

第十一届全国大学生数学竞赛试卷
(非数学类, 2019 年 10 月)

得分	
评阅人	

二 (本题满分 14 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$,

其中 Ω 是由曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$ 围成的区域在

第一卦限部分.

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30 分	14 分	14 分	14 分	14 分	14 分	100 分
得分							

注意: 本试卷共六大题, 满分 100 分, 考试时间为 150 分钟.

- 1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.
- 2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
- 3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

得分	
评阅人	

一 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x - y) = x^2$ 所确定,

则 $\int \frac{dx}{y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 已知 $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, 则 $u(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $a, b, c, \mu > 0$, 曲面 $xyz = \mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 相切,

则 $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$.

省(市) _____ 学校 _____ 准考证号 _____ 姓名 _____ 考场号 _____ 座位号 _____

密封线密封线密封线

省(市) _____ 学校 _____ 准考证号 _____ 姓名 _____ 考场号 _____ 座位号 _____

密封线密封线密封线

得分	
评阅人	

三 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微,
 $f(0) = 0$, 且存在常数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 在

$[0, +\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0, +\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

得分	
评阅人	

四 (本题满分 14 分) 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi e^{\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)} \sin\theta d\theta.$$

省(市) _____ 学校 _____ 准考证号 _____ 姓名 _____ 考场号 _____ 座位号 _____

密封线密封线密封线

得分	
评阅人	

五 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. 证明: $c_n > 0, (n \geq 0)$, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

得分	
评阅人	

六 (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数, 满足 $3[3 + f^2(x)]f'(x) = 2[1 + f^2(x)]^2 e^{-x^2}$, 且 $f(0) \leq 1$. 证明: 存在常数 $M > 0$, 使得 $x \in [0, +\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$.