完备 Leibniz 代数的性质及低维分类

曾阳[1], 林磊[1]

(1.华东师范大学数学系, 上海市, 200241)

摘 要: 本文研究了完备 Leibniz 代数的性质及低维分类. 利用 Leibniz 代数中平方元生成的双边理想, 获得了小于五维的完备 Leibniz 代数完整的分类, 以及五维时一类特殊情况下完备 Leibniz 代数的分类, 从而推广了 Leibniz 代数的结构理论.

关键词: Leibniz 代数; 完备李代数; 完备 Leibniz 代数

MR(2000)**主题分类号:** 17A32 ; 17A60 **中图分类号:** O152.5

文献标识码: A **文章编号:**

1 引言

Leibniz 代数最早是由 Bloch 在文献 [12] 中考虑, 当时被称为 D-代数. 直至上世纪九十年代, Loday [13] 在研究不满足交错性的广义李代数时, 正式提出了这个概念. 关于非李的 Leibniz 代数分类问题, 二维、三维以及四维幂零的情况已有完整分类, 而其它情况下 Leibniz 代数的结构尚未有清晰而完整的刻画, 关于 Leibniz 代数其它方面的研究则主要集中在关于同调问题等的抽象理论上(参见 [6], [10], [11] 等).

上世纪四五十年代一些学者提出了完备李代数的概念, 并对这类代数进行过研究. 所谓完备李代数, 就是满足中心为零而且导子都是内导子的一类特殊的李代数, 我们常见的有限维复半单李代数就是完备李代数. 关于完备李代数的结构和性质已有很深刻的结果(参见 [3]), 但完备李代数的分类问题并没有完全解决. 对于低维完备李代数, 朱林生, 孟道骥在 [8] 中给出了幂零根基维数 ≤ 6 以及所有的 ≤ 7 维完备李代数的分类.

在前人工作的基础上, 综合上述两类代数的特点, 东北师范大学的常丽在其硕士学位论文 [5] 中提出了完备 Leibniz 代数的概念. 但是, 经研究发现, 此种定义方法存在着瑕疵, 即不存在非李的完备 Leibniz 代数. 本文由此启发给出了完备 Leibniz 代数一种更合理的定义, 并对这类代数进行了初步的研究.

2 完备 Leibniz 代数的定义及性质

本文中, 我们假设线性空间的基域是复数域.

---

*收稿日期: 接收日期:

基金项目: 长江学者和创新团队发展计划 (PCSIRT); 上海重点学科项目.

作者简介: 曾阳(1984-), 男, 山东淄博, 博士研究生, 研究方向: 李代数与表示理论.

林磊(1960-), 男, 上海, 副教授, 研究方向: 李代数及数学教育. E-mail: llin@math.ecnu.edu.cn

2.1 基本概念

这部分内容是对于李代数以及Leibniz代数相关的一些概念和结果的回顾, 它们都是标准的, 可参见 [3], [8], [10], [13] 或 [15].

定义2.1.1. 一个Leibniz代数$\mathcal{G}$是一个线性空间, 上面定义了一个双线性映射:

$$[-,-]: \ \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G},$$

满足 Leibniz 等式:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \ \forall\, x,y,z \in \mathcal{G}.$$

显然, 对于Leibniz代数, 我们有 $[x,[y,y]] = 0$ 以及 $[x,[y,z]] + [x,[z,y]] = 0$.

注: 许多代数的定义都涉及到Leibniz等式, 参见 [2] 等. 李代数是乘积满足交错律的Leibniz代数.

定义2.1.2. 一个Leibniz代数$\mathcal{G}$的右零化子定义为:

$$Z^r(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \mid [\mathcal{G}, x] = 0\}.$$

易知$Z^r(\mathcal{G})$是Leibniz代数$\mathcal{G}$的双边理想.

命题2.1.1. 设$\mathcal{G}$是一个Leibniz代数, 则$\mathcal{G}$中由平方元生成的双边理想

$$I(\mathcal{G}) := \mathrm{id}\langle [x,x] |\, x \in \mathcal{G}\rangle,$$

包含在$Z^r(\mathcal{G})$之中.

命题2.1.2. ([10]) 设$\mathcal{G}$是Leibniz代数, 则$\mathcal{G}$中由平方元生成的理想$I(\mathcal{G})$由形如$[x,x]$的元素线性张成.

定义2.1.3. ([15]) 若一个李代数$\mathcal{L}$满足下面两个条件:

1. $\mathcal{L}$的中心为零, 即$C(\mathcal{L}) = 0$.

2. $\mathcal{L}$的所有的导子都是内导子, 即$\mathrm{Der}(\mathcal{L}) = \mathrm{ad}(\mathcal{L})$.

则称李代数$\mathcal{L}$为完备李代数.

2.2 完备 Leibniz 代数的定义

在常丽 [5] 的硕士学位论文中, 给出完备Leibniz代数的定义如下:

若Leibniz代数$\mathcal{G}$满足条件:

$$Z^r(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \mid [\mathcal{G}, x] = 0\} = 0, \ \mathrm{Der}\,\mathcal{G} = \mathrm{ad}\,\mathcal{G},$$

则称$\mathcal{G}$为完备 Leibniz 代数.

经观察发现, 此种定义方式存在着缺陷: 对任意的Leibniz代数$\mathcal{G}$, 任取x, $y \in \mathcal{G}$, 都有$[y,[x,x]] = [[y,x],x] - [[y,x],x] = 0$, 即$[x,x] \in Z^r(\mathcal{G})$. 若这个Leibniz代数满足定义中的条件, 则有$\forall\, x \in \mathcal{G}$, $[x,x] = 0$, 此时Leibniz代数已经退化为李代数的情况, 即不存在非李的完备Leibniz代数.

下面, 我们利用理想$I(\mathcal{G})$, 给出完备Leibniz代数的一个恰当的定义:

定义2.2.1. 设$\mathcal{G}$是一个Leibniz代数, $I(\mathcal{G})$是$\mathcal{G}$的由平方元生成的理想. 若

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) := \mathcal{G}/I(\mathcal{G})$$

是一个完备李代数, 则称$\mathcal{G}$为完备Leibniz代数.

2.3 完备Leibniz代数的基本性质

根据上述定义方法, 所有的完备李代数都是完备Leibniz代数, 从而我们给出的完备Leibniz代数的定义与完备李代数的定义是相容的, 完备Leibniz代数的概念是完备李代数概念的一种推广.

下面我们给出完备Leibniz代数的几个代数性质:

命题2.3.1. 幂零Leibniz代数不是完备Leibniz代数.

证明: 设$\mathcal{G}$是幂零Leibniz代数, 由$\mathcal{G}$幂零可以知道$\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$是幂零李代数. 而非零的幂零李代数中心不为零, 而且存在外导子(参见[14]), 故不是完备李代数, 因此$\mathcal{G}$不是完备Leibniz代数. □

命题2.3.2. 设$\mathcal{G}$是Leibniz代数, 且$\mathcal{G}/J$是李代数, 其中J是$\mathcal{G}$的理想, 则$J \supseteq I(\mathcal{G})$.

证明: 由于$\mathcal{G}/J$是李代数, 则对任意$x \in \mathcal{G}$, 设$\overline{x} \in \mathcal{G}/J$, 有$\overline{[x,x]} = [\overline{x},\overline{x}] = 0$, 即$[x,x] \in J$. 而$I(\mathcal{G})$由平方元所张成, 由于$J$是$\mathcal{G}$的理想, 故有$I(\mathcal{G}) \subseteq J$, 命题得证. □

命题2.3.3. 设$\mathcal{G}$是Leibniz代数, $I(\mathcal{G})$是由其平方元生成的理想, 则对于任意的$x, y \in \mathcal{G}$, $[x,y] + [y,x] \in I(\mathcal{G})$.

证明: 因为$\forall\, x, y \in \mathcal{G}$, $[x,x] \in I(\mathcal{G})$, $[y,y] \in I(\mathcal{G})$, $[x+y, x+y] \in I(\mathcal{G})$, 所以$[x,y] + [y,x] = [x+y, x+y] - [x,x] - [y,y] \in I(\mathcal{G})$, 命题得证. □

引理2.3.1. 不存在一维的完备Leibniz代数.

证明: 因为一维Leibniz代数是李代数, 而一维李代数都是Abel的, 中心为其本身, 即中心不为零, 故不存在一维的完备Leibniz代数. □

我们知道, 在同构的意义下存在唯一的二维非Abel李代数$\mathcal{G}'$, 设其基为e_1, e_2, 则有$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_2, e_1] = -e_2$, 其余括积为零. 由此可得以下结论:

引理2.3.2. ([8]) 二维非Abel李代数$\mathcal{G}'$是完备李代数.

引理 2.3.2 中的李代数在以后的讨论中起着关键的作用, 以下很多讨论都是以这个李代数为例进行一般性方法的阐述. 在不特别说明的情况下, 我们都用 $\mathcal{G}'$ 来指代这个完备李代数. 根据上述论断, 我们可以得到下面几个推论:

推论2.3.1. 若 $I(\mathcal{G})$ 在 $\mathcal{G}$ 中的余维数为 1, 则 $\mathcal{G}$ 不是完备 Leibniz 代数.

推论2.3.2. 若 $I(\mathcal{G})$ 在 $\mathcal{G}$ 中的余维数是 2, 且 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})$ 非交换, 则 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数.

引理2.3.3. 若 $I(\mathcal{G})=[\mathcal{G},\mathcal{G}]\neq\mathcal{G}$, 则 $\mathcal{G}$ 不是完备 Leibniz 代数.

关于完备 Leibniz 代数的中心, 我们有以下命题:

命题2.3.4. 若 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数, 则 $C(\mathcal{G})\subseteq I(\mathcal{G})$.

证明: 对于 $\forall\, x\ \in C(\mathcal{G})$, 则 $[x,\mathcal{G}]=[\mathcal{G},x]=0$. 令 $\overline{x}$ 是 x 在 Leibniz 代数同态: $\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}/I(\mathcal{G})=\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 下的象, 则由 $[\overline{x},\mathcal{L}(\mathcal{G})]=[\mathcal{L}(\mathcal{G}),\overline{x}]=0$ 可得 $\overline{x}\in C(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$, 但 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是完备李代数, 故 $C(\mathcal{L}(\mathcal{G}))=0$, 即 $\overline{x}=0$. 故 $x\in I(\mathcal{G})$, 从而 $C(\mathcal{G})\subseteq I(\mathcal{G})$. □

上面只抽象地给出了完备 Leibniz 代数的定义以及相关性质, 但这并不能表明非李的完备 Leibniz 代数存在. 实际上, 非李的完备 Leibniz 代数确实存在, 我们可以给出三维情况时的一个例子:

例 设 $\mathcal{G}$ 是一个以 e_1,e_2,e_3 为基的 3 维 Leibniz 代数, 它的乘法表为:

$$[e_1,e_1]=e_3,\ [e_1,e_2]=e_2,\ [e_2,e_1]=-e_2.$$

则 $\mathcal{G}$ 为非李的完备 Leibniz 代数.

证明: 因为 $[e_1,e_1]=e_3$, 所以 $\mathcal{G}$ 不是李代数.

我们对 $\mathcal{G}$ 的基验证 Leibniz 等式可证明, 上述乘法表确实定义了一个 Leibniz 代数. 下面我们验证此 Leibniz 代数的完备性:

因为 $[e_1,e_1]=e_3$, 所以 $\mathbb{C}e_3\subseteq I(\mathcal{G})$. 而 $\mathbb{C}e_3$ 显然是 $\mathcal{G}$ 的理想, 且 $\mathcal{G}/\mathbb{C}e_3$ 是李代数, 由命题 2.3.2 可知 $\mathbb{C}e_3\supseteq I(\mathcal{G})$, 因此 $I(\mathcal{G})=\mathbb{C}e_3$, 即 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})\cong\mathcal{G}'$. 而由引理 2.3.2 可知 $\mathcal{G}'$ 是完备李代数, 所以 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数. □

直接通过定义进行验证可知, 有如下结论成立:

定理2.3.1. 若 $\mathcal{G}$ 是 Leibniz 代数, $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ 是 $\mathcal{G}$ 的双边理想, 且 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2$, 则 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数的充分必要条件是 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ 都是完备 Leibniz 代数.

由这个定理的下述推论, 我们可以给出许多非李的完备 Leibniz 代数的例子:

推论2.3.3. 若 $\mathcal{G}_1$ 是非李的完备 Leibniz 代数, 而 $\mathcal{G}_2$ 是完备李代数, 则 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2$ (作为理想的直和) 是非李的完备 Leibniz 代数.

当然, Leibniz 代数中具有完备性的只是一小部分, 我们也可以给出非完备的 Leibniz 代数的例子:

例 设 $\mathcal{G}$ 是一个以 e_1, e_2, e_3 为基的 3 维 Leibniz 代数, 它的乘法表为:

$$[e_1, e_1] = e_3,\ [e_2, e_1] = ke_3,\ [e_2, e_2] = e_3,\ k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

则 $\mathcal{G}$ 不是完备 Leibniz 代数.

证明: 易见 $I(\mathcal{G}) = \mathbb{C}e_3$, 从而 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})$ 为二维 Abel 李代数, 所以它不是完备李代数, 因此在这种情况下 $\mathcal{G}$ 不是完备 Leibniz 代数. □

3 小于 4 维非李完备 Leibniz 代数的分类

这一章我们将对小于 4 维非李的完备 Leibniz 代数给出完整分类.

3.1 二维的情况

二维非李代数的 Leibniz 代数的分类已被 Loday 解决, 有如下结果:

引理3.1.1. ([13]) *设 $\mathcal{G}$ 为非李代数的 Leibniz 代数, 且 $\dim \mathcal{G} = 2$, 则 $\mathcal{G}$ 只有两种彼此不同构的情况:*

1. $[e_1, e_2] = e_1$;
2. $[e_2, e_2] = e_1$.

其中 e_1, e_2 为 $\mathcal{G}$ 的一组基, 且基向量的其余括积均为 0.

定理3.1.1. *不存在两维非李代数的完备 Leibniz 代数.*

证明: 对于上述两种情况, $0 \neq I(\mathcal{G}) \subseteq [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, 后者是一维的, 所以 $\dim I(\mathcal{G}) = 1$. 由推论 2.3.1 可以知道 $\mathcal{G}$ 不是完备 Leibniz 代数. □

3.2 三维的情况

我们再来看三维时的情况. 蒋启芬在 [1] 中给出了三维 Leibniz 代数的完整分类, 共有十三种彼此不同构的情况. 我们根据第 2 章所得到的命题和定理, 运用对第 2 章结尾两个例子类似的讨论方法, 对这十三种情况进行一一验证, 可以得到如下定理:

定理3.2.1. *设 $\mathcal{G}$ 为一个三维非李代数的完备 Leibniz 代数, 则 $\mathcal{G}$ 只有三种不同构的情况:*

1. $[e_1, e_1] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2$.
2. $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2,\ [e_3, e_1] = ke_3,\ k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
3. $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2,\ [e_2, e_2] = e_3,\ [e_3, e_1] = -2e_3$.

其中 e_1, e_2, e_3 为 $\mathcal{G}$ 的一组基, 且基向量的其余括积均为 0.

由于除四维幂零情况外目前没有大于等于四维 Leibniz 代数的完整分类, 而由命题 2.3.1 可知幂零 Leibniz 代数都不完备, 所以我们不能继续采用验证的方法来给出完备 Leibniz 代数的分类. 本文下面所要解决的最主要问题就是构造性地给出完备 Leibniz 代数.

4 部分低维完备 Leibniz 代数的构造

4.1 低维完备李代数的分类

迄今为止, 完备李代数的分类问题并没有完全得到解决, 但是在朱林生和孟道骥的文章里, 给出了低维完备李代数的分类. 下面我们只把与本文相关的结果列举出来.

命题4.1.1. ([8]) *二维完备李代数只存在一种情况, 即 $\mathcal{G}'$. 三维完备李代数只存在一种情况, 即 $\mathfrak{sl}(2)$. 四维完备李代数只存在一种情况, 即 $\mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}'$.*

4.2 大于三维的完备 Leibniz 代数

4.2.1 一般情况

首先, 对三维非李代数的完备 Leibniz 代数进行研究可以发现以下性质成立:

命题4.2.1. *若 $\mathcal{G}$ 是三维非李代数的完备 Leibniz 代数, 则 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$. 从而 $\dim I(\mathcal{G}) = 1$.*

证明: 因为 $\mathcal{G}$ 不是李代数, 故 $\dim I(\mathcal{G}) \geqslant 1$. 而低于三维的完备李代数只有 $\mathcal{G}'$ 这一种情况, 所以 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$. 命题得证. □

从这个结果可以看出, 我们或许可以从完备 Leibniz 代数的商代数着手, 得出相应的完备李代数的结构, 再将其提升到原来的完备 Leibniz 代数, 从而得到相应的完备 Leibniz 代数结构. 由此, 我们可以得到如下结果:

定理4.2.1. *设 $\mathcal{G}$ 是四维非李代数的完备 Leibniz 代数, 则 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$, 此时 $\dim I(\mathcal{G}) = 2$; 或者 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathfrak{sl}(2)$, 此时 $\dim I(\mathcal{G}) = 1$.*

定理4.2.2. *设 $\mathcal{G}$ 是五维非李代数的完备 Leibniz 代数, 则 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$, 此时 $\dim I(\mathcal{G}) = 3$; 或者 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathfrak{sl}(2)$, 此时 $\dim I(\mathcal{G}) = 2$; 或者 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}'$, 此时 $\dim I(\mathcal{G}) = 1$.*

4.2.2 $\dim I(\mathcal{G}) = 1$ 时的情况

我们下面研究完备 Leibniz 代数的构造. 在此之前, 注意到以下事实:

设 $\mathcal{G}$ 是一个 Leibniz 代数, $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是其相应的李代数. 从线性空间的角度, $\mathcal{G}$ 可看成 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 与 $I(\mathcal{G})$ 的直和, 即 $\mathcal{G} = \mathcal{L}(\mathcal{G}) \oplus I(\mathcal{G})$. 在此观点下, 设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的一组基, $f_1, \cdots, f_n$ 是 $I(\mathcal{G})$ 的一组基. 设 $e_1, \cdots, e_m$ 在典范内射 $\iota : \mathcal{L}(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ 下的象仍记为 $e_1, \cdots, e_m$, 则 $e_1, \cdots, e_m, f_1, \cdots, f_n$ 构成了 $\mathcal{G}$ 的一组基. 因此我们下面在构造完备 Leibniz 代数的过程中, 可将 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中的元素嵌入到 $\mathcal{G}$ 中从而将其看作 $\mathcal{G}$ 的元素.

首先考虑 $\dim I(\mathcal{G})=1$ 时的情形. 此种情况下我们有如下命题:

命题4.2.2. 设 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数, 且 $I(\mathcal{G})=\mathbb{C}e$, 即 $I(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的一维理想, $[,]$ 是 $\mathcal{G}$ 中的括积, $[,]'$ 是 $\mathcal{G}$ 相应的完备李代数 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})\cong\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中的括积. 若存在线性函数 $f:\ \mathcal{L}(\mathcal{G})\longrightarrow\mathbb{C}$ 和双线性函数 $\varphi:\ \mathcal{L}(\mathcal{G})\times\mathcal{L}(\mathcal{G})\longrightarrow\mathbb{C}$ 满足以下条件:

1. $[x,y]=[x,y]'+\ \varphi(x,y)\,e$;

2. $[e,x]=f(x)\,e$,

对 $\forall\,x,y\in\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 均成立(因为 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 同构地嵌入到了 $\mathcal{G}$, 所以在等式左边, x,y 可被看作 $\mathcal{G}$ 中的元素, $[x,y]$ 为 $\mathcal{G}$ 中的乘法). 则以上定义的 f 和 φ 应满足以下条件:

(1)$\varphi(x,[y,z]')=\varphi([x,y]',z)-\varphi([x,z]',y)+\varphi(x,y)f(z)-\varphi(x,z)f(y)$;

(2)$f([x,y]')=0.\ \forall\,x,y,z\in\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

证明: 因为 Leibniz 代数的结构由 Leibniz 等式完全确定, 只要对其用 Leibniz 等式逐一验证即可.

首先, 我们讨论三个元素都在 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中的情况: 对 $\forall\,x,y,z\in\mathcal{L}(\mathcal{G})$, 由 Leibniz 等式,

$$[x,[y,z]]=[x,[y,z]'+\varphi(y,z)e]=[x,[y,z]']'+\varphi(x,[y,z]')e,$$

而 $[[x,y],z]-[[x,z],y]=[[x,y]'+\varphi(x,y)e,z]-([[x,z]'+\varphi(x,z)e,y])=[[x,y]',z]'+\varphi([x,y]',z)e+\varphi(x,y)f(z)e-([[x,z]',y]'+\varphi([x,z]',y)e+\varphi(x,z)f(y)e)$. 而 x,y,z 作为李代数 $\mathcal{L}$ 中的元素有 $[x,[y,z]']'=[[x,y]',z]'-[[x,z]',y]'$, 从而得到 (1) 式.

其次, 由于 $[e,[x,y]]=[e,[x,y]'+\varphi(x,y)e]=f([x,y]')e$, 而 $[[e,x],y]-[[e,y],x]=[f(x)e,y]-[f(y)e,x]=f(x)f(y)e-f(y)f(x)e=0$. 因为两式相等, 可以得到 (2) 式. 至此定理得证. □

在这里需要指出, 对 $\mathcal{G}$ 的基元素验证其余的 Leibniz 等式, 可以发现其余的 Leibniz 等式都是平凡的, 然后再利用线性性质即可得到条件 (1), (2) 是 $\mathcal{G}$ 构成 Leibniz 代数的充要条件.

定理4.2.3. 设 $\mathcal{L}$ 是李代数, $[,]'$ 是其括积, 设 $I=\mathbb{C}e$, 构造向量空间 $\mathcal{G}=\mathcal{L}\oplus\mathbb{C}e$. 若存在线性函数: $f:\ \mathcal{L}\longrightarrow\mathbb{C}$ 和双线性函数 $\varphi:\ \mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathbb{C}$, 其中 f 与 φ 不全为零, 且满足命题 4.2.2 的条件 (1) 和 (2), 则 $\forall\,z=x+ke$, $z'=y+le$, 其中 $x,y\in\mathcal{L}$, $k,l\in\mathbb{C}$, 定义 $[z,z']=[x,y]'+(\varphi(x,y)+kf(y))e$, 那么 $\mathcal{G}$ 是 Leibniz 代数. 当 $\mathcal{L}$ 是完备李代数, 且 $\mathcal{G}$ 中由平方元生成的理想包含 e 时, $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数, 并且 $\dim I(\mathcal{G})=1$.

由此我们可以看出, 对于 $\dim I(\mathcal{G})=1$ 的情况, 只要根据定理 4.2.3 的方法构造 Leibniz 代数 $\mathcal{G}$, 然后根据命题 4.2.2 中的条件 (1)和(2) 列出方程, 除此还要验证由平方元生成的理想确实为 $\mathbb{C}e$, 则可以得出相应的完备 Leibniz 代数.

上面只是对一般情况的分析, 当商代数为半单李代数时, 是否有更强的结果? 下面我们对此进行讨论:

首先注意到, 因为有限维半单李代数都是完备李代数, 则由 (2) 式可得: 若 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是半单李代数, 则 $[\mathcal{L}(\mathcal{G}),\mathcal{L}(\mathcal{G})]=\mathcal{L}(\mathcal{G})$, 故对 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中任意的元素 x, 都有 $f(x)=0$. 这样命题 4.2.2 中的条件 (1),(2) 可以简化为:

定理4.2.4. 若 $\mathcal{G}$ 是一个完备 Leibniz 代数, $I(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 中由平方元生成的一维理想, 且 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是半单李代数, φ, f 如命题 4.2.2 所定义, 则它必须满足 $\varphi(x,[y,z]') = \varphi([x,y]',z) - \varphi([x,z]',y)$, $\varphi \neq 0$, $f = 0$ (其中 $x,y,z \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$).

如此似乎可以得到一大类非李的完备 Leibniz 代数. 但是, 我们研究发现, 这种情况其实并不存在:

定理4.2.5. 不存在这样的完备 Leibniz 代数 $\mathcal{G}$, 使得 $I(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 中由平方元生成的一维理想, 且 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是一个半单李代数.

证明: 设 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的一组基, 再添加向量 e 则张成空间 $\mathcal{G}$. 由前面讨论可知 $\forall\, z \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, $f(z) = 0$. 设 $z = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n + ke \in \mathcal{G}$, 则

$$\begin{aligned}[z,z] &= [k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n + ke,\ k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n + ke] \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2[e_i,e_i] + \sum_{1\le i<j\le n} k_ik_j([e_i,e_j] + [e_j,e_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2\varphi(e_i,e_i)e + \sum_{1\le i<j\le n} k_ik_j(\varphi(e_i,e_j) + \varphi(e_j,e_i))e.\end{aligned}$$

若证得对任意 i,j 均有 $\varphi(e_i,e_i) = 0$, $\varphi(e_i,e_j) + \varphi(e_j,e_i) = 0$, 此时 $I(\mathcal{G}) = 0$, 则产生矛盾, 定理得证. 根据复半单李代数中的根空间分解理论, 我们取 Cartan 子代数和根空间构成的 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的一组基, 可以很容易地证明这个结论. □

这个定理对一大类完备 Leibniz 代数的构造方法给出了否定的答案. 因为 $\mathfrak{sl}(2)$ 是单李代数, 在研究四维完备 Leibniz 代数的分类时, 利用上述定理可得到推论:

推论4.2.1. 不存在四维非李代数的完备 Leibniz 代数 $\mathcal{G}$, 使得 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathfrak{sl}(2)$.

我们下面研究 $\dim\, I(\mathcal{G}) = 1$ 时另一种比较简单的情况, 即: $\mathcal{G}$ 是五维非李代数的完备 Leibniz 代数, 且 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}'$, $\dim\, I(\mathcal{G}) = 1$ 时的情况.

设完备李代数 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}'$ 的一组基为 e_1, e_2, e_3, e_4, 其中括积运算满足:

$$[e_1,e_2]' = e_2,\ [e_2,e_1]' = -e_2,\ [e_3,e_4]' = e_4,\ [e_4,e_3]' = -e_4,$$

其余基元间的括积均为零. 再添加 $I(\mathcal{G})$ 中的基元素 e, 则它们构成了完备 Leibniz 代数 $\mathcal{G}$ 的一组基. 先假设一组未知变量:

$$\varphi(e_i,e_i) = a_{ij}\ (i,j = 1,2,3,4), \quad f(e_i) = b_i\ (i = 1,2,3,4).$$

下面我们就用命题 4.2.2 中的条件 (1) 和 (2) 来推导 a_{ij}, b_j 所应满足的关系式.

首先, 先对 f 应满足的关系式进行讨论:

因为 $f([x,y]') = 0$ $(\forall\, x,y \in \mathcal{L}(\mathcal{G}))$, 所以 $f(e_2) = f([e_1,e_2]') = 0$, $f(e_4) = f([e_3,e_4]') = 0$, 即 $b_2 = b_4 = 0$.

下面根据条件 (1), 再讨论 φ 应满足的关系式:

若 $x = e_1$, $y = e_1$, $z = e_2$: 等式左边为 $\varphi(e_1,[e_1,e_2]') = \varphi(e_1,e_2) = a_{12}$, 等式右边为 $\varphi([e_1,e_1]',e_2) - \varphi([e_1,e_2]',e_1) + \varphi(e_1,e_1)f(e_2) - \varphi(e_1,e_2)f(e_1) = -a_{21} - a_{12}b_1$, 即 $a_{12} = -a_{21} - a_{12}b_1$.

对其他情况进行类似计算, 再将多余等式删去, 则可得一个方程组:

$$\begin{cases} a_{12}(b_1+1)+a_{21}=a_{11}b_3-a_{13}b_1=a_{14}b_1=a_{23}+a_{12}b_3=a_{24}=0, \\ a_{14}(b_3+1)=a_{22}(2+b_1)=a_{21}b_3-a_{23}(1+b_1)=a_{22}b_3=0, \\ a_{34}(1+b_3)+a_{43}=a_{31}b_3-a_{33}b_1=a_{32}b_3=a_{34}b_1+a_{41}=0, \\ a_{42}=a_{32}(1+b_1)=a_{44}(2+b_3)=a_{41}(1+b_3)-a_{43}b_1=a_{44}b_1=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

值得注意的是, 仅满足这个方程组并不能保证 $\mathcal{G}$ 的完备性, 因为这些方程并不能保证 $I(\mathcal{G})$ 是一维的, 即平方元能生成 $\mathbb{C}e$, 所以要对完备 Leibniz 代数的结构进行更深入细致的讨论.

对于 Leibniz 代数的同构映射, 有如下比较显然的结论:

引理4.2.1. 设 $\psi:\mathcal{G}_1\longrightarrow\mathcal{G}_2$ 是 Leibniz 代数的同构, 则: $\psi(I(\mathcal{G}_1))=I(\mathcal{G}_2), \psi(\mathcal{G}_1^{(k)})=\mathcal{G}_2^{(k)}$, $\psi(C(\mathcal{G}_1))=C(\mathcal{G}_2)$, 其中 $C(\mathcal{G}_1), C(\mathcal{G}_2)$ 分别是 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 的中心.

下面根据所得方程组对 Leibniz 代数的乘法表进行化简整理. 因为化简过程类似, 我们只对其中一种情况进行详细说明:

若 $b_1\neq 0,-1,-2$, $b_3\neq 0,-1,-2$, 则 $a_{12}(1+b_1)+a_{21}=0$, $a_{14}=a_{24}=a_{22}=a_{32}=a_{42}=a_{44}=0$, $a_{11}b_3-a_{13}b_1=0$, $a_{23}+a_{12}b_3=0$, $-a_{21}b_3-a_{23}(1+b_1)=0$, $a_{31}b_3=a_{33}b_1$, $a_{34}b_1+a_{41}=0$ $a_{34}(1+b_3)+a_{43}=0$, $a_{41}(1+b_3)=a_{43}b_1$.

此时乘法表为:

$[e_1,e_1]=a_{11}e$, $[e_1,e_2]=e_2+a_{12}e$, $[e_1,e_3]=a_{11}\frac{b_3}{b_1}e$, $[e_2,e_1]=-e_2-a_{12}(1+b_1)e$, $[e_2,e_3]=-a_{12}b_3e$, $[e_3,e_1]=a_{31}e$, $[e_3,e_3]=a_{31}\frac{b_3}{b_1}e$, $[e_3,e_4]=e_4+a_{34}e$, $[e_4,e_1]=-a_{34}b_1e$, $[e_4,e_3]=-e_4-a_{34}(1+b_3)e$, $[e,e_1]=b_1e$, $[e,e_3]=b_3e$.

首先, 设 $e_2'=e_2+a_{12}e$, $e_3'=e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e$, $e_4'=e_4+a_{34}e$, 则 e_1, e_2', e_3', e_4', e 仍然构成 $\mathcal{G}$ 的一组基, 此时乘法表变为:

$[e_1,e_1]=a_{11}e$, $[e_1,e_2']=[e_1,e_2+a_{12}e]=e_2+a_{12}e=e_2'$, $[e_1,e_3']=a_{11}\frac{b_3}{b_1}e$, $[e_1,e_4']=[e_1,e_4+a_{34}e]=0$, $[e_1,e]=0$, $[e_2',e_1]=[e_2+a_{12}e,e_1]=-e_2-a_{12}(1+b_1)e+a_{12}b_1e=-e_2-a_{12}e=-e_2'$, $[e_2',e_2']=[e_2+a_{12}e,e_2+a_{12}e]=0$, $[e_2',e_3']=[e_2+a_{12}e,e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e]=-a_{12}b_3e+a_{12}b_3e=0$, $[e_2',e_4']=[e_2+a_{12}e,e_4+a_{34}e]=0$, $[e_2',e]=0$, $[e_3',e_1]=[e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e,e_1]=a_{31}e-\frac{a_{31}}{b_1}b_1e=0$, $[e_3',e_2']=[e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e,e_2+a_{12}e]=0$, $[e_3',e_3']=[e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e,e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e]=[e_3,e_3]-[\frac{a_{31}}{b_1}e,e_3]=a_{31}\frac{b_3}{b_1}e-\frac{b_3}{b_1}a_{31}e=0$, $[e_3',\ e_4']=[e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e,e_4+a_{34}e]=[e_3,e_4]=e_4+a_{34}e=e_4'$, $[e_3',e]=0$, $[e_4',e_1]=[e_4+a_{34}e,e_1]=-a_{34}b_1e+a_{34}b_1e=0$, $[e_4',e_2']=[e_4+a_{34}e,e_2+a_{12}e]=0$, $[e_4',e_3']=[e_4+a_{34}e,e_3-\frac{a_{31}}{b_1}e]=-e_4-a_{34}(1+b_3)e+a_{34}b_3e=-e_4-a_{34}e=-e_4'$, $[e_4',e_4']=[e_4+a_{34}e,e_4+a_{34}e]=0$, $[e_4',e]=0$, $[e,e_1]=b_1e$, $[e,e_2']=0$, $[e,e_3']=b_3e$, $[e,e_4']=0$, $[e,e]=0$.

将调整后的基 e_1,e_2',e_3',e_4',e 仍记作 e_1,e_2,e_3,e_4,e, 则:

$[e_1,e_1]=a_{11}e$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,e_3]=a_{11}\frac{b_3}{b_1}e$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=b_1e$, $[e,e_3]=b_3e$.

若 $a_{11}=0$, 则此组基不作变动; 若 $a_{11}\neq 0$, 则以 $a_{11}e$ 取代 e, 此时乘法表变为:

$[e_1,e_1]=ae$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,e_3]=a\frac{b_3}{b_1}e$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=b_1e$, $[e,e_3]=b_3e$, 其中 $a=0$ 或者 1, $b_1,b_3\neq 0,-1,-2$.

对其它情况进行类似整理化简, 并将平方元不能生成 $\mathbb{C}e$ 的情况删去, 然后将同构的情况进行合并, 我们可以得到如下定理:

定理4.2.6. 设 $\mathcal{G}$ 是五维非李代数的完备 Leibniz 代数, 并且满足 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})\cong\mathcal{G}'\oplus\mathcal{G}'$. 则在同构的意义下, 存在着下面六种互相不同构的情况:

(1) $[e_1,e_1]=e$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e_3,e_3]=ae$, $[e_1,e_3]=a_{13}e$, $[e_3,e_1]=a_{31}e$, 其中 a, a_{13},a_{31} 为任意复数.

(2) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e_1,e_3]=e$, $[e_3,e_1]=ae$, 其中 $a\neq -1$.

(3) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_2]=e$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=-e$.

(4) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=-2e$.

(5) $[e_1,e_1]=e$, $[e_1,e_2]=e_2$,$[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=b_1e$, 其中 $b_1\neq 0$.

(6) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_4]=e_4$, $[e_4,e_3]=-e_4$, $[e,e_1]=b_1e$, $[e,e_3]=b_3e$, 其中 b_1, $b_3\neq 0$.

以上均假设 e_1, e_2, e_3, e_4, e 为 $\mathcal{G}$ 的一组基, 且基向量的其余括积为 0.

证明: 由上面的讨论可知, 在同构的意义下, 所有情况均可归纳为上述六大类. 我们以第四与第六种情况为例证明这六大类彼此不同构:

设 $\psi:\ \mathcal{G}_1\longrightarrow\mathcal{G}_2$ 是 (4) 与 (6) 之间的同构, 假设 $[,]_1$ 是 (4) 的乘积, $[,]_2$ 是 (6) 的乘积, e_1,e_2,e_3,e_4,e 是 (4) 的基元素, e_1',e_2',e_3',e_4',e' 是 (6) 的基元素. 注意到 $I(\mathcal{G}_1)=\mathbb{C}e$, $I(\mathcal{G}_2)=\mathbb{C}e'$, $[\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_2]_2=\mathbb{C}e_2'+\mathbb{C}e_4'+\mathbb{C}e'$, 由引理 4.2.1, 可假设: $\psi(e_1)=b_{11}e_1'+b_{12}e_2'+b_{13}e_3'+b_{14}e_4'+b_{15}e'$, $\psi(e_2)=b_{22}e_2'+b_{24}e_4'+b_{25}e'$, $\psi(e_3)=b_{31}e_1'+b_{32}e_2'+b_{33}e_3'+b_{34}e_4'+b_{35}e'$, $\psi(e_4)=b_{42}e_2'+b_{44}e_4'+b_{45}e'$, $\psi(e)=b_{55}e'$, 其中 $b_{55}\neq 0$. 由 (4) 中的乘法可以知道: $\psi([e_2,e_2]_1)=\psi(e)=b_{55}e'\neq 0$, 而由 (6) 中的乘法可以知道: $[\psi(e_2),\psi(e_2)]_2=[b_{22}e_2'+b_{24}e_4'+b_{25}e',b_{22}e_2'+b_{24}e_4'+b_{25}e']_2=0$, 故 $\psi([e_2,e_2]_1)\neq[\psi(e_2),\psi(e_2)]_2$. 从而得出矛盾.

其它情况类似可证, 至此得到定理得证. □

4.2.3 $\dim\ I(\mathcal{G})=2$ 时的情况

下面对 $\dim I(\mathcal{G})=2$ 时的情况进行讨论. 首先对一般情形进行研究: 设 $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数, 且 $I(\mathcal{G})=\mathbb{C}e_3\oplus\mathbb{C}e_4$, 即 $I(\mathcal{G})$ 是由 $\mathcal{G}$ 中平方元生成的二维 Abel 理想. 在构造完备 Leibniz 代数的过程中, 与 4.2.2 节采取同样的讨论, 可将完备李代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中的元素嵌入到 $\mathcal{G}$ 从而看作为 $\mathcal{G}$ 的元素. 由此我们可得如下命题:

命题4.2.3. 设 $\mathcal{G}$ 是 Leibniz 代数, 且 $I(\mathcal{G})=\mathbb{C}e_3\oplus\mathbb{C}e_4$, 即 $I(\mathcal{G})$ 是由 $\mathcal{G}$ 中平方元生成的二维理想, $[,]$ 是 $\mathcal{G}$ 中的括积, $[,]'$ 是 $\mathcal{G}$ 相应的李代数 $\mathcal{G}/I(\mathcal{G})\cong\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 中的括积, 若存在四个线性函

数: f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} : $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{C}$ 和两个双线性函数 φ_1, φ_2,: $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \times \mathcal{L}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{C}$ 满足以下条件:

1. $[x,y] = [x,y]' + \varphi_1(x,y)\, e_3 + \ \varphi_2(x,y)\, e_4$;

2. $[e_3,x] = f_{11}(x)\, e_3 + f_{12}(x)\, e_4$;

3. $[e_4,x] = f_{21}(x)\, e_3 + f_{22}(x)\, e_4$;

对 $\forall\, x,y \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ 均成立 (因为 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 同构地嵌入到了 $\mathcal{G}$, 所以等式左边 x,y 可看作 $\mathcal{G}$ 中的元素). 则以上定义的 f_{ij} (其中 $i,j=1,2$) 和 φ 应满足以下条件:

(1) $\varphi_1(x,[y,z]') = \varphi_1([x,y]',z) - \varphi_1([x,z]',y) + \varphi_1(x,y)f_{11}(z) + \varphi_2(x,y)f_{21}(z) - \varphi_1(x,z)$ $f_{11}(y) - \varphi_2(x,z)f_{21}(y)$;

(2) $\varphi_2(x,[y,z]') = \varphi_2([x,y]',z) - \varphi_2([x,z]',y) + \varphi_1(x,y)f_{12}(z) + \varphi_2(x,y)f_{22}(z) - \varphi_1(x,z)$ $f_{12}(y) - \varphi_2(x,z)f_{22}(y)$;

(3) $f_{11}([x,y]') = f_{12}(x)f_{21}(y) - f_{12}(y)f_{21}(x)$;

(4) $f_{22}([x,y]') = -f_{11}([x,y]')$;

(5) $f_{12}([x,y]') = f_{11}(x)f_{12}(y) - f_{11}(y)f_{12}(x) + f_{12}(x)f_{22}(y) - f_{12}(y)f_{22}(x)$;

(6) $f_{21}([x,y]') = -f_{11}(x)f_{21}(y) + f_{21}(x)f_{11}(y) - f_{21}(x)f_{22}(y) + f_{22}(x)f_{21}(y)$;

对任意 $\forall\, x,y,z \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ 均成立.

运用 4.2.2 节 $\dim\ I(\mathcal{G}) = 1$ 时类似的研究方法, 对 Leibniz 等式进行验证即可得到结论.

在这里需要指出, 对 $\mathcal{G}$ 的基元素验证其余的 Leibniz 等式, 可以发现其余的 Leibniz 等式都是平凡的, 然后再利用线性性质即可得到条件 (1)—(6) 是 $\mathcal{G}$ 构成 Leibniz 代数的充要条件.

定理4.2.7. 设 $\mathcal{L}$ 是李代数, $[,]'$ 是其括积, 设 $I = \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$, 构造向量空间 $\mathcal{G} = \mathcal{L} \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$. 若存在线性函数: f_{ij} : $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ 和双线性函数 φ_i : $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, 其中 $i,j=1,2$, f_{ij} 与 φ_i 不全为零, 且满足命题 4.2.4 的条件 (1)—(6), 则 $\forall\, z = x + k_3e_3 + k_4e_4$, $z' = y + l_3e_3 + l_4e_4$, 其中 $x,y \in \mathcal{L}$, k_3, k_4, l_3, $l_4 \in \mathbb{C}$, 定义 $[z,z'] = [x,y]' + (\varphi_1(x,y) + k_3f_{11}(y) + k_4f_{21}(y))e_3 + (\varphi_2(x,y) + k_3f_{12}(y) + k_4f_{22}(y))e_4$, 那么 $\mathcal{G}$ 是 Leibniz 代数. 当 $\mathcal{L}$ 是完备李代数, 且 $\mathcal{G}$ 中由平方元生成的理想包含 e_3, e_4 时, $\mathcal{G}$ 是完备 Leibniz 代数, 并且 $\dim I(\mathcal{G}) = 2$.

我们下面研究一种特殊的情况: 设 $\mathcal{G}$ 是四维非李代数的完备 Leibniz 代数, $\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$, 其中 $\dim I(\mathcal{G}) = 2$. 类似于我们前面对一维情况的讨论, 可以作如下假设:

设 e_1, e_2 是 $\mathcal{G}'$ 的一组基, 乘法表是 $[e_1,e_2]' = e_2$, $[e_2,e_1]' = -e_2$, 可把 e_1, e_2 同构地嵌入到 $\mathcal{G}$ 中. 再设 e_3, e_4 是 $I(\mathcal{G})$ 的一组基, 则 e_1, e_2, e_3, e_4 构成了 $\mathcal{G}$ 的一组基. 我们可以假定一组未知量, 再根据命题 4.2.3 中的六个条件列出这组未知量所应满足的关系式, 可得到由 Leibniz 等式所派生出来的方程. 利用方程组中未知量关系式将乘法表进行化简整理, 我们可以得到如下定理:

定理4.2.8. 若$\mathcal{G}$是四维非李代数的完备Leibniz代数, 则必有$\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$, 且在同构的意义下, 存在着下列十二种彼此不同构的情况:

(1) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_1]=b_{11}e_3$, $[e_4,e_1]=b_{22}e_4$, 其中$b_{11}\neq 0$, $b_{22}\neq 0$.

(2) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_1]=b_{11}e_3$, 其中$b_{11}\neq 0$.

(3) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e_3$, $[e_3,e_1]=-2e_3$, $[e_4,e_1]=b_{22}e_4$, 其中$b_{22}\neq 0$.

(4) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e_3$, $[e_3,e_1]=-2e_3$.

(5) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2+e_3$, $[e_3,e_1]=-e_3$, $[e_4,e_2]=e_3$.

(6) $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_4,e_1]=e_4$, $[e_4,e_2]=e_3$.

(7) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_1]=b_{11}e_3$, $[e_4,e_1]=(1+b_{11})e_4$, $[e_4,e_2]=e_3$, 其中$b_{11}\neq -1$.

(8) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e_3$, $[e_3,e_1]=-2e_3$, $[e_4,e_1]=-e_4$, $[e_4,e_2]=e_3$.

(9) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=-3e_3$, $[e_4,e_1]=-2e_4$, $[e_4,e_2]=e_3$.

(10) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_2,e_2]=e_3$, $[e_3,e_1]=-2e_3$, $[e_4,e_1]=e_3-2e_4$.

(11) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_4,e_1]=e_3$.

(12) $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_2,e_1]=-e_2$, $[e_3,e_1]=b_{11}e_3$, $[e_4,e_1]=e_3+b_{11}e_4$, 其中$b_{11}\neq 0$.

以上均假设e_1, e_2, e_3, e_4为$\mathcal{G}$的一组基, 且基向量的其余括积为0.

证明: 由定理4.2.1可知四维完备Leibniz代数存在着两种可能的情况, 再由推论4.2.1可知$\mathcal{G}/I(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}'$. 根据推导出的乘法表系数所应满足的关系式, 对满足条件的Leibniz代数运用类似于4.2.2节的方法进行分类并归纳整理可以得到, 在同构的意义下, 所有情形都可以归纳到上述十二种彼此不同构的情况, 而且在每种情况下乘法表所对应的Leibniz代数的平方元确实能生成二维理想$I(\mathcal{G})$, 即得到的Leibniz代数是完备的, 至此定理得证. □

参考文献

[1] 蒋启芬. 三维Leibniz代数的分类[J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 677-686.

[2] 佟洁, 靳全勤. 李代数的Possion代数结构II[J]. 数学杂志, 2010, 30(1): 145-151.

[3] 孟道骥, 朱林生, 姜翠波. 完备李代数[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[4] 段永健. 关于低维Leibniz代数的一些相关性质的研究[D]. 华东师范大学硕士学位论文, 2007.

[5] 常丽. Leibniz代数中的一些结果[D]. 东北师范大学硕士学位论文, 2006.

[6] 刘东. 无限维Lie代数和Leibniz代数[D]. 华东师范大学博士学位论文, 2004.

[7] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov and B. A. Omirov. On nilpotent and simple Leibniz algebras[J]. Communications in Algebra, 2005, 33: 159-172.

[8] Linsheng Zhu and Daoji Meng. The classification of complete Lie algebras with low dimensions[J]. Algebra Colloquium, 1997, 4(1): 95-109.

[9] S. Albeverio, B. A. Omirov and I. S. Rakhimov. Classification of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras[J]. Extracta Mathematicae, 2006, 21(3): 197-210.

[10] R. Kurdiani and T. Pirashvili. A Leibniz algebra structure on the second tensor power[J]. Journal of Lie Theory, 2002, 12: 583-596.

[11] Naihong Hu, Yufeng Pei and Dong Liu. A cohomological characterization of Leibniz central extensions of Lie algebras[J]. Proc. Amer. Math. Soc. 2008, 136(2): 437-447.

[12] A. Bloch. On a generalization of Lie algebra[J]. Math In USSR Doklady, 1965, 163(3): 471-473.

[13] J. L. Loday. Une version non commutative des algebras de Lie: les algebra de Leibniz[J]. Enseign. Math. Ann., 1993, 296(1): 139-158.

[14] J. E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representations theory[M]. Springer-Verlag, 1972.

[15] N. Jacobson. Lie algebras[M]. New York, Wiley: 1962.

PROPERTIES OF COMPLETE LEIBNIZ ALGEBRAS AND THEIR CLASSIFICATION OF LOW DIMENSIONS

ZENG Yang[1], LIN Lei[1]

(*1.Dept. of Math., East China Normal University, Shanghai 200241, China*)

Abstract: In this paper we study the properties of complete Leibniz algebras and their classification of low dimensions. By using the two-sided ideals which are generated by square elements, we obtain complete classification of complete Leibniz algebras of dimension less than five. We also obtain the classification of one special case of five dimensional complete Leibniz algebras. All these results develop the construction theory of Leibniz algebras.

Keywords: Leibniz algebras; complete Lie algebras; complete Leibniz algebras

2000 MR Subject Classification: 17A32 ; 17A60