

第九届全国大学生数学竞赛预赛试卷

(非数学类, 2017 年)

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	42 分	14 分	14 分	15 分	15 分	100 分
得分						

注意: 本试卷共五大题, 满分 100 分, 考试时间为 150 分钟.

- 1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.
- 2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
- 3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

得分	
评阅人	

一 (本题满分 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x + 1$$

则 $f(x) =$ _____

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) =$ _____.

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy, v = x + cy$, 其中 c 为非零

常数, 则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2} w_{yy} =$ _____.

4. 极限设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$$

5. 不定积分 $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx =$ _____.

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域为 V , 则三重积分

$$\iiint_V z dx dy dz =$$

得分	
评阅人	

二 (本题满分 14 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α , 定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha),$$

若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$. 证明 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值.

姓名 _____

准考证号 _____

学校 _____

省市 _____

密封线

密封线

密封线

省市_____学校_____准考证号_____姓名_____

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

三 (本题满分 14 分) 设曲线 Γ 为曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz.$$

得分	
评阅人	

四 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续,

若对任意实数 t , 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$, 证明 $\forall a, b$,

$$a < b, \text{ 有 } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}.$$

省市_____学校_____准考证号_____姓名_____

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

五 (本题满分 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正

整数. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.