

第四届全国大学生数学竞赛预赛试卷

(非数学类, 2012)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	30	10	10	12	12	12	14	100
得分								

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

(2) 求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2 , 使其中一个

平面过点 $(4, -3, 1)$;

(3) 已知函数 $z = u(x, y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 确定常数 a 和 b , 使函数 $z = z(x, y)$ 满足

方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$;

(4) 设函数 $u = u(x)$ 连续可微, $u(2) = 1$, 且 $\int_L (x+2y)udx + (x+u^3)udy$ 在右半平面上

与路径无关, 求 $u(x)$;

(5) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt$.

专业: _____

考生座位号: _____

所在院校: _____

准考证号: _____

姓名: _____

线

封

密

姓名：_____ 准考证号：_____ 所在院校：_____ 考生编号：_____ 专业：_____

密 封 线

得 分	
评阅人	

二、(本题 10 分)

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$.

得 分	
评阅人	

三、(本题 10 分)

求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001.

得分	
评阅人	

四、(本题 12 分)

设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$,

$f'(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y = f(x)$

上点 $P(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

线
封
密

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生编号: _____ 专业: _____

得 分	
评阅人	

五、(本题 12 分)

求最小实数 C ，使得对满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ ，

都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C$ 。

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生编号: _____ 专业: _____

密 封 线

得 分	
评阅人	

六、(本题 12 分)

设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$. 区域 Ω 是由抛物面

$z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 所围起来的上半

部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

得分	
评阅人	

七、(本题 14 分)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 那么

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.