

第七届全国大学生数学竞赛预赛试卷
(非数学类, 2015 年)

(5) 设区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$, 则 $u(x)$ 的初等函数表达式是_____。

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30 分	12 分	12 分	14 分	16 分	16 分	100 分
得分							

得分	
评阅人	

二 (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程。

密封线

密封线

密封线

- 注意: 本试卷共六大题, 满分 100 分, 考试时间为 150 分钟。
- 1 所有答题都必须写在此试题纸密封线右边, 写在其它纸上无效。
 - 2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记。
 - 3 当本题空白不够时, 可写在当页背面, 并注明题号。

得分	
评阅人	

一 填空题(本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)。

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin \pi}{n^2+n} \right) =$ _____。

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所决定, 其中 $F(u, v)$ 具

有连续偏导数, 且 $x F_u + y F_v \neq 0$ 。则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1, -1, 3)$ 的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围区域的体积为_____。

(4) 函数 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, 5) \end{cases}$ 在 $(-5, 5]$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 收敛的值

是_____。

姓名_____

准考证号_____

学校_____

省市_____

省市_____学校_____准考证号_____姓名_____

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

三 (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α, β , 使得对于 $\forall x \in (a,b)$, 有

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

得分	
评阅人	

四 (本题满分 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数。

省市_____学校_____准考证号_____姓名_____

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

五 (本题满分 16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 1. \text{ 试证:}$$

(1) $\exists x_0 \in [0,1]$ 使 $|f(x_0)| > 4$

(2) $\exists x_1 \in [0,1]$ 使 $|f(x_1)| = 4$

得分	
评阅人	

六 (本题满分 16 分) 设 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续

的二阶偏导数, 且 $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 。若 $f(0,0) = 0$,

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$