$$=\int\ln(\tan t+\sec t)d\sin t=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\sin t\,d\ln(\tan t+\sec t)$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\sin t\frac{1}{\tan t+\sec t}(\sec^{2}t+\tan t\sec t)dt$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)+\ln|\cos t|+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})+C.$$

解 2：$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})d\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^{2}}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\right)dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\mathrm{C}$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$______3______.

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

二（**本题满分** 8 **分**）设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L\left[y(2-f(x^2-y^2))\right]dx+xf(x^2-y^2)dy$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解：设 $P(x,y)=y(2-f(x^2-y^2))$，$Q(x,y)=xf(x^2-y^2)$，由题设可知，积分与路径无关，于是有 $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，由此可知 $(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$

-----------5 分

记 $t=x^2-y^2$，则得微分方程 $tf'(t)+f(t)=1$，即 $(tf(t))'=1$，$tf(t))=t+C$

又 $f(1))=0$，可得 $C=-1,\ f(t))=1-\dfrac{1}{t}$，从而 $f(x^2-y^2)=1-\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

------------8 分

三（**本题满分** 14 **分**）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\leq f(x)\leq 3$.证明：

$$1\leq\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq\frac{4}{3}.$$

证明. 由柯西不等式

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \ge \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 = 1. \qquad \text{--------4 分}$$

又由于 $\left(f(x)-1\right)\left(f(x)-3\right)\le 0$，则$\left(f(x)-1\right)\left(f(x)-3\right)/\,f(x)\le 0$，

即 $f(x)+\dfrac{3}{f(x)}\le 4$， $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)dx \le 4$. ----------10 分

由于 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)+\int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx\right)^2$

故 $\displaystyle 1\le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{4}{3}$. -----------14 分

四（本题满分 12 分）计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{（V）}(x^2+y^2)\,dV$，其中（$V$）是由$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$，$z\ge 0$所围成的空心立体.

解：（1）$(V_1):\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z-1=r\cos\varphi \\ 0\le r\le 3, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_1)}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{8}{15}\cdot 3^5\cdot\pi \qquad \text{----------4 分}$$

（2）$(V_2):\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z-2=r\cos\varphi \\ 0\le r\le 2, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_2)}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{8}{15}\cdot 2^5\cdot\pi \qquad \text{----------8 分}$$

（3）$(V_3):\begin{cases} x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\le z\le 0 \\ 0\le r\le 2\sqrt{2}, 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_3)}(x^2+y^2)dV=\iint\limits_{r\le 2\sqrt{2}} rdrd\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0} r^2dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}} r^3(\sqrt{9-r^2}-1)dr=(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5})\pi$$

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dV=\iiint\limits_{(V_1)}(x^2+y^2)dV-\iiint\limits_{(V_2)}(x^2+y^2)dV-\iiint\limits_{(V_3)}(x^2+y^2)dV=\frac{256}{3}\pi \quad \text{------12 分}$$

五（本题满分 14 分）设 $f(x,y)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内。证明：$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|AB|$，其

中$|AB|$表示线段AB的长度.

证明：作辅助函数$\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$，----------2 分

显然$\varphi(t)$在$[0,1]$上可导.根据拉格朗日中值定理，存在$c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1) \qquad \text{------8 分}$$

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)|$$

$$\le\left[\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2\right]^{1/2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}\le M\,|AB| \qquad \text{------14 分}$$

六（本题满分 14 分） 证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1\ln f(x)dx$.

证：由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(x_k)$，其中$x_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$.

-----------4 分

由不等式 $\left(f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(x_k)$， 根据$\ln x$的单调性

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln f(x_k)\le\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\right), \qquad \text{------------12 分}$$

根据$\ln x$的连续性，两边取极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln f(x_k)\right)\le\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\right)\text{得}\int_0^1\ln f(x)dx\le\ln\int_0^1 f(x)dx. \qquad \text{---------14 分}$$

七（本题满分 14 分） 已知$\{a_k\}$，$\{b_k\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,\ k=1,2,\cdots\cdots$，$\delta$为一常数.证明：若级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

证明：令$S_k=\sum\limits_{i=1}^k a_ib_i$， $a_kb_k=S_k-S_{k-1}$， $S_0=0,\ a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}$， $k=1,2,\cdots\cdots$

----------4 分

$$\sum_{k=1}^N a_k=\sum_{k=1}^N\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\ge\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$收敛， ----------10 分

由不等式$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$知

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\le\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_{k+1}b_k}$，故结论成立.　　　---------14 分