第七届全国大学生数学竞赛决赛试题解答

(非数学类, 2016年3月 福州)

一、填空题(本题30分, 每小题6分)

(1) $y=c_2\pm\sqrt{2(c_1-x)}$; (2) $\frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^3-5)$; (3) $\frac{f(t)f''(t)-f'(t)^2}{f(t)^3}$;

(4) $f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$; (5) π.

二、(本题14分)

证明 记$F(x,y,z)=f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})$, 则

$$(F_x,F_y,F_z)=\left(\frac{f_1}{z-c},\frac{f_2}{z-c},\frac{-(x-a)f_1-(y-b)f_2}{(z-c)^2}\right).$$

取曲面的法向量$\mathbf{n}=((z-c)f_1,(z-c)f_2,-(x-a)f_1-(y-b)f_2)$. 记$(x,y,z)$为曲面上的点, (X,Y,Z)为切平面上的点, 则曲面上过点(x,y,z)的切平面方程为

$$[(z-c)f_1](X-x)+[(z-c)f_2](Y-y)-[(x-a)f_1+(y-b)f_2](Z-z)=0.$$

容易验证, 对于任意(x,y,z) $(z\neq c)$, $(X,Y,Z)=(a,b,c)$都满足切平面方程. 结论得证.

三、(本题14分)

证明 由$f(x)$在$[a,b]$上连续知$f(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t,$$

则$F'(x)=-f(x)$. 由此

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x &=2\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x\\ &=-2\int_a^b F'(x)F(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)\\ &=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b)\\ &=F^2(a)=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.\end{aligned}$$

四、(本题14分)

证明 我们要证明

$$\operatorname{rk}(AB)+\operatorname{rk}(BC)\leqslant \operatorname{rk}(B)+\operatorname{rk}(ABC)=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_q & 0 \\ -C & E_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E_q \\ E_p & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC\end{pmatrix},$$

且$\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E_q & 0 \\ -C & E_p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -E_q \\ E_p & 0\end{pmatrix}$可逆, 所以

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC\end{pmatrix}\geqslant \operatorname{rk}(AB)+\operatorname{rk}(BC).$$

五、(本题14分)

解 (1) $I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}$.

(2) 由于$0<x<\frac{\pi}{4}$, 所以$0<\tan x<1$, $\tan^{n+2}x<\tan^n x<\tan^{n-2}x$. 从而$I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$, 于是$I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$. 故$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$, $\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p<I_n^p<\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^p$.

当$p>1$时, $|(-1)^nI_n^p|\leqslant I_n^p<\frac{1}{2^p(n-1)^p}$ $(n\geqslant 2)$. 由$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^p}$收敛, 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nI_n^p$绝对收敛.

当$0<p\leqslant 1$时, 由于$\{I_n^p\}$单调减少并趋于0, 由Leibniz判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nI_n^p$ 收敛. 而$I_n^p>\frac{1}{2^p(n+1)^p}\geqslant\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{2^p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散, 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nI_n^p$

是条件收敛的. 而$p \leqslant 0$时, 由于$|I_n^p| \geqslant 1$, 由级数收敛的必要条件, 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$发散.

六、(本题14分)

证明 记上半球面S的底平面为D, 方向向下, S和D围成的区域为Ω. 由Gauss公式,

$$\left(\iint\limits_S + \iint\limits_D\right) P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

由于$\iint_D P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D R\mathrm{d}\sigma$和题设条件, 其中$\mathrm{d}\sigma$是$xy$平面上的面积微元, 我们得到

$$-\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

注意到上式对任何$r > 0$成立, 我们由此证明$R(x_0, y_0, z_0) = 0$. 若不然, 设$R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 注意到$\iint_D R\mathrm{d}\sigma = R(\xi, \zeta, z_0)\pi r^2$, 这里$(\xi, \zeta, z_0) \in D$. 而当$r \to 0^+$, $R(\xi, \zeta, z_0) \to R(x_0, y_0, z_0)$, 故$(*)$式左端为一个2阶的无穷小.

类似地, 当$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} + \frac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$, $\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$是一个3阶无穷小;

而当$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} + \frac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} = 0$, 该积分趋于零的阶高于3. 故(*)式右端阶高于左端. 从而当r很小时

$$\left|\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma\right| > \left|\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\right|,$$

这与(*)式矛盾.

由于在任何点处, $R(x_0, y_0, z_0) = 0$, 故$R(x, y, z) \equiv 0$. 代入(*)式得到

$$\iiint\limits_\Omega \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}v = 0.$$

重复前面的证明得知$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} = 0$. 由$(x_0, y_0, z_0)$的任意性得$\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$.